براورد دومرحله‌ای پارامترها با استفاده از تابع مفصل

علی هدایتی[۱]، اسماعیل خرم[۲]، سعید رضاخواه[۳]

تاریخ دریافت: ۱۳۹۵/۳/۲۴
تاریخ پذیرش: ۱۳۹۶/۴/۳۱

چکیده:
براورد درست‌نمایی ماکسیمم در توزیع‌های چندمتغیره، نیازمند بهینه‌سازی با ابعاد زیاد (به تعداد پارامترهای مجهول) است. در این مقاله براورد دومرحله‌ای پارامترها با استفاده از تابع مفصل یادآوری می‌شود. این روش مسئله را به چند بهینه‌سازی کوچک‌تر تقسیم می‌کند و موجب سهولت و صرفه‌جویی در محاسبات می‌گردد. همچنین دو روش برای بررسی سازگاری براوردگرها مطرح می‌شود. از پارتو دومتغیره به‌عنوان مثال استفاده می‌کنیم و دو مجموعه داده (تولید شده و واقعی) نیز برای روشن شدن اهداف، تحلیل می‌شود.
واژه‌های کلیدی: براورد درست‌نمایی ماکسیمم، براورد دومرحله‌ای پارامترها، تابع مفصل، سازگاری براورد، پارتو دومتغیره.

۱ مقدمه

برای به‌دست آوردن براوردگرهای درست‌نمایی ماکسیمم در توزیع‌های چندمتغیره، نیازمند بهینه‌سازی با ابعاد زیاد (به تعداد پارامترهای مجهول) هستیم که حل آن به چند معادله با چند مجهول ختم می‌شود. این معادلات معمولاً فاقد جواب صریح بوده و نیازمند استفاده از روش‌های تکراری (مانند نیوتن- رافسون[۴]) و برنامه‌های کامپیوتری است. اما در توزیع‌های چندمتغیره‌ای که تابع مفصل[۵] آنها موجود است می‌توان مسئله را به دو یا چند بهینه‌سازی کوچک‌تر و ساده‌تر تقسیم کرد و هر بهینه‌سازی را به‌طور جداگانه به دست آورد. بدیهی است که این امر موجب سهولت و صرفه‌جویی در محاسبات می‌گردد. این روش را براورد دومرحله‌ای پارامترها می‌نامند. در بعضی منابع به دلیل استفاده تابع مفصل از توابع حاشیه‌ای آن را توابع استنباط حاشیه‌ها یا به اختصار(IFM[۶]) نیز می‌نامند [۳]. براورد دومرحله‌ای نخستین بار در پایان‌نامه [۱۱] مطرح شد و سپس [۳] تکمیل گردید. [۴] توزیع مجانبی این براوردگرها را نیز به دست آورد که در این جا مورد نظر نمی‌باشد. اکنون با تعریف تابع مفصل بحث را آغاز می‌کنیم.

اگر $X_1,\cdots,X_m$ ، m متغیر تصادفی باشند، تابع توزیع تجمعی توأم آنها را با $F_{X_1,\cdots,X_m}(x_1,\cdots,x_m)$ نشان داده و به‌صورت

$$F_{X_1,\cdots,X_m}(x_1,\cdots,x_m)=P(X_1\leq x_1,\cdots,X_m\leq x_m)$$
$$-\infty<x_1,\cdots,x_m<+\infty$$

تعریف می‌کنند و افزون بر آن تابع چگالی توأم عبارت است از

$$f_{X_1,\cdots,X_m}(x_1,\cdots,x_m)=\frac{\partial^m F_{X_1,\cdots,X_m}(x_1,\cdots,x_m)}{\partial x_1,\cdots,\partial x_m}$$

و همان‌گونه که مشاهده می‌شود با در اختیار داشتن تابع توزیع توأم یا تابع چگالی توأم می‌توان توابع چگالی حاشیه‌ای، توابع توزیع حاشیه‌ای و توابع بقای حاشیه‌ای را به دست آورد، اما عکس آن امکان‌پذیر نیست و با توابع حاشیه‌ای نمی‌توان توزیع توأم را به دست آورد. تابع مفصل برای رفع این مشکل تعریف

[۱] دانش‌آموختهٔ کارشناسی ارشد آمار، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، ایران
[۲] عضو هیئت علمی گروه آمار، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، ایران
[۳] عضو هیئت علمی گروه آمار، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، ایران

[۴] Newton-Raphson
[۵] Copula function
[۶] Inference Functions for Margins

شده است. وقتی که توابع توزیع حاشیه ای پیوسته باشند، بنا به قضیه معروف اسکلار می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} F(x;\alpha_1,\cdots,\alpha_m;\theta) =& C(F_1(x_1;\alpha_1),\cdots,F_m(x_m;\alpha_m);\theta) \\ & -\infty < x_1,\cdots,x_m < +\infty \end{aligned} \tag{1}$$

که در آن C یک خانواده از توابع مفصل با پارامتر θ و $F_1,\cdots,F_m$، توابع توزیع حاشیه‌ای تک متغیره به‌ترتیب با پارامترهای $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ هستند. همچنین $x=(x_1,...,x_m)$ یافته‌های بردار تصادفی $X=(X_1,...,X_m)$ است ($\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ و θ نیز می‌توانند برداری از پارامترها باشند).
با مشتق گیری مرتبه mام، تابع چگالی به‌صورت

$$\begin{aligned} f(x;\alpha_1,\cdots,\alpha_m;\theta) =& c(F_1(x_1;\alpha_1),\cdots,F_m(x_m;\alpha_m);\theta) \\ & \times \Pi_{i=1}^{m} f(x_i;\alpha_i) \\ & -\infty < x_1,\cdots,x_m < +\infty \end{aligned} \tag{2}$$

به‌دست می‌آید. در اینجا $c(.,.)$ تابع چگالی مفصل، $f_1,\cdots,f_m$ توابع چگالی حاشیه‌ای و F_j تابع توزیع به‌ازای چگالی f_j ، $j=1,\cdots,m$ است. یکی از کاربردهای مهم دیگر تابع مفصل، ساختن توزیع‌های توأم با توابع حاشیه‌ای دلخواه است.

مثال ۱.۱. اگر X_1 و X_2 ، دو متغیر تصادفی باشند تابع توزیع تجمعی توأم آنها را با $F_{X_1,X_2}(x_1,x_2)$ نشان داده و به‌صورت

$$F_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2)$$
$$-\infty < x_1, x_2 < +\infty$$

تعریف می‌کنند. تابع مفصل یک تابع منحصر به فرد به‌صورت

$$\begin{aligned} & C:[0,1]\times[0,1]\to[0,1] \\ & F_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = C\{F_{X_1}(x_1),F_{X_2}(x_2);\theta\}, \\ & (x_1,x_2)\in(-\infty,+\infty)\times(-\infty,+\infty) \end{aligned} \tag{3}$$

است. تابع بقای منحصر به فرد مفصل به‌صورت

$$S_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \overline{C}\{S_{X_1}(x_1),S_{X_2}(x_2);\theta\} \tag{4}$$

تعریف می‌شود. S_{X_1} ، S_{X_2} و S_{X_1,X_2} به ترتیب تابع بقای توزیع F_{X_1}، تابع بقای توزیع F_{X_2} و تابع بقای توزیع F_{X_1,X_2} هستند. اکنون با استفاده از رابطه بین توابع بقا و توابع توزیع، تابع بقای مفصل ($\overline{C}$) را بر حسب توابع توزیع به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} & S_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = 1 - F_{X_1}(x_1) - F_{X_2}(x_2) + F_{X_1,X_2}(x_1,x_2) \\ \Rightarrow\ & S_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = 1 - [1 - S_{X_1}(x_1)] - [1 - S_{X_2}(x_2)] \\ & \quad + F_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = S_{X_1}(x_1) \\ & \quad + S_{X_2}(x_2) - 1 + F_{X_1,X_2}(x_1,x_2) \\ \Rightarrow\ & \overline{C}(u,v;\theta) = u + v - 1 + C(1-u,1-v;\theta) \end{aligned} \tag{5}$$

در این مقاله ضمن مرور براورد دومرحله‌ای و ویژگی‌های آن، دو روش برای بررسی سازگاری براورد، دو آزمون فرض و چندین مثال نیز مطرح می‌کنیم، ساختار این مقاله به شرح زیر است.

در فصل دوم روش براورد دومرحله‌ای مطرح می‌شود. در فصل سوم این روش را برای براورد پارامترهای پارتو دومتغیره سانکاران- نائیر به‌کار برده و آن را با روش درست‌نمایی ماکسیمم مقایسه می‌کنیم. در فصل چهارم با دو مجموعه داده (تولید شده و واقعی) اهداف این روش را تحلیل کرده و سرانجام با نتیجه‌گیری در فصل پنجم مقاله را به پایان می‌بریم.

۲ براورد دومرحله‌ای پارامترها با استفاده از تابع مفصل

فرض کنید $\{(x_{1i},\cdots,x_{mi}); i=1,\cdots,n\}$ مشاهدات یک نمونهٔ تصادفی به اندازهٔ n از توزیع $F_{X_1,\cdots,X_m}(x_1,\cdots,x_m)$ با پارامترهای α_m ،$\cdots$، α_1 و θ باشد آن‌گاه تابع درست‌نمایی و لگاریتم تابع درست‌نمایی به‌صورت

$$L(\cdots) = \Pi_{i=1}^{n} f_{X_1,\cdots,X_m}(x_1,\cdots,x_m) \tag{6}$$

$$\ln L(\cdots) = \sum_{i=1}^{n} \ln f_{X_1,\cdots,X_m}(x_1,\cdots,x_m) \tag{7}$$

خواهد بود. برای به‌دست آوردن براوردهای درست‌نمایی ماکسیمم پارامترهای مجهول، باید تابع بالا را نسبت به پارامترهای

α_m ،$\cdots$ ،α_1 و θ ماکسیمم کرد. یعنی

$$(\partial L/\partial\alpha_1, \cdots, \partial L/\partial\alpha_m, \partial L/\partial\theta) = 0 \qquad (8)$$

پس با یک مسئله بهینه‌سازی دشوار با $m+1$ بعد روبرو هستیم که معمولاً جواب صریح نداشته و نیازمند روش‌های تکراری و برنامه‌های کامپیوتری است.

اما در روش دومرحله‌ای، برای توزیع‌هایی که تابع مفصل آنها موجود است تابع درست‌نمایی ماکسیمم با استفاده از (؟؟) به‌صورت

$$\begin{aligned} L(\cdots) &= \prod_{i=1}^{n} f_{X_1,\cdots,X_m}(x_{1i},\cdots,x_{mi}) \qquad (9)\\ &= \prod_{i=1}^{n} c(F_{X_1}(x_{1i};\alpha_1),\cdots,F_{X_m}(x_{mi};\alpha_m);\theta)\\ &\times \prod_{i=1}^{n} f_{X_1}(x_{1i};\alpha_1)\times\cdots\times\prod_{i=1}^{n} f_{X_m}(x_{mi};\alpha_m) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ln L(\cdots) &= \sum_{i=1}^{n}\ln c(F_{X_1}(x_{1i};\alpha_1),\cdots,F_{X_m}(x_{mi};\alpha_m);\theta) \qquad (10)\\ &+ \sum_{i=1}^{n}\ln f_{X_1}(x_{1i};\alpha_1)+\cdots+\sum_{i=1}^{n}\ln f_{X_m}(x_{mi};\alpha_m) \end{aligned}$$

خواهد بود. نخست رابطه زیر را ماکسیمم می‌کنیم

$$g(\cdots) = \sum_{i=1}^{n}\ln f_{X_1}(x_{1i};\alpha_1)+\cdots+\sum_{i=1}^{n}\ln f_{X_m}(x_{mi};\alpha_m) \qquad (11)$$

برای این‌کار پارامترهای حاشیه‌ای تک‌تک متغیرهای تصادفی را با استفاده از تابع درست‌نمایی‌شان براورد می‌کنیم

$$\begin{aligned} L_j(\alpha_j) &= \Pi_{i=1}^{n} f_j(X_{ij};\alpha_j)\\ \ln L_j(\alpha_j) &= \sum_{i=1}^{n}\ln f_j(X_{ij};\alpha_j) \qquad (12) \end{aligned}$$

$$\partial \ln L_j(\alpha_j)/\partial\alpha_j = 0 \qquad (13)$$

آن‌گاه در مرحله دوم برای براورد θ، تابع زیر را نسبت به θ ماکسیمم می‌کنیم

$$h(\theta) = \sum_{i=1}^{n}\ln c(F_{X_1}(x_{1i};\widehat{\alpha_1}),\cdots,F_{X_m}(x_{mi};\widehat{\alpha_m});\theta) \qquad (14)$$

به‌عبارت بهتر بهینه‌سازی به $m+1$ بهینه‌سازی مجزا و ساده تبدیل می‌شود یعنی

$$(\partial L_1/\partial\alpha_1, \cdots, \partial L_m/\partial\alpha_m, \partial L/\partial\theta) = 0 \qquad (15)$$

برای مشاهده اثبات و توضیحات بیشتر به [۳] مراجعه شود.

مثال ۱.۲. اگر X_1 و X_2 دو متغیر تصادفی با تابع توزیع تجمعی $F_{X_1,X_2}(x_1,x_2)$ و $\{(x_{1i},x_{2i}); i=1,\cdots,n\}$ یک نمونهٔ تصادفی به اندازهٔ n از این توزیع باشد آن‌گاه تابع درست‌نمایی و لگاریتم تابع درست‌نمایی به‌صورت

$$L(\alpha_1,\alpha_2,\theta) = \Pi_{i=1}^{n} f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) \qquad (16)$$

$$\ln L(\alpha_1,\alpha_2,\theta) = \sum_{i=1}^{n}\ln f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) \qquad (17)$$

خواهد بود. برای به دست آوردن براوردهای درست‌نمایی ماکسیمم پارامترهای مجهول باید تابع بالا را نسبت به پارامترهای α_1، α_2 و θ ماکسیمم کرد، یعنی یک بهینه‌سازی سه‌بعدی و حل سه معادله سه مجهول.

روش دیگر، استفاده از براورد دومرحله‌ای است. در این روش در مرحله اول براوردهای درست‌نمایی ماکسیمم را برای پارامترهای حاشیه‌ای انجام می‌دهند و سپس پارامتر وابسته را براورد می‌کنند. رابطه بین تابع توزیع توأم و تابع توزیع مفصل به‌صورت

$$\begin{aligned} F_{X_1,X_2}(x_1,x_2) &= C\{F_{X_1}(x_1),F_{X_2}(x_2);\theta\},\\ (x_1,x_2) &\in (-\infty,+\infty)\times(-\infty,+\infty) \end{aligned} \qquad (18)$$

است. حال اگر از دو طرف یکبار نسبت به x_1 و یکبار نسبت به x_2 مشتق بگیریم رابطه بین تابع چگالی مفصل و توابع چگالی حاشیه‌ای به‌دست می‌آید.

$$\begin{aligned} f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) &= c(F_{X_1}(x_1;\alpha_1),F_{X_2}(x_2;\alpha_2);\theta)\\ &\times f_{X_1}(x_1;\alpha_1)f_{X_2}(x_2;\alpha_2) \end{aligned} \qquad (19)$$

که در اینجا $c(.,.)$ تابع چگالی مفصل است. با استفاده از (؟؟) تابع درست‌نمایی ماکسیمم به‌صورت

$$\begin{aligned} L(\alpha_1,\alpha_2,\theta) &= \prod_{i=1}^{n} f_{X_1,X_2}(x_{1i},x_{2i})\\ &= \prod_{i=1}^{n} c(F_{X_1}(x_{1i};\alpha_1),F_{X_2}(x_{2i};\alpha_2);\theta)\\ &\times \prod_{i=1}^{n} f_{X_1}(x_{1i};\alpha_1)\times\prod_{i=1}^{n} f_{X_2}(x_{2i};\alpha_2) \end{aligned} \qquad (20)$$

در خواهد آمد. که اگر از دو طرف لگاریتم بگیریم خواهیم داشت

$$\ln L(\alpha_1,\alpha_2,\theta)=\sum_{i=1}^{n}\ln c(F_{X_1}(x_{1i};\alpha_1),F_{X_2}(x_{2i};\alpha_2);\theta) + \sum_{i=1}^{n}\ln f_{X_1}(x_{1i};\alpha_1)+\sum_{i=1}^{n}\ln f_{X_2}(x_{2i};\alpha_2) \qquad (21)$$

در روش دومرحله‌ای نخست رابطه

$$g(\alpha_1,\alpha_2)=\sum_{i=1}^{n}\ln f_{X_1}(x_{1i};\alpha_1)+\sum_{i=1}^{n}\ln f_{X_2}(x_{2i};\alpha_2) \qquad (22)$$

ماکسیمم می‌کنیم. آنگاه در مرحله دوم برای براورد θ، تابع زیر را نسبت به θ ماکسیمم می‌کنیم

$$h(\theta)=\sum_{i=1}^{n}\ln c(F_{X_1}(x_{1i};\widehat{\alpha_1}),(F_{X_2}(x_{2i};\widehat{\alpha_2});\theta) \qquad (23)$$

همان‌گونه که ملاحظه شد بهینه‌سازی سه‌بعدی به سه بهینه‌سازی یک‌بعدی تبدیل گردید که با کاهش چشمگیر محاسبات همراه است.

۱.۲ سازگاری براورد [7]

برای اطمینان از این‌که مدل چندمتغیرهٔ بنا شده بر تابع مفصل (؟؟) برازش مناسبی برای داده‌ها است، راه‌های گوناگونی وجود دارد. یکی از این راه‌ها مقایسه توابع حاشیه‌ای مرتبه بالاتر با توابع حاشیه‌ای مرتبه پایین‌تر می‌باشد که آن‌را سازگاری براورد می‌نامند. نکته جالب در این روش استفاده از براورد پارامتر مجهول در بررسی نیکویی برازش است، به‌عبارت دیگر با استفاده از یک مجموعه دادهٔ m متغیره، θ را بارها به‌طور مجزا در حالت‌های $2,\cdots,m$ متغیره براورد می‌کنیم اگر این براوردها اختلاف معناداری با هم نداشته باشند آنگاه مدل ما برازش مناسبی برای داده‌های ماست یعنی اگر

$$F(X;\alpha_1,\cdots,\alpha_m;\theta)=C(F_1(X_1;\alpha_1),\cdots,F_m(X_m;\alpha_m);\theta)$$
$$-\infty<x_1,\cdots,x_m<+\infty$$

یک خانواده از توزیع m متغیره با توابع حاشیه‌ای $F_S(X_S;\alpha_j,j\in S;\theta_S)$ ، $|S|\geq 2$ ، $S\in S_m$، θ پارامتر چندمتغیره و α_j پارامتر حاشیه‌ای برای jامین تابع توزیع یک‌متغیره باشد، آنگاه $\hat{\theta}$ براورد منحصر به فردی برای θ در حالت S خواهد بود. همچنین فرض کنیم S_1 و S_2 دو زیرمجموعه S باشند، $S_1\subset S_2$ و $S_1\geq 2$ آنگاه $\theta_{S_1}=a(\theta_{S_2})$ برای تابع a می‌باشد. اگر $Y_i: i=1,\cdots,n$ها داده‌های ما باشند و پارامترهای تک متغیره را نیز معلوم فرض کنیم (یا آنها را به‌صورت مجزا براورد می‌کنیم) و برای $K=1,2$، $\hat{\theta}_{S_K}$ یک براورد به روش دومرحله‌ای بر اساس داده‌های $Y_{i,S_K}=(Y_{ij};j\in S_K),i=1,\cdots,n$ باشد، آن‌گاه در حالت کلّی نزدیکی $\hat{\theta}_{S_1}$ و $a(\hat{\theta}_{S_2})$ برای تمام S_1 و S_2ها($S_1\subset S_2$) یک شرط لازم و نه کافی برای نیکویی برازش است. مجموع توان دوم خطا (SE) برای $\hat{\theta}_{S_1}-a(\hat{\theta}_{S_2})$ را به‌صورت بهینه‌یابی‌های جداگانه و یا با استفاده از روش جک‌نایف[8] می‌توان به‌دست آورد.

روش دیگر برای اطمینان از نیکویی برازش استفاده از براورد فاصله‌ای است. با استفاده از نسبت درست‌نمایی ثابت می‌شود که با شرایط بالا رابطه

$$\{\theta: 2[L(\tilde{\theta}_{S_1};S_1)-L(\theta;S_1)]\geq\chi^2_{p_{S_1},1-\alpha}\} \qquad (24)$$

برقرار است. که در آن $\chi^2_{p_{S_1},1-\alpha}$ توزیع خی‌دو با p_S درجه آزادی است، p_S بعد بردار θ_S و $L(.;S_1)$ لگاریتم تابع درست‌نمایی برای تابع چگالی توزیع $F(X_{S_1};\alpha_j,j\in S_1;\theta_{S_1})$ است. [۳] چندین مثال برای این دو روش حتی برای متغیرهای گسسته ذکر شده است و روش‌های دیگری نیز برای ارزیابی نیکویی برازش مطرح گردیده است.

۳ کاربرد براورد دومرحله‌ای پارامترها (توزیع دومتغیره پارتو)

[۶] پارتو دومتغیره جدیدی را که تابع بقای آن به‌صورت

$$P(X_1>x_1,X_2>x_2)=(1+\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)^{-\alpha_3} \qquad (25)$$
$$x_1>0,x_2>0,\alpha_1>0,\alpha_2>0,\alpha_3>0$$

[7] Estimation consistency

[8] Jackknife method

می‌باشد معرفی کردند. توابع توزیع و چگالی حاشیه‌ای متغیرهای تصادفی X_1 و X_2 به‌صورت

$$f_{X_1}(x_1)=\frac{\alpha_1\alpha_3}{(1+\alpha_1x_1)^{\alpha_3+1}}, f_{X_2}(x_2)=\frac{\alpha_2\alpha_3}{(1+\alpha_2x_2)^{\alpha_3+1}}$$

به‌دست می‌آید و نیز

$$\begin{aligned} P(X_1\le x_1)&=1-(1+\alpha_1x_1)^{-\alpha_3}\\ P(X_2\le x_2)&=1-(1+\alpha_2x_2)^{-\alpha_3} \qquad (۲۶)\end{aligned}$$

از این به بعد این توزیع را پارتو دومتغیره لیندلی- سینگ پوروالا می‌نامیم و آن را به اختصار با $LSBP(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ نشان می‌دهیم. [۸] با تعمیم آن، توزیع پارتو دومتغیره‌ای با تابع بقای

$$\begin{aligned} S_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=&P(X_1>x_1,X_2>x_2)\\ =&(1+\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\theta x_1x_2)^{-\alpha_3}\\ &x_1>0,x_2>0,\alpha_1>0,\alpha_2>0,\alpha_3>0,\\ &0\le\theta\le(\alpha_3+1)\alpha_1\alpha_2 \qquad (۲۷)\end{aligned}$$

معرفی کردند. از این به بعد این توزیع را پارتو دومتغیره سانکاران- نائیر نامیده و با $SNBP(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\theta)$ نشان می‌دهیم. آشکار است که توزیع $LSBP$ یک حالت خاص از توزیع $SNBP$ است. اکنون با مرور مقاله [۹] از این توزیع به‌عنوان مثال استفاده می‌کنیم.

اگر X_1 و X_2 دارای توزیع $SNBP(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\theta)$ با تابع بقای (؟؟) باشند آنگاه تابع چگالی توام آنها برای $X_1>0$ و $X_2>0$ به‌صورت

(۲۸)
$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=\frac{\alpha_3[\alpha_3(\alpha_1+\theta x_2)(\alpha_2+\theta x_1)+\alpha_1\alpha_2-\theta]}{[1+\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\theta x_1x_2]^{\alpha_3+2}}$$

خواهد بود. با همان محدودیت‌های پارامترها.

با انتگرال‌گیری از تابع چگالی توام نسبت به X_2، تابع چگالی حاشیه‌ای X_1 و با انتگرال‌گیری نسبت به X_1، تابع چگالی حاشیه‌ای X_2 به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} f_{X_1}(x_1)=&\frac{\alpha_1\alpha_3}{[1+\alpha_1x_1]^{\alpha_3+1}},\\ P(X_1\ge x_1)=&(1+\alpha_1x_1)^{-\alpha_3};\quad x_1>0\\ f_{X_2}(x_2)=&\frac{\alpha_2\alpha_3}{[1+\alpha_2x_2]^{\alpha_3+1}},\\ P(X_2\ge x_2)=&(1+\alpha_2x_2)^{-\alpha_3};\quad x_2>0 \qquad (۲۹)\end{aligned}$$

بنابراین توابع حاشیه‌ای مدل $SNBP$ با توابع حاشیه‌ای مدل $LSBP$ یکی هستند، با پارامترهای مقیاسی α_1,α_2 و θ و پارامتر شکلّی α_3.

آشکار است که اگر $\theta=\alpha_1\alpha_2$ باشد تابع چگالی توام به‌صورت

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2) \qquad (۳۰)$$

درخواهد آمد و این شرط استقلال X_1 و X_2 است.

تابع چگالی شرطی $X_1|X_2=x_2$ را می‌توان به‌صورت

$$\begin{aligned} f_{X_1|X_2=x_2}(x)=&\frac{f_{X_1,X_2}(x,x_2)}{f_{X_2}(x_2)}\\ =&\frac{(1+\alpha_2x_2)^{\alpha_3+1}}{\alpha_2\alpha_3}\\ &\times\frac{\alpha_3(\alpha_1+\theta x_2)(\alpha_2+\theta x)+\alpha_1\alpha_2-\theta}{(1+\alpha_1x+\alpha_2x_2+\theta x_2)^{\alpha_3+2}}\\ =&pf_U(x;\beta,\alpha_3+1)\\ &+(1-p)f_V(x,\beta,\alpha_3+1);\ 0<p<1\end{aligned}$$
(۳۱)

نوشت که U و V به ترتیب متغیرهای تصادفی با توزیع پارتو و توزیع پارتو اریب- طول هستند.

$$\begin{aligned} f_U(x;\beta,\alpha_3+1)&=\frac{\beta(\alpha_3+1)}{(1+\beta x)^{\alpha_3+2}}\quad x>0\\ f_V(x;\beta,\alpha_3+1)&=\frac{\beta^2\alpha_3(\alpha_3+1)x}{(1+\beta x)^{\alpha_3+2}}\end{aligned}$$

همچنین

$$\begin{aligned} p&=\frac{\alpha_3\theta\alpha_2x_2+\alpha_1\alpha_2(1+\alpha_3)-\theta}{\alpha_2(1+\alpha_3)(\alpha_1+\theta x_2)}\\ \beta&=\frac{\alpha_1+\theta x_2}{1+\alpha_2x_2}\end{aligned}$$

برای تولید متغیر تصادفی با توزیع پارتو (U) از روش تبدیل معکوس استفاده می‌کنیم زیرا تابع توزیع آن معکوس پذیر است

و برای تولید متغیر تصادفی با توزیع پارتو اریب- طول (V) از روش قبول- رد استفاده می‌کنیم زیرا

$$f_V(x;\beta,\alpha_3+1) = \frac{\beta^2\alpha_3(\alpha_3+1)x}{(1+\beta x)^{\alpha_3+2}} = (\alpha_3+1)\times\frac{\beta x}{1+\beta x}\times\frac{\beta\alpha_3}{(1+\beta x)^{\alpha_3+1}} \le (\alpha_3+1)f_U(x;\beta,\alpha_3)$$

با ترکیب دو روش فوق[1] به‌راحتی می‌توان داده‌هایی با توزیع پارتو دومتغیره سانکاران- نائیر تولید کرد.
اکنون تابع بقای مفصل

$$\overline{C}(u,v) = [u^{-\frac{1}{\alpha_3}} + v^{-\frac{1}{\alpha_3}} - 1 + \delta(u^{-\frac{1}{\alpha_3}}-1)(v^{-\frac{1}{\alpha_3}}-1)]^{-\alpha_3}$$
$$0 \le \delta \le (1+\alpha_3), \alpha_3 > 0 \qquad (32)$$

تعریف می‌کنیم. اگر

$$u = S_{X_1}(x_1) = (1+\alpha_1 x_1)^{-\alpha_3}, x_1 > 0$$
$$v = S_{X_2}(x_2) = (1+\alpha_2 x_2)^{-\alpha_3}, x_2 > 0$$

باشد آن‌گاه تابع بقای توأم آن به‌صورت

$$S_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = [1+\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \delta(\alpha_1 x_1)(\alpha_2 x_2)]^{-\alpha_3}$$

در می‌آید. آشکار است که اگر $\theta = \delta\alpha_1\alpha_2$ باشد همان تعریف تابع بقای مدل $SNBP$ خواهد شد.
با استفاده از (؟؟) و تابع بقای توام مفصل توزیع $SNBP(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\theta)$ و مشتق‌گیری نسبت به u و v خواهیم داشت

$$c(u,v) = [g_1(u,v;\alpha_3,\theta)\times g_2(u,v;\alpha_3,\theta) - g_3(u,v;\alpha_3,\theta)] \times \frac{1}{\alpha_3^2}(1-u)^{-\frac{1}{\alpha_3}-1}(1-v)^{-\frac{1}{\alpha_3}-1} \qquad (33)$$

$$g_1(u,v;\alpha_3,\theta) = \delta\alpha_3\{(1+u)^{-\frac{1}{\alpha_3}} + (1-v)^{-\frac{1}{\alpha_3}} - 1 + \delta[(1-u)^{-\frac{1}{\alpha_3}}-1][(1-v)^{-\frac{1}{\alpha_3}} - 1]\}^{-(\alpha_3+2)} \qquad (34)$$

$$g_2(u,v;\alpha_3,\theta) = \{1+\delta[(1-u)^{-\frac{1}{\alpha_3}}-1]\}\{1 + \delta[(1-v)^{-\frac{1}{\alpha_3}}-1]\} \qquad (35)$$

$$g_3(u,v;\alpha_3,\theta) = \delta\alpha_3\{(1+u)^{-\frac{1}{\alpha_3}} + (1-v)^{-\frac{1}{\alpha_3}} - 1 + \delta[(1-u)^{-\frac{1}{\alpha_3}}-1] [(1-v)^{-\frac{1}{\alpha_3}}-1]\}^{-(\alpha_3+1)} \qquad (36)$$

که در آن برای سادگی $\delta = \frac{\theta}{\alpha_1\alpha_2}$ تعریف شده است.
اکنون با توجه به مطالب بالا براوردهای درست‌نمایی ماکسیمم ($MLEs$) را برای توزیع $SNBP(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\theta)$ وقتی همه پارامترها ناشناخته‌اند، به دست می‌آوریم.
فرض کنید $\{(x_{1i},x_{2i}); i=1,\cdots,n\}$ یک نمونهٔ تصادفی به اندازهٔ n از توزیع $SNBP(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\theta)$ باشد آن‌گاه تابع درست‌نمایی و لگاریتم تابع درست‌نمایی به‌صورت

$$L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\theta) = \Pi_{i=1}^n f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)$$
$$= \frac{\alpha_3^n \Pi_{i=1}^n[\alpha_3(\alpha_1+\theta x_{2i})(\alpha_2+\theta x_{1i}) + \alpha_1\alpha_2 - \theta]}{\Pi_{i=1}^n[1+\alpha_1 x_{1i} + \alpha_2 x_{2i} + \theta x_{1i}x_{2i}]^{\alpha_3+2}} \qquad (37)$$

$$\ln L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\theta) = n\ln\alpha_3 + \sum_{i=1}^n \ln[\alpha_3(\alpha_1+\theta x_{2i})(\alpha_2+\theta x_{1i}) + \alpha_1\alpha_2 - \theta] - (\alpha_3+2)\sum_{i=1}^n \ln(1+\alpha_1 x_{1i}+\alpha_2 x_{2i} + \theta x_{1i}x_{2i})$$
$$\alpha_1>0, \alpha_2>0, \alpha_3>0, 0\le\theta\le(\alpha_3+1)\alpha_1\alpha_2 \qquad (38)$$

خواهد بود. برای به دست آوردن براوردهای درست‌نمایی ماکسیمم پارامترهای مجهول باید تابع بالا را نسبت به پارامترهای α_1، α_2، α_3 و θ ماکسیمم کرد. یعنی

$$\frac{\partial L(\theta,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}{\partial\alpha_3} = \frac{n}{\alpha_3} + \sum_{i=1}^n \frac{(\alpha_1+\theta x_{2i})(\alpha_2+\theta x_{1i})}{\alpha_3(\alpha_1+\theta x_{2i})(\alpha_2+\theta x_{1i}) + \alpha_1\alpha_2 - \theta} - \sum_{i=1}^n \ln(1+\alpha_1 x_{1i} + \alpha_2 x_{2i} + \theta x_{1i}x_{2i}) = 0 \qquad (39)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial L(\theta,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}{\partial \theta} &= \\ \sum_{i=1}^{n} &\frac{\alpha_2\alpha_3 x_{2i}+\alpha_1\alpha_3 x_{1i}+2\theta\alpha_3 x_{1i}x_{2i}-1}{\alpha_3(\alpha_1+\theta x_{2i})(\alpha_2+\theta x_{1i})+\alpha_1\alpha_2-\theta}- \\ (\alpha_3+2)&\sum_{i=1}^{n}\frac{x_{1i}x_{2i}}{1+\alpha_1 x_{1i}+\alpha_2 x_{2i}+\theta x_{1i}x_{2i}}=0\end{aligned} \quad (۴۰)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial L(\theta,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}{\partial \alpha_1} &= \\ \sum_{i=1}^{n} &\frac{\alpha_3\alpha_2+\alpha_3\theta x_{1i}+\alpha_2}{\alpha_3(\alpha_1+\theta x_{2i})(\alpha_2+\theta x_{1i})+\alpha_1\alpha_2-\theta}- \\ (\alpha_3+2)&\sum_{i=1}^{n}\frac{x_{1i}}{1+\alpha_1 x_{1i}+\alpha_2 x_{2i}+\theta x_{1i}x_{2i}}=0\end{aligned} \quad (۴۱)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial L(\theta,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}{\partial \alpha_2} &= \\ \sum_{i=1}^{n} &\frac{\alpha_3\alpha_1+\alpha_3\alpha . x_{2i}+\alpha_1}{\alpha_3(\alpha_1+\theta x_{2i})(\alpha_2+\theta x_{1i})+\alpha_1\alpha_2-\theta}- \\ (\alpha_3+2)&\sum_{i=1}^{n}\frac{x_{2i}}{1+\alpha_1 x_{1i}+\alpha_2 x_{2i}+\theta x_{1i}x_{2i}}=0\end{aligned} \quad (۴۲)$$

همان‌گونه که مشاهده می‌شود به چهار معادله، چهار مجهول رسیدیم که فاقد جواب صریح است و نیازمند روش‌های تکراری و نرم‌افزارهای کامپیوتری است. یکی از این روش‌ها، نیوتن-رافسون می‌باشد.

اما در روش دو مرحله‌ای و با استفاده از مثال ۱.۲ تابع درست‌نمایی ماکسیمم به‌صورت

$$\begin{aligned}L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\theta) &= \prod_{i=1}^{n} f_{X_1,X_2}(x_{1i},x_{2i}) \\ &= \prod_{i=1}^{n} c(F_{X_1}(x_{1i};\alpha_1,\alpha_3),F_{X_2}(x_{2i};\alpha_2,\alpha_3);\theta) \\ &\quad \times \prod_{i=1}^{n} f_{X_1}(x_{1i};\alpha_1,\alpha_3)\times\prod_{i=1}^{n} f_{X_2}(x_{2i};\alpha_2,\alpha_3)\end{aligned} \quad (۴۳)$$

است که اگر از دو طرف لگاریتم بگیریم به‌صورت

$$\begin{aligned}\ln L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\theta) &= \sum_{i=1}^{n}\ln c(F_{X_1}(x_{1i};\alpha_1,\alpha_3), \\ &\quad F_{X_2}(x_{2i};\alpha_2,\alpha_3);\theta)+\sum_{i=1}^{n}\ln f_{X_1}(x_{1i};\alpha_1,\alpha_3) \\ &\quad +\sum_{i=1}^{n}\ln f_{X_2}(x_{2i};\alpha_2,\alpha_3)\end{aligned} \quad (۴۴)$$

در خواهد آمد. نخست رابطه زیر را ماکسیمم می‌کنیم

$$\begin{aligned}g(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) &= \sum_{i=1}^{n}\ln f_{X_1}(x_{1i};\alpha_1,\alpha_3) \\ &\quad +\sum_{i=1}^{n}\ln f_{X_2}(x_{2i};\alpha_2,\alpha_3) \\ &= n\ln\alpha_1\alpha_3-(\alpha_3+1)\sum_{i=1}^{n}\ln(1+\alpha_1 x_{1i}) \\ &\quad + n\ln\alpha_2\alpha_3-(\alpha_3+1)\sum_{i=1}^{n}\ln(1+\alpha_2 x_{2i}) \\ &= n(\ln\alpha_1+\ln\alpha_2)+2n\ln\alpha_3 \\ &\quad -(\alpha_3+1)\sum_{i=1}^{n}[\ln(1+\alpha_1 x_{1i})+\ln(1+\alpha_2 x_{2i})]\end{aligned} \quad (۴۵)$$

برای یافتن براورد α_3 نسبت به آن مشتق گرفته مساوی صفر قرار می‌دهیم

$$\frac{\partial g(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}{\partial\alpha_3}=\frac{2n}{\alpha_3}-\sum_{i=1}^{n}[\ln(1+\alpha_1 x_{1i})+\ln(1+\alpha_2 x_{2i})]=0 \quad (۴۶)$$

پس با ثابت فرض کردن α_1 و α_2 تابع $g(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ ماکسیمم می‌شود اگر

$$\widehat{\alpha_3}(\alpha_1\alpha_2)=\frac{2n}{\sum_{i=1}^{n}[\ln(1+\alpha_1 x_{1i})+\ln(1+\alpha_2 x_{2i})]} \quad (۴۷)$$

بنابراین $\widehat{\alpha_1}$ و $\widehat{\alpha_2}$ با ماکسیمم کردن $g(\alpha_1,\alpha_2,\widehat{\alpha_3}(\alpha_1,\alpha_2))$ نسبت به α_1 و α_2 به دست می‌آید که یک مسئله بهینه‌سازی دوبعدی به‌صورت

$$\begin{aligned}\frac{\partial g(\alpha_1,\alpha_2)}{\partial\alpha_1} &= \frac{n}{\alpha_1}-(\alpha_3+1)\times\sum_{i=1}^{n}\frac{x_{1i}}{1+\alpha_1 x_{1i}}=\frac{n}{\alpha_1} \\ &\quad -\left(\frac{2n}{\sum_{i=1}^{n}[\ln(1+\alpha_1 x_{1i})+\ln(1+\alpha_2 x_{2i})]}+1\right) \\ &\quad \times\sum_{i=1}^{n}\frac{x_{1i}}{1+\alpha_1 x_{1i}}=0\end{aligned} \quad (۴۸)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial g(\alpha_1,\alpha_2)}{\partial\alpha_2} &= \frac{n}{\alpha_2}-(\alpha_3+1)\times\sum_{i=1}^{n}\frac{x_{2i}}{1+\alpha_2 x_{2i}}=\frac{n}{\alpha_2} \\ &\quad -\left(\frac{2n}{\sum_{i=1}^{n}[\ln(1+\alpha_1 x_{1i})+\ln(1+\alpha_2 x_{2i})]}+1\right) \\ &\quad \times\sum_{i=1}^{n}\frac{x_{2i}}{1+\alpha_2 x_{2i}}=0\end{aligned} \quad (۴۹)$$

است. اگر $\widehat{\alpha_1}$، $\widehat{\alpha_2}$ و $\widehat{\alpha_3}$ تابع $g(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ را ماکسیمم کنند، آن‌گاه در مرحله دوم برای براورد θ تابع زیر را نسبت به θ

ماکسیمم می‌کنیم.

$$h(\theta)=\sum_{i=1}^{n}[\ln c(F_{X_1}(x_{1i};\widehat{\alpha_1},\widehat{\alpha_3}),(F_{X_2}(x_{2i};\widehat{\alpha_2},\widehat{\alpha_3});\theta) \quad (50)$$

همان‌گونه که ملاحظه شد حتی هنگامی که چهار پارامتر مجهول هستند بهینه‌سازی چهاربعدی در حالت قبلی به یک بهینه‌سازی دوبعدی و یک بهینه‌سازی یک‌بعدی تبدیل گردید که با کاهش چشمگیر محاسبات همراه است.

۱.۳ آزمون فرض

در این زیربخش دو آزمون فرض ارائه می‌شود.
آزمون اول: آزمون استقلال متغیر X_1 از متغیر X_2، که آن را با توجه به (؟؟) می‌توانیم به‌صورت زیر مطرح کنیم.

$$H_0:\theta=\alpha_1\alpha_2 \quad V.S. \quad H_1:\theta\neq\alpha_1\alpha_2 \quad (51)$$

می‌دانیم که اگر آزمون به‌صورت

$$\begin{cases} H_0:\theta\in A_0 \\ H_1:\theta\in A_1 \end{cases}$$

و A کل فضای پارامتر باشد، آن‌گاه نسبت درست‌نمایی به‌صورت زیر است که معمولاً برای تعیین ناحیه بحرانی به‌کار می‌رود.

$$L=\frac{Max_{\theta\in A_0}L(\theta)}{Max_{\theta\in A}L(\theta)}<K<1$$

توزیع L را در حالت کلّی نمی‌توان به‌کمک $f(x;\theta)$ پیدا کرد، در عمل اغلب به‌جای آماره L، آماره $\ln L$ را به‌کار می‌برند. تحت فرض H_0، با توجه به $r=\dim A-\dim A_0>0$، ثابت می‌شود که

$$-2\ln L\overset{d}{=}\chi^2(r)$$

یعنی $-2\ln L$ با $\chi^2(r)$ به‌طور مجانبی (برای نمونه‌های بزرگ) هم‌توزیع است [۷]. با استفاده از خاصیت جمع پذیری توزیع خی‌دو یعنی
فرض کنید $X_1,\cdots,X_r$، r متغیر تصادفی مستقل باشند به‌طوری که $X_i\sim\chi^2(n_i)$ و $i=1,\cdots,r$ آن‌گاه

$$Y=\sum_{i=1}^{r}X_i\sim\chi^2_{\sum_{i=1}^{r}n_i}$$

می‌توانیم از تعریف نسبت درست‌نمایی استاندارد که به‌صورت زیر است در این آزمون استفاده نماییم

$$2[\ln L_{SNBP}(\widehat{\alpha_1},\widehat{\alpha_2},\widehat{\alpha_3},\widehat{\theta})-\ln L_{SNBP}(\widehat{\alpha_1},\widehat{\alpha_2},\widehat{\alpha_3})]\ \to\chi^2_1$$

آزمون دوم:

$$H_0:\theta=0 \quad V.S. \quad H_1:\theta>0 \quad (52)$$

اگر $\theta=0$ باشد توزیع به $LSBP$ تبدیل می‌شود.
چون فرض صفر در این آزمون در مرز تعریف θ قرار دارد نسبت درست‌نمایی به کار نمی‌رود. با استفاده از قضیه سوم از مقاله [۱۰] خواهیم داشت

$$2[\ln L_{SNBP}(\widehat{\alpha_1},\widehat{\alpha_2},\widehat{\alpha_3},\widehat{\theta})-\ln L_{SNBP}(\widehat{\alpha_1},\widehat{\alpha_2},\widehat{\alpha_3})] \to 1/2+1/2\chi^2_1$$

۴ تحلیل داده‌ها

۱.۴ تحلیل داده‌های شبیه‌سازی شده برای براورد درست‌نمایی ماکسیمم و دومرحله‌ای

در این زیربخش یک نمونهٔ تصادفی با اندازهٔ ۳۰ از توزیع $SNBP(1,1,1,1)$ را با استفاده از (؟؟) تولید می‌کنیم. این نمونه را در جدول ۱ نشان داده‌ایم. سپس به وسیله روش درست‌نمایی ماکسیمم و روش دومرحله‌ای α_1، α_2، α_3 و θ را براورد نموده و با هم مقایسه می‌کنیم. در ابتدا باید مطمئن شویم که داده‌ها از توزیع $SNBP(1,1,1,1)$ بوده و تحلیل‌های کولموگروف- اسمیرنف [۹] ما قابل اطمینان است (برای این‌کار می‌توان از آزمون نیکویی برازش کولموگوروف استفاده کرد) [۲].

اکنون با توجه به آنچه در بخش ۳ گفته شد به براورد α_1، α_2، α_3 و θ با روش درست‌نمایی ماکسیمم می‌پردازیم. چون چهار معادله، چهار مجهول به‌دست‌آمده فاقد جواب صریح است از روش‌های تکرار و نرم‌افزار استفاده می‌کنیم

$$\widehat{\alpha_1}=0/6333 \qquad \widehat{\theta}=0/7545$$

$$\widehat{\alpha_3}=1/7864 \qquad \widehat{\alpha_2}=1/0304$$

[۹] Kolmogorov-Smirnov

یکبار دیگر نمونه تولید شده به اندازهٔ ۳۰ را با توزیع $SNBP(۱,۱,۱,۱)$ که در جدول ۱ نمایش داده‌ایم در نظر می‌گیریم.
برای استفاده از روش دومرحله‌ای نخست با ماکسیمم کردن $g(\alpha_۱,\alpha_۲,\alpha_۳)$ همان‌گونه که در بخش ۳ توضیح دادیم، $\alpha_۱$، $\alpha_۲$ و $\alpha_۳$ را براورد می‌کنیم. خواهیم داشت

$$\widehat{\alpha_۱} = ۰/۶۳۳۳ \qquad \widehat{\alpha_۲} = ۱/۰۳۰۴$$
$$\widehat{\alpha_۳} = ۱/۷۸۶۴$$

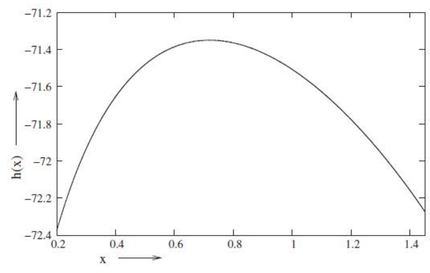
اکنون باید با ماکسیمم کردن $h(x)$، θ را براورد کنیم. اما به دلیل ساختار پیچیده، $h(x)$ موقعی به‌راحتی ماکسیمم می‌شود که تک‌مدی باشد به همین دلیل نمودار آن را رسم می‌کنیم. نمودار $h(x)$ را در شکل ۱ نشان داده‌ایم. همان‌گونه که مشاهده می‌شود تک‌مدی است. اکنون می‌توان به‌راحتی از $h(x)$، لگاریتم گرفت و سپس از لگاریتم آن نسبت به θ مشتق گرفت و مساوی صفر قرار داد که به دست می‌آید

$$\widehat{\theta} = ۰/۷۱۸۵$$

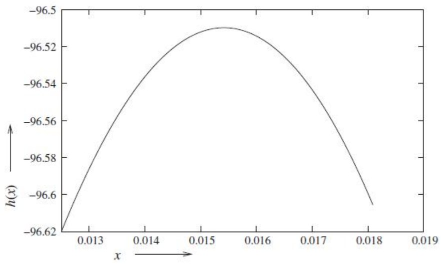
مقدار لگاریتم تابع درست‌نمایی در روش درست‌نمایی ماکسیمم برابر ۷۱/۳۴۹− است و مقدار لگاریتم تابع درست‌نمایی در روش دومرحله‌ای برابر با ۷۱/۳۵۳− است. همان‌گونه که مشاهده می‌شود روش دومرحله‌ای کمی بسته‌تر از روش درست‌نمایی می‌باشد.
چون مدل ما دومتغیره است فقط یک مقدار برای θ به دست می‌آید و نمی‌توانیم از روش سازگاری براورد ۱.۲ استفاده کنیم، اما فاصله اطمینان خودگردان‌ساز برای پارامترهای $\alpha_۱$،$\alpha_۲$، $\alpha_۳$ و θ به‌ترتیب (۰/۸۲۲۴، ۰/۳۹۳۸)، (۱/۵۰۵۵، ۰/۵۲۷۳)، (۲/۷۱۱۰، ۰/۹۳۲۸) و (۱/۰۹۳۶، ۰/۳۴۳۴) می‌باشد[۹].

جدول ۱. اعداد شبیه‌سازی شده برای $X_۱$ و $X_۲$

شماره	$X_۱$	$X_۲$	شماره	$X_۱$	$X_۲$	شماره	$X_۱$	$X_۲$
۱	۰/۲۵۲	۸/۴۰۰	۲	۱/۱۰۵	۰/۴۵۸	۳	۰/۴۲۷	۱/۶۰۲
۴	۱۲/۴۹۱	۲/۳۸۳	۵	۰/۲۶۰	۰/۱۰۶	۶	۰/۲۴۰	۱/۷۶۹
۷	۴/۸۸۸	۰/۷۵۸	۸	۰/۸۷۰	۰/۵۷۲	۹	۰/۰۳۶	۰/۲۵۴
۱۰	۱/۵۳۷	۰/۰۲۳	۱۱	۱/۵۰۸	۰/۵۳۵	۱۲	۰/۲۳۹	۱/۴۱۲
۱۳	۰/۱۷۳	۰/۰۱۱	۱۴	۱/۰۹۰	۱/۲۷۸	۱۵	۶/۰۰۲	۰/۰۱۷
۱۶	۰/۸۹۷	۲/۰۳۲	۱۷	۰/۶۹۰	۰/۱۳۸	۱۸	۱/۸۸۳	۰/۳۹۸
۱۹	۰/۹۶۰	۰/۲۵۷	۲۰	۰/۵۶۱	۰/۵۷۳	۲۱	۵/۳۷۰	۰/۳۲۵
۲۲	۰/۱۶۷	۰/۲۶۰	۲۳	۱۳/۶۰۲	۰/۳۶۴	۲۴	۳/۹۲۲	۰/۹۳۸
۲۵	۰/۱۳۲	۰/۵۴۷	۲۶	۰/۶۰۳	۰/۱۰۲	۲۷	۰/۲۲۶	۰/۴۸۱
۲۸	۰/۱۴۳	۰/۷۷۹	۲۹	۰/۶۴۳	۰/۰۷۱	۳۰	۰/۳۴۹	۱/۵۸۶



شکل ۱. نمودار $h(x)$ برای داده‌های شبیه‌سازی شده



شکل ۲. نمودار $h(x)$ برای داده‌های واقعی

جدول ۲. دو اندازه‌گیری واقعی برای ۳۰ صفحه مختلف

شماره	ضربه	نوسان	شماره	ضربه	نوسان	شماره	ضربه	نوسان
۱	۱۸۸۹	۱۶۵۱	۲	۲۴۰۳	۲۰۴۸	۳	۲۱۱۹	۱۷۰۰
۴	۱۶۴۵	۱۶۲۷	۵	۱۹۷۶	۱۹۱۶	۶	۱۷۱۲	۱۷۱۳
۷	۱۹۴۳	۱۶۸۵	۸	۲۱۰۴	۱۸۲۰	۹	۲۹۸۳	۲۷۹۴
۱۰	۱۷۴۵	۱۶۰۰	۱۱	۱۷۱۰	۱۵۹۱	۱۲	۲۰۴۶	۱۹۰۷
۱۳	۱۸۴۰	۱۸۴۱	۱۴	۱۸۶۷	۱۶۸۵	۱۵	۱۸۵۹	۱۶۴۹
۱۶	۱۹۵۴	۲۱۴۹	۱۷	۱۳۲۵	۱۱۷۰	۱۸	۱۴۱۹	۱۳۷۱
۱۹	۱۸۲۸	۱۶۳۴	۲۰	۱۷۲۵	۱۵۹۴	۲۱	۲۲۷۶	۲۱۸۹
۲۲	۱۸۹۹	۱۶۱۴	۲۳	۱۶۳۳	۱۵۱۳	۲۴	۲۰۶۱	۱۸۶۷
۲۵	۱۸۵۶	۱۴۹۳	۲۶	۱۷۲۷	۱۴۱۲	۲۷	۲۱۶۸	۱۸۹۶
۲۸	۱۶۵۵	۱۶۷۵	۲۹	۲۳۲۶	۲۳۰۱	۳۰	۱۴۹۰	۱۳۸۲

۲.۴ تحلیل داده‌های واقعی برای براورد درست‌نمایی ماکسیمم و دومرحله‌ای

برای این کار از یک مجموعه داده شامل دو اندازه‌گیری متفاوت استفاده می‌کنیم، ضربه و ارتعاش سی صفحه مختلف. اندازه اول ضربه موجی است که به صفحه وارد شده است و اندازه دوم ارتعاش و لرزش حاصل از آن. اصل این مجموعه داده متعلق به ویلیام گالیگان است و گزارش آن در جدول ۲ نمایش داده شده است [۵].

اکنون با استفاده از روش دومرحله‌ای به براورد پارامترها می‌پردازیم. همان‌گونه که قبلا گفتیم برای به دست آوردن براورد پارامترهای α_1، α_2 و α_3 باید تابع $g(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ را ماکسیمم کنیم. نتایج زیر به دست می‌آید.

$$\widehat{\alpha_1} = ۰/۰۳۲۱ \qquad \widehat{\alpha_2} = ۰/۰۲۹۲$$

$$\widehat{\alpha_3} = ۱۸/۳۴۳۸$$

برای براورد کردن θ نیاز به ماکسیمم کردن $h(x)$ است. برای این کار نخست نمودار $h(x)$ را رسم می‌کنیم که شکل ۲ آن را نمایش می‌دهد.

همان‌گونه که مشاهده می‌شود نمودار $h(x)$ تک‌مدی است، پس به آسانی می‌توان ماکسیمم آن‌را یافت. نخست از آن لگاریتم گرفته و سپس نسبت به θ مشتق می‌گیریم و مساوی صفر قرار می‌دهیم و معادله را حل می‌کنیم. نتیجه زیر به‌دست می‌آید.

$$\widehat{\theta} = ۰/۰۱۵۴$$

مقدار لگاریتم تابع درست‌نمایی ماکسیمم هم برابر با ۹۶/۵۰۹۸− خواهد شد. فاصله اطمینان خودگردان‌ساز برای پارامترهای α_1،

α_2، α_3 و θ به‌ترتیب (۰/۰۴۴۶، ۰/۰۱۹۶)، (۰/۰۴۰۳، ۰/۰۱۸۱)، (۲۳/۰۹۱۲، ۱۳/۵۹۶۴) و (۰/۰۱۸۵، ۰/۰۱۲۳) است.

حال آزمون استقلال ۱.۳ را انجام می‌دهیم. آماره آزمون برابر با ۰/۸۸۴ می‌شود. p-مقدار هم برابر با ۰/۷ است پس ما نمی‌توانیم فرض صفر را رد کنیم. به‌عبارت بهتر توابع حاشیه‌ای از یکدیگر مستقل هستند. پس دو متغیر تصادفی مستقل به مدل $SNBP$ ترجیح دارد و دیگر نیازی به براورد ماکسیمم درست‌نمایی بر اساس داده‌های واقعی موجود در جدول ۲ نمی‌باشد.

۵ نتیجه‌گیری

در این مقاله، نخست تعریف تابع مفصل را مرور کرده و مزیت‌های آن را بیان کردیم، سپس یادآور شدیم که با کمک روش دومرحله‌ای می‌توان پارامترهای مجهول توابع چندمتغیره‌ای را که توابع مفصلشان موجود است به آسانی و با محاسبات کمتری به‌دست آورد. دو روش برای آزمودن سازگاری براورد تابع مفصل چندمتغیره بررسی گردید. توزیع پارتو دومتغیره سانکاران- نائیر به‌عنوان مثال مطرح شد و دو مجموعه داده، یکی شبیه‌سازی شده و دیگری واقعی را تحلیل کردیم تا مقایسه‌ای عملی بین براورد دومرحله‌ای و براورد درست‌نمایی انجام گیرد.

مراجع

[۱] رضایی، ص، و طهماسبی، ر، (۱۳۹۰)، شبیه‌سازی آماری ، انتشارات سری شار، تهران.

[2] Conover, W.J, (1980), *Practical nonparametric statistics*, 2nd ed, John Wiley Sons, INC.

[3] Joe, H, (1997), *Multivariate Model and Dependence Concepts*, Chapman and Hall, London.

[4] Joe, H, (2005), Asymptotic efficiency of two-stage estimation method for copula-based models, *Journal of Multivariate Analysis*, **94**, 401–419.

[5] Johnson, R.A, and Wiechern, D.W, (1992), *Applied Multivariate Statistical Analysis*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.

[6] Lindley, D.V, and Singpurwalla, N.D, (1986), Multivariate distribution for the life lengths of a system sharing a common environment, *Journal of Applied Probability*, **23**, 418–431.

[7] Mood, A. M, Graybill, F. A, and Boes, D.C, (1974), *Introduction to the theory of statistics*, McGraw-Hill, Inc.

[8] Sankaran, P.G, and Nair, N.U, (1993), A bivariate Pareto model and its applications to reliability, *Naval Research Logistics*, **40**, 1013–1020.

[9] Sankaran, P.G, and Kundu, D, (2012), A bivariate Pareto model, *Statistics: A Journal of Theoretical and Applied Statistics*, **iFirst**, 1–15.

[10] Self, S.G, and Liang, K.L, (1987), Asymptotic properties of the maximum likelihood estimators and likelihood ratio test under non-standard conditions, *Journal of the American Statistical Association* , **82**, 605–610.

[11] Xu, J.J, (1996), *Statistical modeling and inference for multivariate and longitudinal discrete response data*, PhD thesis, Department of Statistics, University of British Columbia.