آزمون‌های نرمال چندمتغیره برای داده‌های چندمتغیره

محمود خراتی کوپایی،[۱] فاطمه سهرابی[۲]

تاریخ دریافت: ۱۳۹۵/۲/۲۶
تاریخ پذیرش: ۱۳۹۶/۱/۳۰

چکیده:

توزیع نرمال در عمل، کاربردهای فراوانی دارد. مسئله آزمون این‌که آیا نمونه‌ای از مشاهدات از توزیع نرمال تبعیت می‌کند، توسط بسیاری از آماردانان مورد مطالعه قرار گرفته است. هدف اصلی این مقاله ارائهٔ روش آزمونی ساده برای آزمون کردن توزیع نرمال چند متغیره است.

واژه‌های کلیدی: توزیع نرمال استاندارد، آزمون شاپیرو-ویلک، توان، شبیه‌سازی مونته‌کارلو.

۱ مقدمه

توزیع نرمال در سال ۱۷۳۳ میلادی توسط آبراهام دموآر، ریاضی‌دان فرانسوی، معرفی شد و سپس در سال ۱۸۱۲ میلادی توسط لاپلاس توسعه یافت. دلیل اهمیت توزیع نرمال، نقش این توزیع در قضیهٔ حدی مرکزی است. تعمیم توزیع نرمال به چندین بعد، نقش اساسی در تحلیل چندمتغیری ایفا می‌کند. یک مزیت توزیع نرمال چندمتغیری از این حقیقت ناشی می‌شود که از نظر ریاضی انعطاف‌پذیری دارد و نتایج خوبی را می‌توان از آن به دست آورد. از توزیع نرمال به‌طور گسترده‌ای در بسیاری از برنامه‌های کاربردی استفاده می‌شود. مسئله آزمون این‌که آیا نمونه‌ای از مشاهدات از یک توزیع نرمال می‌آید، به‌طور گسترده توسط بسیاری از آماردانان مورد مطالعه قرار گرفته است. [۷] بیش از ۳۰ روش رسمی را بررسی کرده که به‌طور خاص برای آزمون نرمال بودن ارائه شده‌اند.

به‌طور کلّی، آزمون‌های چندمتغیره تعمیمی از آزمون‌های یک‌متغیره از جمله، آزمون شاپیرو-ویلک و آزمون کشیدگی هستند. در این مقاله، توان دو روش جدید برای نرمال چندمتغیره را با هم مقایسه می‌کنیم. یکی از این آزمون‌ها توسط [۹] معرفی شده است که از ترکیب نسخهٔ چندمتغیره شاپیرو-ویلک و اندازهٔ کشیدگی به دست می‌آید. آزمون دیگر، توسط [۸] معرفی شده است که در این آزمون، پس از استانداردسازی تجربی مشاهدات از آماره‌ی شاپیرو-ویلک استفاده می‌شود. با توجه به [۸و۹]، هر کدام از این آزمون‌ها در مقایسه با آزمون‌های MSK [۱] (که ترکیبی از اندازه‌های کشیدگی و چولگی است)، HZ [۴] (که از توان دوم تفاوت بین تابع مشخصهٔ تجربی $Y_i = S^{-\frac{1}{2}}(X_i - \overline{X})$ و تابع مشخصهٔ نرمال چندبعدی، انتگرال وزنی می‌گیرد) و FA [۳]، داده‌های چندبعدی مانند X_i را به داده‌های یک‌بعدی $\theta^{t'} X_i$ تبدیل می‌کند و سپس آمارهٔ شاپیرو-ویلک برای این داده‌های یک بعدی به کار می‌رود)، پرتوان‌تر هستند.

این مقاله به‌شکل زیر مرتب شده است: در بخش ۲ به‌طور خلاصه تعدادی آزمون شناخته‌شده برای بررسی نرمال بودن داده‌ها درحالت یک‌بعدی را معرفی می‌کنیم. در بخش ۳ دو آزمون برای بررسی نرمال بودن داده‌ها درحالت چندبعدی معرفی خواهیم کرد. در بخش ۴ با استفاده از شبیه سازی مونته‌کارلو به مقایسهٔ توان این دو آزمون می‌پردازیم.

۲ آزمون‌های نرمال برای داده‌های یک‌بعدی

۱.۲ آزمون شاپیرو-ویلک

آزمون شاپیرو-ویلک (SW) [۶]، در اصل برای آزمون نرمال یک بعدی طراحی شده است. با توجه به داده‌های یک بعدی

[۱] عضو هیئت علمی گروه آمار، دانشگاه شیراز، ایران
[۲] دانش‌آموختهٔ کارشناسی ارشد آمار، دانشگاه شیراز، ایران

$Z_1,\dots,Z_n$، آمارهٔ sw به‌صورت زیر به دست می‌آید،

$$W_X = \frac{\left[\sum_{i=1}^{n} a_i Z_{(i)}\right]^2}{\sum_{i=1}^{n}(Z_i-\overline{Z})^2}, \qquad (۱)$$

که در آن $Z_{(1)},\cdots,Z_{(n)}$ آماره‌های ترتیبی $Z_1,\cdots,Z_n$، $\overline{Z}$ میانگین نمونه و ثابت a برابر است با

$$a = \frac{V^{-1}m}{\sqrt{m^{t'}V^{-1}V^{-1}m}}.a^{t'}a = 1,$$

که در آن $m=(m_1,\dots,m_n)^{t'}$ و V به‌ترتیب میانگین و کوواریانس آماره‌های ترتیبی، از یک نمونهٔ تصادفی نرمال استاندارد با اندازهٔ n هستند. آمارهٔ آزمون SW را می‌توان به‌صورت نسبت دو برآوردگر واریانس، یعنی بهترین برآوردگر نااریب خطی (BLUE) [۳] و برآوردگر ماکسیمم درست‌نمایی (MLE) [۴] نوشت. این آزمون در سطح مشخص α، فرضیهٔ نرمال بودن را برای $W_X < c_\alpha$ رد می‌کند، که c_α چندک $100\,\alpha$ ام از توزیع W_X، تحت فرض صفر است.

۲.۲ آزمون کشیدگی

کشیدگی برای تشخیص غیر نرمال بودن در حالت یک بعدی پیشنهاد شده است. برای داده‌های عمومی چند بعدی، [۵] آماره‌ای برای اندازه‌گیری کشیدگی ارائه داده است. آمارهٔ کشیدگی MK برابر است با

$$MK = \sqrt{\frac{n}{8(p+2)p}}\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\|Y_i\|^4 - \frac{p(p+2)(n-1)}{n+1}\right\}, \qquad (۲)$$

که در آن برای $i=1,\dots,n$،

$$Y_i = S^{-1/2}(X_i-\overline{X}) \qquad (۳)$$

است. این آزمون، فرض صفر نرمال بودن را اگر $|MK|$ بیش از حد بزرگ باشد، رد می‌کند.

۳ آزمون‌های نرمال بودن برای داده‌های چندبعدی

۱.۳ آمارهٔ آزمون W^*

[۸] یک آزمون نیکویی برازش برای نرمال چند بعدی ارائه داده‌اند. این آزمون بر اساس آمارهٔ شاپیرو-ویلک برای نرمال یک بعدی و روی مشاهدات تجربی استاندارد شده است که مقادیر بحرانی را می‌توان به‌وسیلهٔ تبدیل‌هایی از توزیع نرمال استاندارد یک بعدی تقریب زد.

برای آزمون کردن فرض صفر نرمال بودن، آمارهٔ آزمون زیر را معرفی کردند [۸].

$$W^* = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n} W_{Y_i} \qquad (۴)$$

که در آن W_{Y_i} آمارهٔ شاپیرو-ویلک محاسبه‌شده در iامین مؤلفه از مشاهدات تبدیل‌یافتهٔ $Y_{i1},\cdots,Y_{in}$ در رابطهٔ (۳) است. آزمون W^* در سطح α فرض نرمال بودن را رد می‌کند اگر $W^* < c_{\alpha:n.p}$ باشد.

۲.۳ آمارهٔ آزمون T_n

می‌دانیم که بردار تصادفی Y دارای توزیع نرمال p- بعدی است، اگر هر ترکیب خطی $\Theta^{t'}Y$ توزیع نرمال یک بعدی داشته باشد. بنا بر این اگر برای یک ترکیب خاص، توزیع نرمال نباشد، می‌توان نتیجه گرفت که Y دارای توزیع نرمال چند بعدی نیست. پس برای تشخیص غیرنرمال بودن تصویرهای یک بعدی، از آزمون SW استفاده می‌کنیم. به‌طور خاص، برای داده‌های چند بعدی $X_1,\dots,X_n$، با استفاده از استانداردسازی مورد بحث در رابطهٔ (۳)، $\{Y_i\}_{1\le i\le n}$ را به دست می‌آوریم. آمارهٔ G_n را بر اساس تصویر Y_i در جهت Θ در نظر می‌گیریم.

$$G_n(\Theta) = W_n(\Theta^{t'}Y_1,\dots,\Theta^{t'}Y_n) \qquad (۵)$$

[۹]، آمارهٔ آزمون برای بررسی فرض نرمال بودن داده‌ها را به شکل زیر معرفی کرده‌اند.

$$T_n = 1-(n+p)^{-1}\sum_{\Theta\in\Theta_1\cup\Theta_2} G_n(\Theta)I_A, \qquad (۶)$$

که در آن $G_n(\Theta)$ در رابطهٔ (۵) معرفی شده است. $\Theta\in\Theta_1\cup\Theta_2$ است که $\Theta_1=\left\{\|Y_j\|^{-1}Y_j\right\}_{1\le j\le n}$ و $\Theta_2=\{e_j\}_{1\le j\le p}$ و بردار e_j معرفی‌شده در فضای Θ، به‌شکل بردار $e_j=(0,\dots,0,1,0,\dots,0)^{t'}$ تعریف می‌شود، یعنی بردار واحدی که jامین مؤلفهٔ آن ۱ و بقیه ۰ است. همچنین مؤلفهٔ A در تابع نشانگر I_A به‌شکل زیر تعریف می‌شود.

$$A = \{c_1 \le MK \le c_2\} \qquad (۷)$$

[۳] Best Linear Unbiased Estimator

[۴] Maximum Likelihood Estimator

که c_1 و c_2 درصدهای خاصی از MK، تحت فرض نرمال هستند. از آن‌جا که MK به‌طور تقریبی توزیع نرمال دارد، c_1 و c_2 را چندک‌های ۱ درصدی و ۹۹ درصدی از MK در نظر می‌گیریم.

۴ شبیه‌سازی

در این بخش با استفاده از شبیه‌سازی مونته‌کارلو به مقایسهٔ توان آزمون‌های معرفی‌شده می‌پردازیم. به این منظور، توان آزمون‌های W^* و T_n را با هم مقایسه خواهیم کرد.

مقادیر بحرانی را با استفاده از توزیع تجربی و با روش مونته‌کارلو شبیه‌سازی می‌کنیم. می‌دانیم که تحت فرض $H_\circ$، توزیع آماره‌های آزمون در نظر گرفته‌شده به بردار میانگین و ماتریس کوواریانس بستگی ندارد. بنا بر این می‌توانیم توزیع آنها را به‌طور مستقیم، با فرض بردار میانگین صفر و ماتریس کوواریانس همانی شبیه‌سازی کنیم. $\tilde{F}_m(t)$، تابع توزیع تجربی برای یک نمونهٔ مونته‌کارلو با اندازهٔ m است که m تعداد تکرار در روش مونته‌کارلو است. در این روش مقادیر بحرانی تقریبی به‌عنوان چندک‌های F_m محاسبه می‌شوند و دقت این مقادیر در صورتی که مقدار m بزرگ باشد، بیشتر است. برای به دست آوردن این مقادیر بحرانی تقریبی، F_m، توزیع نرمال استاندارد p متغیره و مقدار $m = ۱۰۰۰$، در نظر گرفته شده است.

نتایج شبیه‌سازی مقادیر بحرانی تجربی در سطح معناداری $\alpha = ۰/۰۵$ در جدول ۱ و همچنین جداول ۳ تا ۶ آمده است. همچنین این نتایج برای اندازه‌های مختلف نمونه در جدول ۲ آمده است.

نتایج مقایسهٔ توان‌ها، برای توزیع‌های مختلف فرض مقابل و زمانی که $n = ۵۰$ باشد، محاسبه شده است. به‌علاوه میانگین توان‌ها در آخر هر جدول آورده شده است که مقادیر بزرگ‌تر نشان دهندهٔ توان بهتر است.

در محاسبهٔ خطاهای نوع اولّ تجربی از مقادیر بحرانی حاصل از ۱۰۰۰ نمونهٔ مونته‌کارلو شبیه‌سازی‌شده، استفاده شده، که نتایج آن در جدول ۱ ارائه شده است.

در جدول ۳، نتایج توان مربوط به داده‌های یک بعدی آمده است. در این مورد، W^* همان آزمون W_n است. در حالت یک بعدی، توان آزمون T_n برای همهٔ جایگزین‌های پیشنهاد شده، نسبت به توان آزمون W_n تفاوت چندانی ندارد. حتی در بعضی از موارد T_n توان بیشتری از W_n دارد. اگرچه میانگین توان T_n به مقدار ناچیزی از W_n کمتر است.

جدول ۱. مقادیر بحرانی و خطاهای نوع اولّ وابسته برای آزمون نرمال بودن p- بعدی با سطح $\alpha = ۰/۰۵$ و $n = ۵۰$

	ناحیه بحرانی		خطای نوع اولّ	
ابعاد	W^*	T_n	W^*	T_n
$p = ۱$	۰/۹۵۵	۰/۰۴۸	۰/۰۵۴	۰/۰۵۱
$p = ۲$	۰/۹۶۱	۰/۰۳۵	۰/۰۴۶	۰/۰۴۶
$p = ۵$	۰/۹۶۷	۰/۰۲۹	۰/۰۵۱	۰/۰۵۱
$p = ۱۰$	۰/۹۶۹	۰/۰۴۲	۰/۰۴۹	۰/۰۴۹

در موارد چند بعدی، توزیع $F_1 \otimes F_2$ نشان‌دهندهٔ توزیع‌هایی با توزیع‌های حاشیه‌ای مستقل F_1 و F_2 است و حاصل‌ضرب k توزیع مستقل F_1 به شکل F_1^k نشان داده می‌شود. جدول ۴ نشان‌دهندهٔ کارایی توان در حالت دو بعدی است و در جداول ۵ و ۶ نتایج آزمون‌های نرمال بودن ۵ بعدی و ۱۰ بعدی ارائه شده است.

با توجه به نتایج، توان آزمون W^* که تعمیمی از آمارهٔ شاپیرو-ویلک است به‌طور قابل ملاحظه‌ای بیشتر از توان آزمون T_n است. بنا بر این با توجه به سادگی آزمون، آزمون W^* ترجیح داده می‌شود.

مثال ۱.۴ (۳). ، داده‌های جالبی از ارتفاع استخوان راموس (به میلی متر) مربوط به پسرهای ۸، ۸/۵، ۹ و ۹/۵ ساله ارائه کرده‌اند. در این مثال به بررسی نرمال بودن داده‌ها در حالت های چند بعدی می‌پردازیم. آزمون نرمال بودن دو بعدی برای ارتفاع‌های به‌دست‌آمده مربوط به سن‌های ۸ و ۹ ساله را در نظر می‌گیریم که p-مقدار یا احتمال رد فرض صفر برای W^* و T_n به‌ترتیب برابر است با ۰/۱۳۶ و ۰/۰۲۰ که آزمون T_n، فرض نرمال بودن را رد می‌کند. حال اگر فرض نرمال بودن را برای این چهار ردهٔ سنی آزمون کنیم، p-مقدار مربوط به آزمون‌ها به‌ترتیب ۰/۰۴۵ و ۰/۰۰۴ می‌شود و هر دو آزمون، فرض نرمال بودن را رد می‌کنند.

جدول ۲. مقادیر بحرانی آزمون نرمال بودن p- بعدی با سطح $\alpha = ۰/۰۵$

اندازهٔ نمونه	$p=۱$	$p=۲$	$p=۵$	$p=۱۰$
W^*				
$n=۲۰$	۰/۹۰۳	۰/۹۱۸	۰/۹۳۲	۰/۹۳۹
$n=۲۵$	۰/۹۲۲	۰/۹۳۱	۰/۹۴۳	۰/۹۴۸
$n=۳۰$	۰/۹۳۳	۰/۹۳۸	۰/۹۴۹	۰/۹۵۴
$n=۳۵$	۰/۹۳۸	۰/۹۴۶	۰/۹۵۵	۰/۹۵۹
$n=۴۰$	۰/۹۴۶	۰/۹۵۱	۰/۹۶۰	۰/۹۶۴
$n=۴۵$	۰/۹۵۰	۰/۹۵۸	۰/۹۶۴	۰/۹۶۷
$n=۵۰$	۰/۹۵۵	۰/۹۶۱	۰/۹۶۷	۰/۹۶۹
T_n				
$n=۲۰$	۰/۰۹۶۸	۰/۰۷۰۹	۰/۰۶۷۱	۰/۰۱۲۲۳
$n=۲۵$	۰/۰۸۵۷	۰/۰۵۹۱	۰/۰۵۴۵	۰/۰۹۲۴
$n=۳۰$	۰/۰۶۷۷	۰/۰۵۱۷	۰/۰۴۶۴	۰/۰۷۴۸
$n=۳۵$	۰/۰۶۳۴	۰/۰۴۵۴	۰/۰۴۱۰	۰/۰۶۱۴
$n=۴۰$	۰/۰۵۷۲	۰/۰۴۱۰	۰/۰۳۵۹	۰/۰۵۳۵
$n=۴۵$	۰/۰۵۵۵	۰/۰۳۶۹	۰/۰۳۲۹	۰/۰۴۶۸
$n=۵۰$	۰/۰۴۷۸	۰/۰۳۵۰	۰/۰۲۹۷	۰/۰۴۱۸

جدول ۳. توان تجربی آزمون‌های مربوط به نرمال بودن یک‌بعدی در سطح معناداری $\alpha = ۰/۰۵$ برای $n = ۵۰$

فرض‌های مقابل	W_n	T_n
$N(۰,۱)$	۰/۰۵۴	۰/۰۵۱
$Exp(۱)$	۱	۱
$Lognormal(۰,۱)$	۱	۱
$Lognormal(۰,۰/۵^۲)$	۰/۴۲	۰/۴۲
$Gamma(۵,۱)$	۰/۵۹	۰/۵۸
$\chi^۲(۱)$	۱	۱
$\chi^۲(۲)$	۱	۱
$\chi^۲(۵)$	۰/۹۰	۰/۸۷
$\chi^۲(۱۰)$	۰/۵۸	۰/۵۸
$Cauchy(۰,۱)$	۱	۱
$t(۲)$	۰/۸۸	۰/۸۴
$t(۵)$	۰/۳۶	۰/۳۸
$Logistic(۰,۱)$	۰/۲۰	۰/۷۱
$Beta(۱,۱)$	۰/۷۶	۰/۸۲
$Beta(۱,۲)$	۰/۸۴	۰/۱۵
$Beta(۲,۲)$	۰/۱۶	۰/۲۱
$Halfnormal$	۰/۹۳	۰/۹۲
$Weibull(۰/۸)$	۱	۱
$Weibull(۱)$	۱	۱
$Weibull(۱/۵)$	۰/۸۸	۰/۸۶
$Average\ power$	۰/۷۶۳۲	۰/۷۵۴۷

جدول ۴. توان تجربی آزمون‌های مربوط به نرمال بودن دوبعدی در سطح معناداری $\alpha = ۰/۰۵$ برای $n = ۵۰$

فرض‌های مقابل	W^*	T_n
$N(۰,۱)^۲$	۰/۰۵۰	۰/۰۴۶
$Exp(۱)^۲$	۱	۱
$Lognormal(۰,۱)^۲$	۱	۱
$Lognormal(۰,۰/۵^۲)^۲$	۰/۶۲	۰/۵۳
$Gamma(۰/۵,۱)^۲$	۱	۱
$Gamma(۵,۱)^۲$	۰/۸۱	۰/۷۱
$\chi^۲(۱)^۲$	۱	۱
$\chi^۲(۲)^۲$	۱	۱
$\chi^۲(۵)^۲$	۰/۹۹	۰/۹۵
$\chi^۲(۱۰)^۲$	۰/۸۱	۰/۷۰
$\chi^۲(۱۵)^۲$	۰/۶۲	۰/۵۱
$Cauchy(۰,۱)^۲$	۱	۱
$t(۲)^۲$	۰/۹۸	۰/۹۷
$t(۵)^۲$	۰/۵۵	۰/۴۹
$Logistic(۰,۱)^۲$	۰/۲۷	۰/۲۵
$Beta(۱,۱)^۲$	۰/۹۴	۰/۵۷
$Beta(۱,۲)^۲$	۰/۹۸	۰/۸۴
$Beta(۲,۲)^۲$	۰/۲۲	۰/۹۰
$Halfnormal^۲$	۰/۹۹	۰/۹۷
$Weibull(۰/۸)^۲$	۱	۱
$Weibull(۱)^۲$	۱	۱
$Weibull(۱/۵)^۲$	۰/۹۹	۰/۹۴
$N(۰,۱) \otimes Exp(۱)$	۰/۹۹	۰/۹۷
$N(۰,۱) \otimes \chi^۲(۵)$	۰/۸۱	۰/۶۸
$N(۰,۱) \otimes t(۵)$	۰/۲۹	۰/۲۵
$N(۰,۱) \otimes Beta(۱,۱)$	۰/۴۸	۰/۲۹
$N(۰,۱) \otimes Beta(۱,۲)$	۰/۶۱	۰/۴۱
$Average\ power$	۰/۸۰۵۸	۰/۷۳۵۴

جدول ۵. توان تجربی آزمون‌های مربوط به نرمال بودن پنج‌بعدی در سطح معناداری $\alpha = ۰/۰۵$ برای $n = ۵۰$

فرض‌های مقابل	W^*	T_n
$N(۰,۱)^{۵}$	۰/۰۵۳	۰/۰۵۱
$Exp(۱)^{۵}$	۱	۱
$Lognormal(۰,۱)^{۵}$	۰/۸۵	۱
$Lognormal(۰,۰/۵^{۲})^{۵}$	۱	۰/۶۸
$Gamma(۰/۵,۱)^{۵}$	۱	۱
$Gamma(۵,۱)^{۵}$	۰/۹۸	۰/۸۴
$\chi^{۲}(۱)^{۵}$	۱	۱
$\chi^{۲}(۲)^{۵}$	۱	۱
$\chi^{۲}(۵)^{۵}$		۰/۹۹
$\chi^{۲}(۱۰)^{۵}$	۰/۹۸	۰/۸۴
$\chi^{۲}(۱۵)^{۵}$	۰/۸۸	۰/۶۵
$Cauchy(۰,۱)^{۵}$	۱	۱
$t(۲)^{۵}$	۱	۱
$t(۵)^{۵}$	۰/۷۷	۰/۷۳
$Logistic(۰,۱)^{۵}$	۰/۴۲	۰/۳۸
$Beta(۱,۱)^{۵}$	۱	۰/۲۹
$Beta(۱,۲)^{۵}$	۱	۰/۶۲
$Beta(۲,۲)^{۵}$	۰/۴۰	۰/۰۴
$Halfnormal^{۵}$	۱	۰/۹۹
$Weibull(۰/۸)^{۵}$	۱	۱
$Weibull(۱)^{۵}$	۱	۱
$Weibull(۱/۵)^{۵}$	۱	۰/۹۸
$N(۰,۱) \otimes Exp(۱)^{۴}$	۱	۱
$N(۰,۱) \otimes \chi^{۲}(۵)^{۴}$	۱	۰/۹۷
$N(۰,۱) \otimes t(۵)^{۴}$	۰/۷۰	۰/۵۸
$N(۰,۱) \otimes Beta(۱,۱)^{۴}$	۰/۹۷	۰/۱۴
$N(۰,۱) \otimes Beta(۱,۲)^{۴}$	۰/۹۹	۰/۵۰
$N(۰,۱)^{۳} \otimes Exp(۱)^{۲}$	۱	۰/۹۸
$N(۰,۱)^{۳} \otimes \chi^{۲}(۵)^{۲}$	۰/۹۴	۰/۷۰
$N(۰,۱)^{۳} \otimes t(۵)^{۲}$	۰/۴۳	۰/۳۴
$N(۰,۱)^{۳} \otimes Beta(۱,۱)^{۲}$	۰/۵۳	۰/۶۰
$N(۰,۱)^{۳} \otimes Beta(۱,۲)^{۲}$	۰/۶۸	۰/۲۲
$Average\ power$	۰/۸۸۷۷	۰/۷۲۶۵

جدول ۶. توان تجربی آزمون‌های مربوط به نرمال بودن ده‌بعدی در سطح معناداری $\alpha = ۰/۰۵$ برای $n = ۵۰$

فرض‌های مقابل	W^*	T_n
$N(۰,۱)^{۱۰}$	۰/۰۴۹	۰/۰۴۹
$Exp(۱)^{۱۰}$	۱	۱
$Lognormal(۰,۱)^{۱۰}$	۱	۱
$Lognormal(۰,۰/۵^۲)^{۱۰}$	۰/۹۶	۰/۷۱
$Gamma(۰/۵,۱)^{۱۰}$	۱	۱
$Gamma(۵,۱)^{۱۰}$	۱	۰/۹۰
$\chi^۲(۲)^{۱۰}$	۱	۱
$\chi^۲(۵)^{۱۰}$	۱	۱
$\chi^۲(۱۰)^{۱۰}$	۱	۰/۸۹
$\chi^۲(۱۵)^{۱۰}$	۰/۹۷	۰/۶۷
$Cauchy(۰,۱)^{۱۰}$	۱	۱
$t(۲)^{۱۰}$	۱	۱
$t(۵)^{۱۰}$	۰/۹۰	۰/۸۴
$Logistic(۰,۱)^{۱۰}$	۰/۵۵	۰/۴۳
$Beta(۱,۱)^{۱۰}$	۱	۰/۵۲
$Beta(۱,۲)^{۱۰}$	۱	۰/۶۳
$Beta(۲,۲)^{۱۰}$	۰/۴۹	۰/۱۴
$Halfnormal^{۱۰}$	۱	۰/۹۹
$Weibull(۰/۸)^{۱۰}$	۱	۱
$Weibull(۱)^{۱۰}$	۱	۱
$Weibull(۱/۵)^{۱۰}$	۱	۰/۹۹
$N(۰,۱)^۹ \otimes Exp(۱)$	۰/۷۸	۰/۴۰
$N(۰,۱)^۹ \otimes \chi^۲(۱)$	۰/۴۵	۰/۱۸
$N(۰,۱)^۹ \otimes t(۱)$	۰/۱۹	۰/۱۰
$N(۰,۱)^۹ \otimes Beta(۱,۱)$	۰/۱۲	۰/۰۳
$N(۰,۱)^۹ \otimes Beta(۱,۲)$	۰/۱۲	۰/۰۷
$N(۰,۱)^۹ \otimes Beta(۲,۲)$	۰/۰۵	۰/۰۵
$N(۰,۱)^۵ \otimes Exp(۱)^۵$	۱	۱
$N(۰,۱)^۵ \otimes \chi^۲(۵)^۵$	۱	۰/۹۰
$N(۰,۱)^۵ \otimes t(۵)^۵$	۰/۶۳	۰/۴۹
$N(۰,۱)^۵ \otimes Beta(۱,۱)^۵$	۰/۷۰	۰/۰۸
$N(۰,۱)^۵ \otimes Beta(۱,۲)^۵$	۰/۷۹	۰/۲۰
$N(۰,۱)^۵ \otimes Beta(۲,۲)^۵$	۰/۱۲	۰/۰۵
$N(۰,۱)^۲ \otimes Exp(۱)^۸$	۱	۱
$N(۰,۱)^۲ \otimes \chi^۲(۵)^۸$	۱	۰/۹۹
$N(۰,۱)^۲ \otimes t(۵)^۸$	۰/۸۴	۰/۷۲
$N(۰,۱)^۲ \otimes Beta(۱,۱)^۸$	۰/۹۹	۰/۳۷
$N(۰,۱)^۲ \otimes Beta(۱,۲)^۸$	۱	۰/۴۰
$N(۰,۱)^۲ \otimes Beta(۲,۲)^۸$	۰/۳۱	۰/۰۸
$Averagepower$	۰/۷۸۸۴	۰/۶۲۶۸

مراجع

[1] Bowman, K. O.and Shenton, L. R. (1975). Omnibus test contours for departures from normality based on $\sqrt{b_1}$ and b_2. *Biometrika*, **62**(**2**), 243-250.

[2] Elston, R. C.and Grizzle, J. E. (1962). Estimation of time-response curves and their confidence bands. *Biometrics*, **18**(**2**), 148-159.

[3] Fattorini, L. (1986). Remarks on the use of Shapiro-Wilk statistic for testing multivariate normality. *Statistica*, **46**(**2**), 209-217.

[4] Henze, N., Zirkler, B. (1990). A class of invariant consistent tests for multivariate normality. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, **19**(**10**), 3595-3617.

[5] Mardia, K. V. (1970). Measures of multivariate skewness and kurtosis with applications. *Biometrika*, **57**(**3**), 519-530.

[6] Shapiro, S. S.and Wilk, M. B. (1965). An analysis of variance test for normality (complete samples). *Biometrika*, **52**(**3/4**), 591-611.

[7] Thode, H. C. (2002). *Testing for normality*, (Vol. 164). CRC press.

[8] Villasenor Alva, J. A., Estrada, E. G. (2009). A generalization of Shapiro–Wilk's test for multivariate normality. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, **38**(**11**), 1870-1883. 1883.

[9] Zhou, M., Shao, Y. (2014). A powerful test for multivariate normality. *Journal of applied statistics*, **41**(**2**), 351-363.