استفاده از توزیع‌های وزنی برای مدل‌بندی داده‌های چوله، چندنمایی و بریده

خدیجه رضائی [۱]، افشین فلاح [۲]

تاریخ دریافت: ۱۳۹۴/۸/۳۰
تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۶/۲۶

چکیده:
هنگامی‌که مشاهدات نشان‌دهندهٔ ساختار چندنمایی، نامتقارن، بریده یا ترکیبی از این حالات هستند، استفاده از توزیع‌های تک‌نمایی متقارن برای مدل‌بندی آنها به نتایج گمراه‌کننده منجر می‌شود. به همین دلیل، توزیع‌هایی که قابلیت مدل‌بندی چولگی، دو یا چندنمایی بودن و بریدگی را داشته باشند، همواره در ادبیات آماری مورد علاقه بوده‌اند. برای ایجاد چنین ویژگی‌هایی در یک توزیع، راه‌های متفاوتی وجود دارد که از آن جمله می‌توان به کار بست توزیع‌های وزنی اشاره نمود. در این مقاله، نشان داده شده است که با انتخاب توابع وزن مناسب برای یک توزیع متقارن مانند نرمال می‌توان چنین قابلیت‌هایی را در توزیع وزنی متناظر با آن ایجاد نمود.
واژه‌های کلیدی: چولگی، بریدگی، توزیع وزنی، تابع وزن.

۱ مقدمه

اعتبار نتایج حاصل از استنباط و مدل‌سازی آماری، به میزان نماینده بودن نمونهٔ تصادفی وابسته است. در مواردی، توزیع نمونه‌های استخراج شده از جامعه با توزیع جامعه یکسان نیست و از این رو به نتایج حاصل از استنباط بر پایه این داده‌ها نمی‌توان اعتماد کرد. [۱۱] نخستین شخصی است که دربارهٔ روش‌های مؤثر بر شکل توزیع مشاهدات ثبت شده مطالعاتی انجام داده است. [۲۶] راهکار مناسب برای مدل‌بندی داده‌های آماری را در موقعیت‌هایی که توزیع استانداردی برای جامعه یافت نمی‌شود، استفاده از توزیع‌های موزون می‌داند. وی سه دلیل عمده برای پیدایش مشاهداتی با توزیع‌های موزون در بسیاری کاربردها را قابل مشاهده نبودن برخی از داده‌ها، در دسترس نبودن بخشی از داده‌ها به سبب از بین رفتن مشاهدات اصلی و به کار بردن روش نمونه‌گیری با احتمال نابرابر می‌داند. اگر $f(y,\boldsymbol{\theta})$ تابع چگالی (جرم احتمال) متغیر تصادفی Y و $\boldsymbol{\theta}$ بردار پارامترها باشد، آن‌گاه متغیر تصادفی Y_w دارای تابع چگالی (جرم احتمال) به‌صورت زیر است:

$$f_\omega(y;\boldsymbol{\theta},\alpha)=\frac{w(y,\alpha)}{\mu_\omega}f(y;\boldsymbol{\theta}),\quad y\in S_y$$

که نسخه موزون متغیر تصادفی Y و توزیع $f_\omega(y;\boldsymbol{\theta},\alpha)$ را توزیع موزون گویند. محققان بسیاری جنبه‌های نظری و کاربردی توزیع‌های موزون را مورد مطالعه قرار داده‌اند. به‌عنوان مثال، می‌توان به مطالعات [۷] در زمینهٔ مشخصه‌های بیش‌پراکندگی و کم‌پراکندگی توزیع‌های موزون پوآسون، [۸] در زمینهٔ مشخصه‌هایی از توزیع‌های موزون شبه دوجمله‌ای، [۱۲] در زمینهٔ برآورد چگالی با استفاده از توزیع‌های موزون به روش هسته، [۲۵] دربارهٔ مقایسه بین مقادیر میانگین Y و Y_w، بر اساس رفتارهای یکنوای توابع موزون، [۲۲] در زمینهٔ بررسی برخی ویژگی‌های توزیع‌های موزون در مقایسه با توزیع اصلی‌شان برای مقادیر نامنفی متغیرهای تصادفی و [۱۹] در زمینهٔ بررسی رابطه‌های بین گشتاورهای توزیع‌های اصلی و توزیع‌های موزون اشاره کرد.

مهم‌ترین مسئله در استفاده از توزیع‌های موزون، انتخاب تابع وزن مناسب برای داده‌های مشاهده شده است. با لحاظ کردن یک تابع

[۱] دانش‌آموختهٔ کارشناسی ارشد آمار ریاضی، دانشگاه بین‌المللی امام خمینی، قزوین، ایران
[۲] عضو هیات علمی، گروه آمار، دانشگاه بین‌المللی امام خمینی، قزوین، ایران

وزن، می‌توان به توزیع‌های اصلی انعطاف‌پذیری بیشتری بخشید و برخی از ویژگی‌های توزیع اصلی را تغییر داد. محقق می‌تواند در هر شرایطی با توجه به ماهیت مشاهدات، وزن مناسب را به‌گونه‌ای انتخاب نماید تا بهترین برازش ممکن حاصل شود.
این مقاله نشان می‌دهد که چگونه می‌توان از طریق انتخاب وزن‌های مختلف ویژگی‌های متفاوتی همانند تقارن، چولگی و تک‌نمایی یا چندنمایی بودن را به یک توزیع افزود. با توجه به این‌که اغلب پژوهش‌های صورت گرفته در خصوص توزیع‌های موزون، توزیع نرمال را مبنا قرار داده‌اند، در این مقاله نیز با مبنا قرار دادن همین توزیع، با انتخاب وزن‌های مناسب برای توزیع نرمال، می‌توان توزیع‌های نرمال موزونی ساخت که قابلیت مدل‌بندی مشاهدات نامتقارن، چندنمایی و بریده را نیز علاوه بر مشاهدات متقارن و تک‌نمایی دارا باشد. بدیهی است که نتایج مشابه برای سایر توزیع‌های احتمالاتی نیز قابل توسعه هستند.
در بخش ۲ توابع وزن مختلف که در توزیع نرمال قابلیت مدل‌بندی چولگی و کشیدگی را ایجاد می‌کنند، معرفی می‌شوند. در بخش ۳ توابع وزن مختلف که در توزیع نرمال علاوه بر قابلیت مدل‌بندی چولگی و کشیدگی، قابلیت دونمایی بودن را ایجاد می‌کنند، معرفی می‌شوند. در بخش ۴ نحوه ساختن توزیع‌های بریده شده از طریق توزیع‌های موزون مورد بحث قرار گرفته است. بحث و نتیجه‌گیری در بخش ۵ ارائه شده است. برای ایجاد سهولت در استفاده از نتایج، خلاصه‌ای از تحقیقات شاخص در این زمینه در قالب سه جدول برای توزیع‌های چوله‌نرمال موزون تک‌نمایی، توزیع‌های چوله‌نرمال موزون دونمایی و توزیع نرمال موزون بریده شده، ارائه شده‌اند.

۲ نحوه ساخت توزیع‌های چوله‌نرمال

توزیع‌های چوله‌نرمال را می‌توان از دیدگاه‌های مختلفی مورد مطالعه قرار داد. در واقع روش‌های مختلفی برای افزودن قابلیت مدل‌بندی چولگی به یک توزیع متقارن مانند نرمال وجود دارد، که از آن جمله می‌توان به استفاده از توزیع‌های وزنی [۱]، روش شکافتن پارامتر مقیاس [۲۰] و ساختن توزیع‌های آمیخته مقیاسی از یک توزیع متقارن [۱۰] اشاره کرد.

هنگامی که مشاهدات چوله هستند، با افزودن وزن مناسب به یک توزیع متقارن، می‌توان انعطاف‌پذیری آن توزیع را افزایش داده و قابلیت مدل‌بندی چولگی را برای آن توزیع ایجاد نمود.

توزیع چوله‌نرمال آزالینی.

در صورتی‌که تابع وزن $w(y,\lambda)=\Phi(\lambda y)$ برای توزیع نرمال در نظر گرفته شود، امید ریاضی تابع وزن مورد نظر به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$\mathbb{E}[\Phi(\lambda y)]=\mathbb{E}(P(U\leq\lambda Y))=\frac{1}{2},$$

متغیر تصادفی Y دارای توزیع چوله‌نرمال آزالینی با تابع چگالی زیر است:

$$f_Y(y;\lambda)=2\phi(y)\Phi(\lambda y)\quad y,\lambda\in\mathbb{R}, \qquad (1)$$

که در آن $\phi(\cdot)$ و $\Phi(\cdot)$ به ترتیب تابع چگالی احتمال و تابع توزیع تجمعی توزیع نرمال استاندارد هستند. این توزیع به‌صورت $SN(\lambda)$ نشان داده می‌شود. برخی از ویژگی‌های توزیع چوله‌نرمال (۱) عبارت‌اند از:

۱. اگر $Z\sim SN(\lambda)$، آن‌گاه $-Z\sim SN(-\lambda)$.

۲. به‌ازای یک λ اثبات، تابع چگالی توزیع چوله‌نرمال آزالینی قویاً تک‌نمایی است.

۳. اگر $Z\sim SN(\lambda)$ و $Y\sim N(0,1)$، آن‌گاه $|Z|$ و $|Y|$ هم‌توزیع هستند.

۴. تابع چگالی این توزیع به‌ازای مقادیر مثبت λ، چوله به راست، به‌ازای مقادیر منفی λ، چوله به چپ، به‌ازای $\lambda=0$، همان چگالی نرمال استاندارد است.

۵. اگر $\lambda\longrightarrow\pm\infty$، آن‌گاه توزیع Z به توزیع نیم‌نرمال میل می‌کند.

۶. اگر $Z\sim SN(\lambda)$، آن‌گاه $Y\stackrel{D}{=}Z^2\sim\chi^2_{(1)}$.

برای جزئیات بیشتر درباره این توزیع وزنی به [۴] مراجعه شود.

توزیع چوله‌نرمال آرلانوواله و دیگران.

در کاربردهای واقعی استفاده از توزیع چوله‌نرمال آزالینی [۴] با محدودیت‌هایی مواجه است. یکی از این محدودیت‌ها آن است که توزیع چوله‌نرمال آزالینی به‌ازای مقادیر خیلی بزرگ (خیلی کوچک) پارامتر چولگی، به توزیع نیم‌نرمال میل می‌کند و عملاً هیچ احتمالی برای مشاهده مقادیر منفی (مثبت) در نظر نمی‌گیرد. به‌علاوه این توزیع به دلیل تک پارامتری بودن به اندازه کافی انعطاف‌پذیر نیست.

تابع وزن $w(y,\lambda_1,\lambda_2)=\Phi(\frac{\lambda_1 y}{\sqrt{1+\lambda_2 y^2}})$ را برای توزیع نرمال در نظر بگیرید. امید ریاضی این تابع وزن به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\Phi(\frac{\lambda_1 y}{\sqrt{1+\lambda_2 y^2}})] &= \int_{-\infty}^{+\infty}\phi(y)\Phi(\frac{\lambda_1 y}{\sqrt{1+\lambda_2 y^2}})dy\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\phi(y)\mathbb{E}\left[\Phi(\lambda_1 y+\sqrt{\lambda_2}yz)\right]dy\\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

آن‌گاه تابع چگالی توزیع چوله‌نرمال آرلانوواله و دیگران به‌صورت زیر است:

$$f_Y(y;\lambda_1,\lambda_2)=2\phi(y)\Phi(\frac{\lambda_1 y}{\sqrt{1+\lambda_2 y^2}})$$
$$y,\lambda_1\in\mathbb{R},\quad \lambda_2\geq 0. \qquad (2)$$

و با نماد $SGN(\lambda_1,\lambda_2)$ نشان داده می‌شود. برخی از ویژگی‌های توزیع چوله‌نرمال (۲) عبارت است از:

۱. اگر $Y\sim SGN(\lambda_1,\lambda_2)$، آن‌گاه $-Y\sim SGN(-\lambda_1,\lambda_2)$.

۲. اگر $|\lambda_1|$ به بی‌نهایت میل کند، آن‌گاه توزیع متغیر تصادفی Y به توزیع نیم‌نرمال میل خواهد کرد، یعنی:

$$\lim_{\lambda_1\to\pm\infty} f_Y(y;\lambda_1,\lambda_2)=2\phi(y)\Phi(\pm sign(y))$$

۳. اگر $\lambda_1=0$ و $\lambda_2\geq 0$، آن‌گاه

$$SGN(\lambda_1=0,\lambda_2)=\phi(y).$$

۴. اگر $\lambda_2=0$، آن‌گاه

$$SGN(\lambda_1,\lambda_2=0)=SN(\lambda_1)=2\phi(y)\Phi(\lambda_1 y).$$

۵. اگر $Z\sim SGN(\lambda_1,\lambda_2)$ و $Y\sim N(0,1)$، آن‌گاه $|Z|\overset{D}{=}|Y|\sim HN(0,1)$.

۶. اگر $Y\sim SGN(\lambda_1,\lambda_2)$، آن‌گاه $Y^2\overset{i.i.d.}{\sim}\chi^2_{(1)}$.

۷. تساوی زیر همواره برقرار است

$$\begin{aligned}f_Y(y;\lambda_1,\lambda_2)+f_Y(y;-\lambda_1,\lambda_2) &= f(y)+f(-y)\\ &= 2\phi(y).\end{aligned}$$

۸. اگر $Y\sim N(\lambda_1,\lambda_2)$ و $Z\mid Y=y\sim SN(y)$، آن‌گاه $Z\sim SGN(\lambda_1,\lambda_2)$.

۹. فرض کنید $Z,Y\sim N(0,1)$، آن‌گاه $Z\mid Y\leq\frac{\lambda_1 z}{\sqrt{1+\lambda_2 z^2}}$ دارای توزیع $SGN(\lambda_1,\lambda_2)$ است.

برای جزئیات بیشتر درباره این توزیع وزنی به [۲] مراجعه کنید.

توزیع چوله‌نرمال خمیده.

تابع وزن $w(y,\lambda)=\Phi(\frac{\lambda y}{\sqrt{1+\lambda^2 y^2}})$ را در نظر بگیرید، امید ریاضی این تابع وزن به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\Phi(\frac{\lambda y}{\sqrt{1+\lambda^2 y^2}})] &= \int_{-\infty}^{+\infty}\phi(y)\Phi(\frac{\lambda y}{\sqrt{1+\lambda^2 y^2}})dy\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\phi(y)\mathbb{E}\left[\Phi(\lambda y+\lambda yz)\right]dy\\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

آن‌گاه تابع چگالی توزیع نرمال موزون حاصل به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$f_Y(y;\lambda)=2\phi(y)\Phi(\frac{\lambda y}{\sqrt{1+\lambda^2 y^2}})\quad y,\lambda\in\mathbb{R}.$$

این توزیع به توزیع چوله‌نرمال خمیده معروف است و با نماد $SCN(\lambda)$ نشان داده می‌شود [۲]. برخی از ویژگی‌های توزیع چوله‌نرمال خمیده عبارت‌اند از:

۱. اگر $\lambda=0$، آن‌گاه تابع چگالی نرمال استاندارد است.

۲. به‌ازای مقادیر بزرگ λ، این توزیع علی‌رغم تمرکز بر مقادیر مثبت، برای اعداد منفی نیز مقداری احتمال مثبت در نظر می‌گیرد، زیرا

$$\lim_{\lambda\to\pm\infty} f_{SCN}(y;\lambda) = ۲\phi(y)\Phi(\pm sign(y)).$$

۳. [۲] نشان داده‌اند که یکی از مزایای استفاده از این توزیع، سهولت دستیابی به توزیع پیشین مزدوج در استنباط‌های بیزی است.

تعمیم توزیع چوله‌نرمال آرلانوواله و دیگران.

فرض کنید Y و $U_۱,\cdots,U_n$ متغیرهای تصادفی مستقل و دارای توزیع نرمال استاندارد باشند و $U_n \le \frac{\lambda_۱ Y}{\sqrt{۱+\lambda_۲ Y^۲}}$، اگر $w(y,\lambda_۱,\lambda_۲) = \left[\Phi(\frac{\lambda_۱ y}{\sqrt{۱+\lambda_۲ y^۲}})\right]^n$ تابع وزن باشد، آن‌گاه امید ریاضی این تابع وزن به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned}\frac{۱}{C_n(\lambda_۱,\lambda_۲)} &= \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\Phi(\frac{\lambda_۱ y}{\sqrt{۱+\lambda_۲ y^۲}})\right]^n \phi(y)dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} P(U_{(n)} \le \frac{\lambda_۱ y}{\sqrt{۱+\lambda_۲ y^۲}})\phi(y)dy.\end{aligned}$$

بر این‌اساس، تابع چگالی توزیع به‌صورت زیر است:

$$f_Y(y;\lambda_۱,\lambda_۲) = C_n(\lambda_۱,\lambda_۲)\left[\Phi(\frac{\lambda_۱ y}{\sqrt{۱+\lambda_۲ y^۲}})\right]^n \phi(y)$$
$$y,\lambda_۱\in\mathbb{R},\quad \lambda_۲\ge ۰,\quad n\in\mathbb{N}. \quad (۳)$$

که در آن $U_{(n)}$ بزرگ‌ترین آماره ترتیبی است. برای $n = ۱$، تعمیم (۳) به توزیع چوله‌نرمال آرلانوواله و دیگران [۲] تبدیل می‌شود. اگر n افزایش یابد، آن‌گاه تابع چگالی کشیده‌تر می‌شود.

توزیع چوله‌نرمال آرنولد و بی‌ور.

یکی از محدودیت‌های توزیع آزالینی بسته نبودن توزیع نسبت به شرطی‌سازی است. برای رفع این محدودیت تعمیمی از توزیع چوله‌نرمال که نسبت به شرطی‌سازی بسته است ارائه گردیده است [۳]. در صورتی‌که

$$w(y,\lambda_۱,\lambda_۲) = \Phi(\lambda_۱+\lambda_۲ y)$$

به‌عنوان تابع وزن انتخاب شود، امید ریاضی این تابع وزن به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\Phi(\lambda_۱+\lambda_۲ y)\right] &= \int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(\lambda_۱+\lambda_۲ y)\phi(y)dy \\ &= \mathbb{E}\left[P(U\le\lambda_۱+\lambda_۲ Y)\right] \\ &= \Phi\left(\frac{\lambda_۱}{\sqrt{۱+\lambda_۲^۲}}\right).\end{aligned}$$

بنا بر این تابع چگالی توزیع نرمال موزون به‌صورت زیر است:

$$f(y;\lambda_۱,\lambda_۲) = \phi(y)\frac{\Phi(\lambda_۱+\lambda_۲ y)}{\Phi(\frac{\lambda_۱}{\sqrt{۱+\lambda_۲^۲}})} \quad y,\lambda_۱,\lambda_۲\in\mathbb{R}. \quad (۴)$$

این توزیع به چوله‌نرمال آرنولد و بی‌ور معروف است و با نماد $SNA(\lambda_۱,\lambda_۲)$ نشان داده می‌شود. برخی از ویژگی‌های توزیع چوله‌نرمال (۴) عبارت‌اند از:

۱. اگر $\lambda_۱ = ۰$، آن‌گاه تابع چگالی چوله‌نرمال آرنولد و بی‌ور به تابع چگالی چوله‌نرمال استاندارد تبدیل می‌شود.

۲. با فرض آن‌که متغیرهای تصادفی مستقل U و Y دارای توزیع نرمال استاندارد باشند، داریم:

$$Y|U\le\lambda_۱+\lambda_۲ y \sim SNA(\lambda_۱,\lambda_۲).$$

برای جزئیات بیشتر درباره این توزیع وزنی به [۳] مراجعه کنید.

توزیع چوله‌نرمال بالاکریشنان.

فرض کنید Y و $U_۱,\cdots,U_n$ متغیرهای تصادفی مستقل و دارای توزیع نرمال استاندارد باشند. اگر تابع وزن در توزیع نرمال به‌صورت $w(y,\lambda) = [\Phi(\lambda y)]^n$ باشد، آن‌گاه امید ریاضی این تابع وزن به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned}\frac{۱}{C_n(\lambda)} &= \mathbb{E}\left[(\Phi(\lambda y))^n\right] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}(\Phi(\lambda y))^n\phi(y)dy \\ &= \mathbb{E}\left[P(U_{(n)}\le\lambda Y)\right].\end{aligned}$$

آن‌گاه متغیر تصادفی Y دارای توزیعی با تابع چگالی به‌صورت زیر است:

$$f(y;\lambda) = C_n(\lambda)\phi(y)[\Phi(\lambda y)]^n \quad y,\lambda\in\mathbb{R},\quad n\in\mathbb{N}. \quad (۵)$$

این توزیع به توزیع چوله‌نرمال بالاکریشنان معروف است و با نماد $BSN_n(\lambda)$ نشان داده می‌شود. برخی از ویژگی‌های توزیع (۵) عبارت‌اند از:

۱. به‌ازای $n = ۱$، توزیع چوله‌نرمال بالاکریشنان به توزیع چوله‌نرمال آزالینی تبدیل می‌شود.

۲. به‌ازای $n = ۲$، آن‌گاه $\frac{۱}{C_۲(\lambda)} = \frac{۱}{\pi}\tan^{-۱}(\sqrt{۱+۲\lambda^۲})$.

۳. به‌ازای $n = ۳$، آن‌گاه $\frac{۱}{C_۳(\lambda)} = \frac{۱}{۸} + \frac{۳}{۴\pi}\sin^{-۱}(\rho)$.

۴. به‌ازای $n \geq ۴$ صورت صریحی برای $C_۴(\lambda)$ وجود ندارد، اما مقادیر تقریبی $C_۴(\lambda)$ به‌دست‌آمده است [۲۵].

برای جزئیات بیشتر درباره این توزیع وزنی به [۵] مراجعه کنید.

توزیع چوله‌نرمال تعمیم‌یافته یادگاری و دیگران.

[۲۶] فرض کنید اعداد $m, n \in N \cup \{۰\}$ ثابت و معلوم هستند. اگر $w(y,\lambda) = \Phi(\lambda y)]^n[۱ - \Phi(\lambda y)]^m$ به‌عنوان تابع وزن برای توزیع نرمال در نظر گرفته شود، آن‌گاه امید ریاضی این تابع وزن به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned}\frac{۱}{C_{n,m}(\lambda)} &= \mathbb{E}[\Phi(\lambda y)]^n[۱ - \Phi(\lambda y)]^m] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}[\Phi(\lambda y)]^n[۱ - \Phi(\lambda y)]^m\phi(y)dy.\end{aligned}$$

بر این‌اساس، متغیر تصادفی Y دارای توزیعی با تابع چگالی زیر است:

$$f_{m,n}(y;\lambda) = C_{n,m}(\lambda)\phi(y)[\Phi(\lambda y)]^n[۱ - \Phi(\lambda y)]^m,$$
$$y, \lambda \in \mathbb{R}, \quad n, m \in \mathbb{N}. \qquad (۶)$$

این توزیع تعمیم دیگری از توزیع چوله‌نرمال آزالینی است، که توزیع چوله‌نرمال بالاکریشنان و توزیع بتانرمال را شامل شده و با نماد $GSN_{n,m}(\lambda)$ نشان داده می‌شود. برخی از ویژگی‌های توزیع چوله‌نرمال (۶) عبارت‌اند از:

۱. توزیع GSN به‌ازای $m = ۰$ و $n = ۱$، به توزیع چوله‌نرمال آزالینی تبدیل می‌شود.

۲. توزیع GSN به‌ازای $m = ۰$، به توزیع چوله‌نرمال بالاکریشنان تبدیل می‌شود.

۳. توزیع GSN به‌ازای $m = n = ۰$ یا $\lambda = ۰$، به توزیع نرمال استاندارد تبدیل می‌شود.

۴. توزیع GSN به‌ازای $\lambda = ۱$، به توزیع بتانرمال تبدیل می‌شود.

۵. اگر

$$C_{n,m}(\lambda) = [\int_{-\infty}^{\infty}[\Phi(\lambda y)]^n[۱ - \Phi(\lambda y)]^m\phi(y)dy]^{-۱}$$

آن‌گاه $C_{n,m}(\lambda) = C_{n,m}(-\lambda) = C_{m,n}(\lambda)$.

۶. اگر $Y \sim GSN_{m,n}(\lambda)$ و $U \sim GSN_{n,m}(-\lambda)$، آن‌گاه Y و U هم‌توزیع خواهند بود.

۷. اگر $Y \sim GSN_{n,m}(\lambda)$، آن‌گاه به‌ازای یک λ ثابت، Y متقارن است اگر و تنها اگر $n = m$ باشد.

۸. اگر متغیر تصادفی $Y \sim GSN_{n,m}(\lambda)$ مستقل از نمونهٔ تصادفی $U_۱, \cdots, U_p \sim N(۰, ۱)$ باشد، آن‌گاه

$$Y|\{U_{(p)} \leq \lambda Y\} \sim GSN_{n+p,m}(\lambda)$$
$$Y|\{U_{(۱)} > \lambda Y\} \sim GSN_{n,m+p}(\lambda).$$

برای جزئیات بیشتر درباره این توزیع وزنی به [۵] مراجعه کنید.

[۲۳] با ترکیب روش‌های ارائه شده در [۴، ۱۳]، توزیع‌های چوله‌نرمال جدیدی که هسته آنها توزیع نرمال است، ارائه نموده‌اند. با در نظر گرفتن توابع توزیع تجمعی توزیع‌های پیوسته‌ای مانند کشی، لوژستیک، t استودنت، یکنواخت و لاپلاس، به‌عنوان توابع وزن برای توزیع نرمال، توزیع‌های جدیدی حاصل می‌شوند.

توزیع چوله‌نرمال کوشی.

اگر تابع

$$w(y,\lambda,\gamma) = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{\pi}\arctan\left(\frac{\lambda y}{\gamma}\right)$$

به‌عنوان تابع وزن برای توزیع نرمال در نظر گرفته شود، آن‌گاه امید ریاضی این تابع وزن به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\mathbb{E}(w(Y,\lambda)) = \frac{۱}{۲},$$

بر این‌اساس، متغیر تصادفی Y دارای توزیع چوله‌نرمال کوشی است، اگر تابع چگالی آن به‌صورت زیر است:

$$f(y;\sigma,\gamma,\lambda)=\frac{۲}{\sigma}\phi\left(\frac{y}{\sigma}\right)\left\{\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{\pi}\arctan\left(\frac{\lambda y}{\gamma}\right)\right\}\quad y\in\mathbb{R}. \quad (۷)$$

که در آن

$$g(y)=\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{y^{۲}}{۲\sigma^{۲}}\right),$$

و

$$H(y)=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{\pi}\arctan\left(\frac{y}{\gamma}\right).$$

به‌ترتیب تابع چگالی توزیع نرمال $N(۰,\sigma^{۲})$ و تابع توزیع تجمعی توزیع کوشی $C(۰,\gamma)$ هستند. این توزیع با نماد $SNC(\lambda)$ نشان داده می‌شود [۲۳] . برخی از ویژگی‌های توزیع (۷) عبارت‌اند از:

۱. اگر $U\sim HN(۰,۱)$ و $Y\mid U=u\sim SN(\lambda u)$، آن‌گاه $Y\sim SNC(\lambda)$.

۲. اگر $\lambda=۰$، آن‌گاه $Y\sim N(۰,۱)$.

۳. اگر $\lambda\longrightarrow\pm\infty$، آن‌گاه توزیع Y به توزیع نیم‌نرمال میل می‌کند.

۴. اگر $Y\sim SNC(\lambda)$، آن‌گاه $-Y\sim SNC(-\lambda)$.

برای جزئیات بیشتر درباره این توزیع وزنی به [۲۳] مراجعه کنید.

توزیع چوله‌نرمال لوژستیک.

اگر تابع

$$w(y,\lambda,\beta)=\frac{۱}{۱+\exp\left\{-\frac{\lambda y}{\beta}\right\}}$$

به‌عنوان تابع وزن برای توزیع نرمال در نظر گرفته شود، آن‌گاه امید ریاضی این تابع وزن به‌صورت زیر است:

$$\mathbb{E}(w(Y,\lambda))=\frac{۱}{۲}.$$

بر این‌اساس، متغیر تصادفی Y دارای توزیع چوله‌نرمال لوژستیک است، اگر تابع چگالی آن به‌صورت زیر است:

$$f(y;\sigma,\beta,\lambda)=\frac{۲}{\sigma}\phi\left(\frac{y}{\sigma}\right)/\left\{۱+\exp\left(-\frac{\lambda y}{\beta}\right)\right\}\quad y\in\mathbb{R}. \quad (۸)$$

که در آن

$$g(y)=\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{y^{۲}}{۲\sigma^{۲}}\right).$$

و

$$H(y)=\frac{۱}{۱+\exp\left\{-\frac{y}{\beta}\right\}}.$$

به‌ترتیب تابع چگالی توزیع نرمال $N(۰,\sigma^{۲})$ و تابع توزیع تجمعی توزیع لوژستیک $L(۰,\beta)$ هستند. این توزیع با نماد $SNL(\lambda)$ نشان داده می‌شود. برخی از ویژگی‌های توزیع (۸) عبارت‌اند از:

۱. اگر $\lambda=۰$، آن‌گاه $Z\sim N(۰,۱)$.

۲. اگر $\lambda\longrightarrow\pm\infty$، آن‌گاه توزیع Z به توزیع نیم‌نرمال میل می‌کند.

۳. اگر $Z\sim SNL(\lambda)$، آن‌گاه $-Z\sim SNL(-\lambda)$.

برای جزئیات بیشتر درباره این توزیع وزنی به [۲۳] مراجعه کنید.

توزیع چوله‌نرمال t–استودنت.

اگر $w(y,\lambda)=H(\lambda y)$ به‌عنوان تابع وزن برای توزیع نرمال در نظر گرفته شود، آن‌گاه امید ریاضی این تابع وزن به‌صورت زیر است:

$$\mathbb{E}(w(Y,\lambda))=\frac{۱}{۲}.$$

بر این‌اساس، متغیر تصادفی Y دارای توزیع چوله‌نرمال t–استودنت است، اگر تابع چگالی آن به‌صورت زیر باشد:

$$f(y;\sigma,\nu,\lambda)=\frac{۲}{\sigma}\phi\left(\frac{y}{\sigma}\right)H(\lambda y), \quad (۹)$$

که در آن

$$g(y)=\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{y^{۲}}{۲\sigma^{۲}}\right),$$

تابع چگالی توزیع نرمال $N(۰,\sigma^{۲})$ و $H(y)$ تابع توزیع تجمعی توزیع t–استودنت با ν درجه آزادی است. این توزیع با نماد $SNt(\lambda)$ نشان داده می‌شود. برخی از ویژگی‌های توزیع (۹) عبارت‌اند از:

۱. اگر $\lambda=۰$، آن‌گاه $Z\sim N(۰,۱)$.

۲. اگر $\lambda \longrightarrow \pm\infty$، آن‌گاه توزیع Z به توزیع نیم‌نرمال میل می‌کند.

۳. اگر $Z \sim SNt(\lambda)$، آن‌گاه $-Z \sim SNt(-\lambda)$.

برای جزئیات بیشتر درباره این توزیع وزنی به [۲۳] مراجعه کنید.

توزیع چوله‌نرمال یکنواخت.

اگر

$$w(y,\lambda,h)=\begin{cases}0 & \lambda y<-h,\\ \left[\frac{\lambda y+h}{2h}\right] & -h\leqslant \lambda y<h\ ,\\ 1 & \lambda y\geqslant h.\end{cases}$$

به‌عنوان تابع وزن برای توزیع نرمال در نظر گرفته شود، آن‌گاه امید ریاضی این تابع وزن به‌صورت زیر است:

$$\mathbb{E}(w(Y,\lambda))=\frac{1}{2}.$$

بر این‌اساس، متغیر تصادفی Y دارای توزیع چوله‌نرمال یکنواخت است، اگر تابع چگالی آن به‌صورت زیر باشد:

$$f(y;\boldsymbol{\theta})=\begin{cases}0 & \lambda y<-h\\ 2\phi\left(\frac{y}{\sigma}\right)\left[\frac{\lambda y+h}{2\sigma h}\right] & -h\leqslant \lambda y<h\\ \frac{2}{\sigma}\phi\left(\frac{y}{\sigma}\right) & \lambda y\geqslant h,\end{cases} \quad (10)$$

که در آن $\boldsymbol{\theta}=(\lambda,\sigma,h)$ و

$$g(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right),$$

و

$$H(y)=\begin{cases}0 & y<-h\\ \left[\frac{y+h}{2h}\right] & -h\leqslant y<h\\ 1 & y\geqslant h,\end{cases}$$

به‌ترتیب تابع چگالی توزیع نرمال $N(0,\sigma^2)$ و تابع توزیع تجمعی توزیع یکنواخت $U(-h,h)$ هستند. این تابع توزیع با نماد $SNU(\lambda)$ نشان داده می‌شود. برخی از ویژگی‌های توزیع (۱۰) عبارت‌اند از:

۱. اگر $\lambda=0$، آن‌گاه $Z\sim N(0,1)$.

۲. اگر $\lambda \longrightarrow \pm\infty$، آن‌گاه توزیع Z به توزیع نیم‌نرمال میل می‌کند.

۳. اگر $Z\sim SNU(\lambda)$، آن‌گاه $-Z\sim SNU(-\lambda)$.

برای جزئیات بیشتر درباره این توزیع وزنی به [۲۳] مراجعه کنید.

توزیع چوله‌نرمال لاپلاس.

اگر تابع

$$w(y,\lambda,\phi)=\begin{cases}\frac{1}{2}\exp\left(\frac{\lambda y}{\phi}\right) & \lambda y<0\\ \frac{1}{2}\left(2-\exp\left(-\frac{\lambda y}{\phi}\right)\right) & \lambda y\geqslant 0,\end{cases}$$

به‌عنوان تابع وزن برای توزیع نرمال در نظر گرفته شود، آن‌گاه امید ریاضی این تابع وزن به‌صورت زیر است:

$$\mathbb{E}(w(Y,\lambda))=\frac{1}{2},$$

بر این‌اساس، متغیر تصادفی Y دارای توزیع چوله‌نرمال لاپلاس است، اگر تابع چگالی آن به‌صورت زیر باشد:

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{\sigma}\phi\left(\frac{y}{\sigma}\right)\exp\left(\frac{y}{\phi}\right) & y<0\\ \frac{1}{\sigma}\phi\left(\frac{y}{\sigma}\right)\left(2-\exp\left(-\frac{y}{\phi}\right)\right) & y\geqslant 0\ ,\end{cases} \quad (11)$$

که در آن

$$g(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right),$$

و

$$H(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}\exp\left(\frac{y}{\phi}\right) & y<0\\ \frac{1}{2}\left(2-\exp\left(-\frac{y}{\phi}\right)\right) & y\geqslant 0,\end{cases}$$

به‌ترتیب تابع چگالی توزیع نرمال $N(0,\sigma^2)$ و تابع توزیع تجمعی توزیع لاپلاس $L(0,\phi)$ هستند. برخی از ویژگی‌های توزیع (۱۱) عبارت‌اند از:

۱. اگر $\lambda=0$، آن‌گاه $Z\sim N(0,1)$.

۲. اگر $\lambda \longrightarrow \pm\infty$، آن‌گاه توزیع Z به توزیع نیم‌نرمال میل می‌کند.

۳. اگر $Z \sim SNL(\lambda)$، آن‌گاه $-Z \sim SNL(-\lambda)$.

برای جزئیات بیشتر درباره این توزیع وزنی به [۲۳] مراجعه کنید.

توزیع چوله‌نرمال تعمیم‌یافته جمالی‌زاده و دیگران.

[۱۵] اگر تابع وزن $w(y,\lambda_1,\lambda_2,\rho) = \Phi_2(\lambda_1 y, \lambda_2 y;\rho)$ برای توزیع نرمال در نظر گرفته شود، آن‌گاه امید ریاضی این تابع وزن با توجه به قاعده احتمال همه مثبتی[۳]، به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned}\frac{1}{C(\lambda_1,\lambda_2,\rho)} &= \mathbb{E}[\Phi_2(\lambda_1 Y, \lambda_2 Y;\rho)] \\ &= \mathbb{E}[P(U_1 < \lambda_1 Y, \quad U_2 < \lambda_2 Y)] \\ &= \frac{1}{2\pi}\cos^{-1}\left(\frac{-(\rho+\lambda_1\lambda_2)}{\sqrt{1+\lambda_1^2}\sqrt{1+\lambda_2^2}}\right).\end{aligned}$$

بر این‌اساس، متغیر تصادفی Y دارای تابع چگالی به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned}f_{GSN}(y;\lambda_1,\lambda_2,\rho) &= \frac{2\pi}{\cos^{-1}\left(\frac{-(\rho+\lambda_1\lambda_2)}{\sqrt{1+\lambda_1^2}\sqrt{1+\lambda_2^2}}\right)} \\ &\times \phi(y)\Phi_2(\lambda_1 y, \lambda_2 y;\rho), \\ &y,\lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{R}. \qquad (12)\end{aligned}$$

برخی از ویژگی‌های توزیع (۱۲) عبارت‌اند از:

۱. $GSN(\lambda,0,0) = GSN(0,\lambda,0) = SN(\lambda)$.

۲. اگر $Y \sim GSN(\lambda_1,\lambda_2,\rho)$، آن‌گاه

$$-Y \sim GSN(-\lambda_1,-\lambda_2,\rho).$$

۳. اگر Y، U_1 و U_2 متغیرهای تصادفی مستقل و دارای توزیع نرمال استاندارد باشند، آن‌گاه

$$Y \mid (U_1 < \lambda_1 Y, \quad U_2 < \lambda_2 Y) \sim GSN(\lambda_1,\lambda_2,\rho).$$

۴. این توزیع قویاً تک‌مدی است.

۵. توزیع $GSN(\lambda_1,\lambda_2,\rho)$ آمیخته‌ای از دو توزیع چوله‌نرمال بریده با پارامترهای λ_1 و λ_2 به‌ترتیب برای مقادیر مثبت و منفی متغیر تصادفی Y با توابع چگالی زیر است:

$$f^{-}_{GSN}(y;\lambda) = C^{-}(\lambda_1,\lambda_2,\rho)\phi(y)\Phi(\lambda_1 y,\lambda_2 y;\rho) \quad y<0,$$

و

$$f^{+}_{GSN}(y;\lambda) = C^{+}(\lambda_1,\lambda_2,\rho)\phi(y)\Phi(\lambda_1 y,\lambda_2 y;\rho) \quad y>0,$$

که در آنها

$$\begin{aligned}\frac{1}{C^{-}(\lambda_1,\lambda_2,\rho)} =& \frac{1}{4\pi}\left[\cos^{-1}\left(\frac{-(\rho+\lambda_1\lambda_2)}{\sqrt{1+\lambda_1^2}\sqrt{1+\lambda_2^2}}\right)\right. \\ &\left. - \tan^{-1}(\lambda_1) - \tan^{-1}(\lambda_2)\right], \\ \frac{1}{C^{+}(\lambda_1,\lambda_2,\rho)} =& \frac{1}{4\pi}\left[\cos^{-1}\left(\frac{-(\rho+\lambda_1\lambda_2)}{\sqrt{1+\lambda_1^2}\sqrt{1+\lambda_2^2}}\right)\right. \\ &\left. + \tan^{-1}(\lambda_1) + \tan^{-1}(\lambda_2)\right].\end{aligned}$$

۶. تابع وزن توزیع GSN به‌ازای $\rho = 0$ به‌صورت $w(y,\lambda_1,\lambda_2) = \Phi(\lambda_1 y)\Phi(\lambda_2 y)$ است، آن‌گاه امید ریاضی این تابع وزن به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned}\frac{1}{C(\lambda_1,\lambda_2)} &= \mathbb{E}[\Phi(\lambda_1 Y)\Phi(\lambda_2 Y)] \\ &= \mathbb{E}[P(U_1 < \lambda_1 Y)P(U_2 < \lambda_2 Y)] \\ &= \frac{1}{2\pi}\cos^{-1}\left(\frac{-\lambda_1\lambda_2}{\sqrt{1+\lambda_1^2}\sqrt{1+\lambda_2^2}}\right).\end{aligned}$$

بر این‌اساس، تابع چگالی نرمال موزون به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned}f_{GSN}(y;\lambda_1,\lambda_2) =& \frac{2\pi}{\cos^{-1}\left(-\frac{\lambda_1\lambda_2}{\sqrt{1+\lambda_1^2}\sqrt{1+\lambda_2^2}}\right)} \\ &\times \phi(y)\Phi(\lambda_1 y)\Phi(\lambda_2 y), \quad y,\lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

۷. به‌ازای $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$، تابع وزن به $w(y,\lambda) = \Phi^2(\lambda y)$ تبدیل و امید ریاضی این تابع وزن به‌صورت زیر محاسبه

[۳] Ortant Probability

می‌شود:

$$\begin{aligned}\frac{1}{C(\lambda)} &= \mathbb{E}[\Phi^2(\lambda Y)] \\ &= \mathbb{E}[P(U < \lambda Y, \quad U < \lambda Y)] \\ &= \frac{1}{\pi}\tan^{-1}(\sqrt{1+2\lambda^2}).\end{aligned}$$

بر این‌اساس، تابع چگالی متغیر تصادفی Y به‌صورت زیر خواهد بود:

$$f(y;\lambda) = \frac{\pi}{\tan^{-1}(\sqrt{1+2\lambda^2})}\phi(y)\Phi^2(\lambda y) \quad y,\lambda \in \mathbb{R}.$$

برای جزئیات بیشتر درباره این توزیع وزنی به [۱۷، ۱۸] مراجعه کنید.

۳ نحوه ساخت توزیع‌های دونمایی

برای مدل‌بندی مشاهداتی که علاوه بر چولگی دارای ساختار دونمایی هستند، نمی‌توان از توزیع‌های چوله‌متقارن تک‌نمایی استفاده نمود. در این موارد به توزیع‌هایی نیاز است که هم‌زمان قابلیت مدل‌بندی چولگی و دونمایی بودن را داشته باشند.
کیم [۲۱] توزیعی دونمایی با نماهای برابر ارائه نموده است. تعمیم‌های دیگری از این توزیع در [۵، ۹، ۱۸]، ارائه شده است.

توزیع چوله‌نرمال دوتکه.

تابع وزن $w(y,\lambda) = \Phi(\lambda|y|)$ برای توزیع نرمال در نظر بگیرید، آن‌گاه امید ریاضی این تابع وزن به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned}\frac{1}{C(\lambda)} &= \mathbb{E}[\Phi(\lambda|Y|)] \\ &= \mathbb{E}[P(U \le \lambda|Y|)] \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\tan^{-1}(\lambda).\end{aligned}$$

بر این‌اساس، متغیر تصادفی Y دارای توزیعی با تابع چگالی زیر است:

$$f_{TN}(y;\lambda) = \frac{2\pi}{\pi + 2\tan^{-1}(\lambda)}\phi(y)\Phi(\lambda|y|) \quad y,\lambda \in \mathbb{R}. \quad (۱۳)$$

این توزیع به توزیع چوله‌نرمال دوتکه کیم [۲۱] معروف و علاوه بر ویژگی چولگی، دارای دو نما با ارتفاع یکسانی است. برخی از ویژگی‌های توزیع چوله‌نرمال (۱۳) عبارت‌اند از:

۱. اگر $\lambda = 0$، آن‌گاه متغیر تصادفی Y دارای توزیع نرمال استاندارد است.

۲. این توزیع به‌ازای $\lambda > 0$ دونمایی و به‌ازای $\lambda < 0$ تک‌نمایی است.

۳. توزیع $TN(\lambda)$، آمیخته‌ای از دو توزیع چوله‌نرمال بریده با پارامتر λ است، که توابع چگالی آن عبارت‌اند از:

$$\begin{aligned}f^-_{TTN}(y;\lambda) =& \frac{4\pi}{\pi + 2\tan^{-1}(\lambda)}\phi(y)\Phi(\lambda y), \\ & y < 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \\ f^+_{TTN}(y;\lambda) =& \frac{4\pi}{\pi + 2\tan^{-1}(\lambda)}\phi(y)\Phi(\lambda y), \\ & y > 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

۴. اگر λ به سمت $+\infty$ میل کند، آن‌گاه متغیر تصادفی Y به توزیع نرمال استاندارد میل می‌کند.

برای جزئیات بیشتر درباره این توزیع وزنی به [۲۱] مراجعه کنید.

توزیع چوله‌نرمال دوتکه فلاح و چاره.

[۹] تابع وزن $w(y;\lambda_1,\lambda_2) = \Phi(\lambda_1 y + \lambda_2|y|)$ را برای تابع چگالی توزیع نرمال در نظر بگیرید. آن‌گاه امید ریاضی این تابع وزن به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned}\frac{1}{C(\lambda_1,\lambda_2)} &= \mathbb{E}[\Phi(\lambda_1 Y + \lambda_2|Y|)] \\ &= \mathbb{E}[P(\lambda_1 Y + \lambda_2|Y|)] \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{\lambda_2}{\sqrt{1+\lambda_1^2}}\right).\end{aligned}$$

بر این اساس، متغیر تصادفی Y دارای توزیع چوله‌نرمال دوتکه دو پارامتری به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned}f_{TPSN}(y;\lambda_1,\lambda_2) =& C(\lambda_1,\lambda_2)\phi(y)\Phi(\lambda_1 y + \lambda_2|y|), \\ & y,\lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{R}. \quad (۱۴)\end{aligned}$$

نماد $GTPSN(\lambda_1,\lambda_2)$ نشان داده می‌شود. برخی از ویژگی‌های توزیع (۱۴) عبارت‌اند از:

۱. این توزیع دونمایی است و بر خلاف توزیع کیم دونمای توزیع لزوماً ارتفاع یکسانی ندارند و در مقایسه با توزیع دوتکه کیم قابلیت برازش به مشاهدات متنوع‌تری را دارد.

۲. اگر $\lambda_1 = 0$، آن‌گاه متغیر تصادفی Y دارای توزیع چوله‌نرمال دوتکه کیم [۱۸] می‌باشد.

۳. اگر $\lambda_2 = 0$، آن‌گاه $Y \sim SN(\lambda_1)$.

۴. این توزیع به‌ازای $\lambda_2 > 0$ دونمایی و به‌ازای $\lambda_2 \leqslant 0$ تک‌نمایی است.

۵. اگر Y_1 و Y_2 دو متغیر تصادفی مستقل نرمال استاندارد باشند، آن‌گاه

$$Y_1 \mid Y_2 < \lambda_1 Y_1 + \lambda_2 |Y_1| \sim TPSN(\lambda_1, \lambda_2).$$

۶. توزیع $GTPSN(\lambda_1, \lambda_2)$ آمیخته‌ای از دو توزیع چوله‌نرمال بریده با پارامترهای $\lambda_2 + \lambda_1$ و $\lambda_2 - \lambda_1$ به‌ترتیب برای مقادیر مثبت و منفی متغیر تصادفی Y با توابع چگالی زیر است:

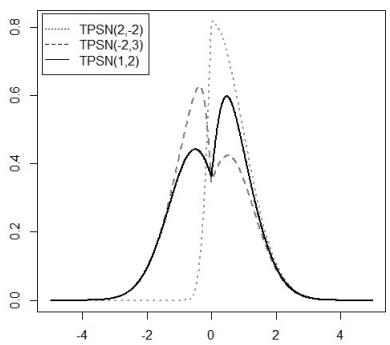
$$f_{Y^+}(y;\lambda_1,\lambda_2) = \frac{2\phi(y)\Phi((\lambda_1+\lambda_2)y)}{\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\tan^{-1}(\frac{\lambda_2}{\sqrt{1+\lambda_1^2}})} I_{(0,+\infty)}(y).$$

و

$$f_{Y^-}(y;\lambda_1,\lambda_2) = \frac{2\phi(y)\Phi((\lambda_1-\lambda_2)y)}{\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\tan^{-1}(\frac{\lambda_2}{\sqrt{1+\lambda_1^2}})} I_{(-\infty,0)}(y).$$

بنا بر این رابطهٔ زیر برقرار است:

$$f_Y(y;\lambda_1,\lambda_2) = \frac{1}{2} f_{Y^+}(y;\lambda_1,\lambda_2) I_{(0,+\infty)}(y) + \frac{1}{2} f_{Y^-}(y;\lambda_1,\lambda_2) I_{(-\infty,0)}(y).$$



شکل ۱. تابع چگالی توزیع چوله‌نرمال دوتکه $GTPSN(\lambda_1, \lambda_2)$ به‌ازای مقادیر مختلف λ_1 , λ_2.

برای جزئیات بیشتر درباره این توزیع وزنی به [۹] مراجعه کنید.

توزیع چوله‌نرمال دوتکه چوله تعمیم‌یافته جمالی‌زاده و دیگران.

تابع وزن $w(y;\lambda_1,\lambda_2,\rho) = \Phi_2(\lambda_1 y, \lambda_2 |y|;\rho)$ را برای تابع چگالی توزیع نرمال درنظر بگیرید. آن‌گاه امید ریاضی این تابع وزن با توجه به قاعده احتمال همه مثبتی کوتز و دیگران [۲۳]، به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned}\frac{1}{C(\lambda_1,\lambda_2,\rho)} &= \mathbb{E}[\Phi_2(\lambda_1 Y, \lambda_2|Y|;\rho)] \\ &= \mathbb{E}[P(U_1 < \lambda_1 Y, U_2 < \lambda_2 |Y|)] \\ &= \frac{1}{4\pi}\left[\cos^{-1}\left(\frac{-(\rho+\lambda_1\lambda_2)}{\sqrt{1+\lambda_1^2}\sqrt{1+\lambda_2^2}}\right)\right. \\ &\quad + \cos^{-1}\left(\frac{-(\rho-\lambda_1\lambda_2)}{\sqrt{1+\lambda_1^2}\sqrt{1+\lambda_2^2}}\right) \\ &\quad \left. + 2\tan^{-1}(\lambda_2)\right].\end{aligned}$$

بنا بر این متغیر تصادفی Y دارای توزیعی با تابع چگالی زیر است:

$$\begin{aligned}f_{GSTPSN}(y;\lambda_1,\lambda_2,\rho) &= C(\lambda_1,\lambda_2,\rho)\phi(y) \\ &\quad \times \Phi_2(\lambda_1 y, \lambda_2|y|;\rho) \quad y,\lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

این توزیع با نماد $Y \sim GSTPSN(\lambda_1,\lambda_2,\rho)$ نشان داده می‌شود. برخی از ویژگی‌های توزیع (۲.۱) عبارت‌اند از:

۱. تابع چگالی فوق به‌ازای $\lambda_2 = 0$ ، λ_1 و $|\rho| < 1$ با توزیع $N(0,1)$ و اگر ρ , $\lambda_2 = 0$، آن‌گاه با $SN(\lambda_1)$ هم‌توزیع خواهد بود. اگر λ_1 و ρ هر دو برابر صفر باشند، آن‌گاه این توزیع همان توزیع $TN(\lambda_2)$ است.

۲. اگر $Y \sim GSTPSN(\lambda_1,\lambda_2,\rho)$، آن‌گاه

$$-Y \sim GSTPSN(-\lambda_1,\lambda_2,\rho).$$

۳. اگر $Y \sim GSTPSN(\lambda_1, \lambda_2, \rho)$ و $\lambda_2 \to \infty$، آن‌گاه

$$Y \sim SN(\lambda_1).$$

۴. اگر $Y \sim GSTPSN(\lambda_1, \lambda_2, \rho)$ و $\lambda_1 \to \infty$، آن‌گاه

$$Y \sim SN^+(\lambda_2).$$

۵. اگر $Y_{\lambda_1,\lambda_2} \sim STPSN(\lambda_1, \lambda_2)$ و $Y_{\lambda_2} \sim TPSN(\lambda_2)$، آن‌گاه به‌ازای هر تابع h، $h(Y_{\lambda_1,\lambda_2}) \stackrel{D}{=} h(Y_{\lambda_2})$ خواهد بود.

۶. اگر $Y \sim N(0,1)$ مستقل از $(U_1, U_2) \sim N_2(0,0,1,1,\rho)$ باشد، آن‌گاه

$$Y \mid (U_1 < \lambda_1 Y, U_2 < \lambda_2 |Y|) \sim GSTPSN(\lambda_1, \lambda_2, \rho).$$

۷. این توزیع به‌ازای $\lambda_2 \leqslant 0$، تک‌نمایی و به‌ازای $\lambda_2 > 0$ دونمایی است.

برای جزئیات بیشتر درباره این توزیع وزنی به [۱۸] مراجعه کنید.

توزیع چوله‌نرمال دوتکه جمالی‌زاده و دیگران.

[۱۸] در توزیع GSTPSN در حالتی که $\rho = 0$ باشد، تابع وزن به‌صورت $w(y, \lambda_1, \lambda_2) = \Phi(\lambda_1 y)\Phi(\lambda_2|y|)$، خواهد بود. آن‌گاه امید ریاضی این تابع وزن با توجه به قاعده احتمال همه‌مثبتی، به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned}\frac{1}{C(\lambda_1, \lambda_2)} &= \mathbb{E}[\Phi(\lambda_1 Y)\Phi(\lambda_2|Y|)] \\ &= \mathbb{E}[P(U_1 < \lambda_1 Y, _2 < \lambda_2|Y|)] \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi}\tan^{-1}(\lambda_2).\end{aligned}$$

بنا بر این تابع چگالی متغیر تصادفی Y به‌صورت زیر باشد:

$$\begin{aligned}f_{STPSN}(y; \lambda_1, \lambda_2) =& \frac{4\pi}{\pi + 2\tan^{-1}(\lambda_2)}\phi(y) \\ &\times \Phi(\lambda_1 y)\Phi(\lambda_2|y|) \\ =& 2 f_{TN}(y; \lambda_2)\Phi(\lambda_1 y), \quad y, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}. \quad (۱۵)\end{aligned}$$

است، که در آن $f_{TN}(y; \lambda)$ همان توزیع کیم [۱۸] است. این توزیع با نماد $Y_{\lambda_1,\lambda_2} \sim STPSN(\lambda_1, \lambda_2)$ نشان داده می‌شود. برخی از ویژگی‌های توزیع (۱۵) عبارت‌اند از:

۱. تابع چگالی (۱۵) به‌ازای $\lambda_2 = 0$ و λ_1 بر چگالی توزیع $N(0,1)$ و به‌ازای $\lambda_2 = 0$ بر چگالی توزیع $SN(\lambda_1)$ و به‌ازای $\lambda_1 = 0$ بر چگالی توزیع $TN(\lambda_2)$ منطبق است.

۲. اگر $Y \sim STPSN(\lambda_1, \lambda_2)$، آن‌گاه

$$-Y \sim STPSN(-\lambda_1, \lambda_2).$$

۳. اگر $Y \sim STPSN(\lambda_1, \lambda_2)$ و $\lambda_2 \to \infty$، آن‌گاه

$$Y \sim SN(\lambda_1).$$

۴. اگر $Y \sim STPSN(\lambda_1, \lambda_2)$ و $\lambda_1 \to \infty$، آن‌گاه $Y \sim SN(\lambda_2)$.

۵. اگر $Y \sim N(0,1)$ و $(U_1, U_2) \sim N_2(0,0,1,1,\rho)$ مستقل باشد، آن‌گاه

$$Y \mid (U_1 < \lambda_1 Y, _2 < \lambda_2 Y) \sim STPSN(\lambda_1, \lambda_2).$$

برای جزئیات بیشتر درباره این توزیع وزنی به [۱۸] مراجعه کنید.

توزیع چوله‌نرمال دوتکه تعمیم‌یافته جمالی‌زاده و دیگران.

[۱۸] تابع وزن $w(y, \lambda_1, \lambda_2,) = \Phi(\lambda_1|y|, \lambda_2|y|; \rho)$ را برای توزیع نرمال در نظر بگیرید، آن‌گاه امید ریاضی این تابع وزن به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}\frac{1}{C(\lambda_1, \lambda_2, \rho)} =& \mathbb{E}[\Phi_2(\lambda_1|Y|, \lambda_2|Y|; \rho)] \\ =& \mathbb{E}[P(U_1 < \lambda_1|Y|, _2 < \lambda_2|Y|)] \\ =& \frac{1}{2\pi}\left[\cos^{-1}\left(\frac{-(\rho + \lambda_1\lambda_2)}{\sqrt{1+\lambda_1^2}\sqrt{1+\lambda_2^2}}\right)\right. \\ &\left. + \tan^{-1}(\lambda_1) + \tan^{-1}(\lambda_2)\right].\end{aligned}$$

متغیر تصادفی Y دارای توزیعی با تابع چگالی زیر است:

$$\begin{aligned}f_{GTPSN}(y; \lambda_1, \lambda_2, \rho) =& C(\lambda_1, \lambda_2, \rho)\phi(y) \\ &\times \Phi(\lambda_1|y|, \lambda_2|y|; \rho) \quad y, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}. \\ &(۱۶)\end{aligned}$$

که با نماد $GTPSN(\lambda_1, \lambda_2, \rho)$ نشان داده می‌شود. برای جزئیات بیشتر درباره این توزیع وزنی به [۱۸] مراجعه کنید.

توزیع چوله‌نرمال دوتکه بالاکریشنان.

[۴] اگر تابع وزن $w(y,\lambda_۱,\lambda_۲)=\Phi(\lambda_۱y+\lambda_۲y^۳)$ باشد، آن‌گاه امید ریاضی این تابع وزن به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned}\frac{۱}{C(\lambda_۱,\lambda_۲)}&=\mathbb{E}\left[\Phi(\lambda_۱Y+\lambda_۲Y^۳)\right]\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(\lambda_۱y+\lambda_۲y^۳)\phi(y)dy\\&=\mathbb{E}\left[P(U\leq\lambda_۱Y+\lambda_۲Y^۳)\right]\\&=\frac{۱}{۲}.\end{aligned}$$

آن‌گاه متغیر تصادفی Y دارای توزیعی با تابع چگالی زیر است:

$$f_{\lambda_۱,\lambda_۲}(y)=۲\phi(y)\Phi(\lambda_۱y+\lambda_۲y^۳),\lambda_۱,\lambda_۲\in\mathbb{R}.$$

این توزیع با نماد $BTPSN(\lambda_۱,\lambda_۲)$ نشان داده می‌شود. برخی از ویژگی‌های این توزیع عبارت‌اند از:

۱. این توزیع به‌ازای $\lambda_۱\geqslant ۰$، تک‌نمایی و به‌ازای $\lambda_۱<۰$، دو مدی است.

۲. اگر $\lambda_۲=۰$، آن‌گاه $Y\sim SN(\lambda_۱)$.

۳. اگر $\lambda_۱\to\infty$، آن‌گاه متغیر تصادفی Y به توزیع نیم‌نرمال میل می‌کند.

۴ نحوه ساخت توزیع‌های نرمال بریده

گاهی مقادیر یک متغیر تصادفی فقط زمانی قابل مشاهده هستند که در نزدیکی یک حد بالایی یا پایینی باشند. در چنین شرایطی همه مقادیر متغیر تصادفی که در خارج این محدوده‌ها قرار می‌گیرند، قابل مشاهده نخواهند بود و اصطلاحاً توزیع مشاهدات بریده شده است. مطالعات بسیاری درباره توزیع‌های نرمال بریده صورت گرفته است، که از آن جمله می‌توان به [۱۵] در زمینهٔ برآورد و آزمون فرض درباره پارامترهای توزیع نرمال بریده شده، [۱۶] در زمینهٔ برآورد پارامترهای رگرسیونی داده‌های از چپ بریده شده و [۶] در زمینهٔ برآورد پارامترهای توزیع نرمال بریده شده، اشاره نمود.

اگر تابع وزن مورد استفاده در یک توزیع موزون، تابعی نشان‌گر باشد. آن‌گاه توزیع موزون حاصل، یک توزیع بریده شده خواهد بود.

توزیع نرمال بریده شده از راست.

وقتی‌که مقادیر یک متغیر تصادفی کوچک‌تر از یک حد بالایی (نقطه برش از راست) هستند و هم‌چنین زمانی‌که همهٔ مقادیر بزرگ‌تر از حدود بالایی قابل مشاهده نمی‌باشند، توزیع از راست بریده خواهد بود.

در صورتی‌که $w(y,a)=I_{(-\infty,a)}(y)$ به‌عنوان تابع وزن برای توزیع نرمال انتخاب شود، امید ریاضی تابع وزن به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\mathbb{E}\left(I_{(-\infty,a)}(Y)\right)=\int_{-\infty}^{a}\phi(y)dy=\Phi(a),$$

بر این‌اساس، متغیر تصادفی Y دارای توزیع نرمال بریده شده از راست با تابع چگالی به‌صورت زیر خواهد بود:

$$f_w(y)=\frac{I_{(-\infty,a)}(y)}{\Phi(a)}\phi(y),\qquad(۱۷)$$

توزیع نرمال بریده شده از چپ.

اگر مقادیر یک متغیر تصادفی فقط به‌ازای مقادیر بزرگ‌تر از یک حد پایین قابل مشاهده باشند، آن‌گاه توزیع متغیر تصادفی از چپ بریده است.

در صورتی‌که $w(y,b)=I_{(b,+\infty)}(y)$ به‌عنوان تابع وزن برای توزیع نرمال انتخاب شود، آن‌گاه امید ریاضی این تابع وزن به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\mathbb{E}\left(I_{(b,+\infty)}(Y)\right)=\int_{b}^{+\infty}\phi(y)dy=۱-\Phi(b),$$

بنا بر این متغیر تصادفی Y دارای توزیع نرمال بریده شده از چپ با تابع چگالی به‌صورت زیر خواهد بود:

$$f_w(y)=\frac{I_{(b,+\infty)}(y)}{۱-\Phi(b)}\phi(y),\qquad(۱۸)$$

توزیع نرمال از دو سو بریده شده.

وقتی مقادیر یک متغیر تصادفی فقط بین یک دامنه متناهی قابل مشاهده باشد، مشاهدات حاصل از دو طرف بریده خواهند بود. ساده‌ترین مثال مربوط به وقتی است که مشاهدات از یک حد

پایینی بزرگ‌تر و کوچک‌تر از یک مقدار حد بالایی باشند.
در صورتی‌که $w(y,a,b) = I_{(a,b)}(y)$ به‌عنوان تابع وزن برای توزیع نرمال انتخاب شود، آن‌گاه امید ریاضی تابع وزن به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\mathbb{E}\left(I_{(a,b)}(Y)\right) = \int_a^b \phi(y)dy = \Phi(b) - \Phi(a),$$

بر این‌اساس، متغیر تصادفی Y دارای توزیع نرمال از دو سو بریده شده با تابع چگالی زیر خواهد بود:

$$f_w(y) = \frac{I_{(a,b)}(y)}{\Phi(b) - \Phi(a)}\phi(y), \qquad (۱۹)$$

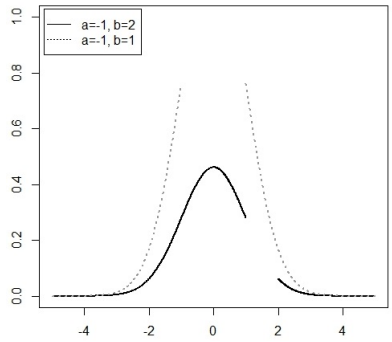
توزیع نرمال از میان بریده شده.

در صورتی‌که تابع $w(y,a,b) = I_{(-\infty,a]\cup[b,+\infty)}(y)$ به‌عنوان تابع وزن برای توزیع نرمال انتخاب شود، آن‌گاه امید ریاضی این تابع وزن به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(I_{(-\infty,a]\cup[b,+\infty)}(Y)\right) &= \int_{-\infty}^{a} \phi(y)dy + \int_b^{+\infty} \phi(y)dy \\ &= ۱ - \Phi(b) + \Phi(a).\end{aligned}$$

بر این‌اساس، متغیر تصادفی Y دارای توزیعی با تابع چگالی زیر خواهد بود:

$$f_w(y) = \frac{I_{(-\infty,a]\cup[b,+\infty)}(y)}{۱ - \Phi(b) + \Phi(a)}\phi(y), \qquad (۲۰)$$



شکل ۲. تابع چگالی نرمال از میان بریده شده به‌ازای مقادیر مختلف برش

۵ بحث و نتیجه‌گیری

استفاده از توزیع موزون یکی از راهکارهای ارائه شده برای مواجهه با مشکلات ناشی از عدم برازش مناسب مدل‌های احتمالاتی مرسوم و متقارن به مشاهدات چوله، دو یا چند نمایی و بریده شده است. در سال‌های اخیر، برخی از محققان کوشیده‌اند مباحث مرتبط با توزیع‌های احتمالاتی مختلف را یکپارچه سازند. نتایج این تحقیقات نشان می‌دهد که همه تلاش‌هایی که تا کنون انجام شده و به ارائه خانواده‌های متنوعی از توزیع‌های احتمالاتی جدید تحت عنوان مختلفی مانند توزیع‌های چوله-متقارن، توزیع‌های دو یا چند نمایی، توزیع‌های بریده شده و غیره انجامیده است، در واقع در قالب توزیع‌های وزنی قابل مطالعه و بررسی هستند. برای ایجاد سهولت در استفاده از نتایج، خلاصه‌ای از تحقیقات شاخص در این زمینه در قالب سه جدول برای توزیع‌های چوله‌نرمال موزون تک‌نمایی، توزیع‌های چوله‌نرمال موزون دونمایی و توزیع نرمال موزون بریده شده، ارائه شده‌اند.

جدول۱. تابع چگالی توزیع‌های نرمال وزنی با ساختار چوله-متقارن به‌ازای توابع وزن متناظر آنها.

نام توزیع	تابع وزن	تابع چگالی توزیع نرمال وزنی
چوله‌نرمال آزالینی (۱۹۸۵) (SN)	$w(y,\lambda)=\Phi(\lambda y)$	$f(y;\lambda)=2\phi(y)\Phi(\lambda y)$ $y,\lambda\in\mathbb{R}$
چوله‌نرمال آرلانوواله و دیگران (۲۰۰۴) (SGN)	$w(y,\lambda_1,\lambda_2)=\Phi(\frac{\lambda_1 y}{\sqrt{1+\lambda_2 y^2}})$	$f(y;\lambda_1,\lambda_2)=2\phi(y)\Phi(\frac{\lambda_1 y}{\sqrt{1+\lambda_2 y^2}})$ $y,\lambda_1\in\mathbb{R}\quad \lambda_2\geq 0$
چوله‌نرمال خمیده آرلانوواله و دیگران (۲۰۰۴) (SCN)	$w(y,\lambda)=\Phi(\frac{\lambda y}{\sqrt{1+\lambda^2 y^2}})$	$f(y;\lambda)=2\phi(y)\Phi(\frac{\lambda y}{\sqrt{1+\lambda^2 y^2}})$ $y,\lambda\in\mathbb{R}$
تعمیم چوله‌نرمال آرلانوواله و دیگران (۲۰۰۴) (SGN_n)	$w(y,\lambda_1,\lambda_2)=[\Phi(\frac{\lambda_1 y}{\sqrt{1+\lambda_2 y^2}})]^n$	$f(y;\lambda_1,\lambda_2)=C_n(\lambda_1,\lambda_2)[\Phi(\frac{\lambda_1 y}{\sqrt{1+\lambda_2 y^2}})]^n\phi(y)$ $y,\lambda_1\in\mathbb{R}\quad \lambda_2\geq 0,\in\mathbb{N}$
چوله‌نرمال بالاکریشنان (۲۰۰۲) (BSN_n)	$w(y,\lambda)=[\Phi(\lambda y)]^n$	$f(y;\lambda)=C_n(\lambda)\phi(y)[\Phi(\lambda y)]^n$ $y,\lambda\in\mathbb{R},\quad n\in\mathbb{N}$
چوله‌نرمال تعمیم‌یافته یادگاری و دیگران (۲۰۰۸) $(GSN_{(n,m)})$	$w(y,\lambda)=\Phi(\lambda y)]^n[1-\Phi(\lambda y)]^m$	$f(y;\lambda)=C_{n,m}(\lambda)\phi(y)[\Phi(\lambda y)]^n[1-\Phi(\lambda y)]^m$ $y,\lambda\in\mathbb{R},\quad n,m\in\mathbb{N}$
چوله‌نرمال آرنولد و بیور (۲۰۰۲) (SNA)	$w(y,\lambda_1,\lambda_2)=\Phi(\lambda_1+\lambda_2 y)$	$f(y;\lambda_1,\lambda_2)=\phi(y)\frac{\Phi(\lambda_1+\lambda_2 y)}{\Phi(\frac{\lambda_1}{\sqrt{1+\lambda_2^2}})}$ $y,\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$
چوله‌نرمال کشی ناداراجا و کوتز (۲۰۰۳) (SNC)	$w(y,\lambda)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan(\lambda y)$	$f(y;\lambda)=2\phi(y)\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan(\lambda y)\right\}$ $y,\lambda\in\mathbb{R}$
چوله‌نرمال لوژستیک ناداراجا و کوتز (۲۰۰۳) (SNL)	$w(y,\lambda)=\frac{1}{1+\exp(-\lambda y)}$	$f(y;\lambda)=2\phi(y)/\{1+\exp(-\lambda y)\}$ $y,\lambda\in\mathbb{R}$
چوله‌نرمال لاپلاس ناداراجا و کوتز (۲۰۰۳) (SNL)	$w(y,\lambda)=H(\lambda y)$ تابع توزیع تجمعی توزیع لاپلاس	$f(y;\lambda)=2\phi(y)H(\lambda y)$ $y,\lambda\in\mathbb{R}$
چوله‌نرمال یکنواخت ناداراجا و کوتز (۲۰۰۳) (SNU)	$w(y,\lambda)=\left[\frac{\lambda y+h}{2h}\right]$	$f(y;\lambda)=2\phi(y)\left[\frac{\lambda y+h}{2h}\right]$ $-h\leqslant y<h,\quad \lambda\in\mathbb{R}$
چوله‌نرمال t-استودنت ناداراجا و کوتز (۲۰۰۳) (SNt)	$w(y,\lambda)=H(\lambda y)$ تابع توزیع تجمعی توزیع t-استودنت	$f(y;\lambda)=2\phi(y)H(\lambda y)$ $y,\lambda\in\mathbb{R}$
چوله‌نرمال تعمیم‌یافته جمالی‌زاده و دیگران (۲۰۰۸) (GSN)	$w(y;\lambda_1,\lambda_2,\rho)=\Phi_2(\lambda_1 y,\lambda_2 y;\rho)$	$f(y;\lambda_1,\lambda_2,\rho)=C(\lambda_1,\lambda_2,\rho)\phi(y)\Phi_2(\lambda_1 y,\lambda_2 y;\rho)$ $y,\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R},\quad \lvert\rho\rvert\leqslant 1$ $C(\lambda_1,\lambda_2,\rho)=\frac{2\pi}{\cos^{-1}\left(\frac{-(\rho+\lambda_1\lambda_2)}{\sqrt{1+\lambda_1^2}\sqrt{1+\lambda_2^2}}\right)}$
چوله‌نرمال تعمیم‌یافته جمالی‌زاده و دیگران (۲۰۰۸) (GSN)	$w(y;\lambda_1,\lambda_2)=\Phi(\lambda_1 y)\Phi(\lambda_2 y)$	$f(y;\lambda_1,\lambda_2)=C(\lambda_1,\lambda_2)\phi(y)\Phi(\lambda_1 y)\Phi(\lambda_2 y)$ $y,\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$ $C(\lambda_1,\lambda_2)=\frac{2\pi}{\cos^{-1}\left(\frac{-\lambda_1\lambda_2}{\sqrt{1+\lambda_1^2}\sqrt{1+\lambda_2^2}}\right)}$

جدول ۲. تابع چگالی توزیع‌های نرمال وزنی با ساختار دونمایی به‌ازای توابع وزن متناظر آنها.

نام توزیع	تابع وزن	تابع چگالی توزیع نرمال وزنی
چوله‌نرمال دوتکه کیم (۲۰۰۵) (TN)	$w(y,\lambda)=\Phi(\lambda\lvert y\rvert)$	$f(y;\lambda)=\frac{2\pi}{\pi+2\tan^{-1}(\lambda)}\phi(y)\Phi(\lambda\lvert y\rvert)$ $y,\lambda\in\mathbb{R}$
چوله‌نرمال دوتکه چاره و فلاح (۲۰۱۱) $(TPSN)$	$w(y;\lambda_1,\lambda_2)=\Phi(\lambda_1 y+\lambda_2\lvert y\rvert)$	$f(y;\lambda_1,\lambda_2)=\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\tan^{-1}(\frac{\lambda_2}{\sqrt{1+\lambda_1^2}})}\phi(y)\Phi(\lambda_1 y+\lambda_2\lvert y\rvert)$ $y,\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$
چوله‌نرمال دوتکه چوله جمالی‌زاده و دیگران (۲۰۱۱) $(STPSN)$	$w(y,\lambda_1,\lambda_2)=\Phi(\lambda_1 y)\Phi(\lambda_2\lvert y\rvert)$	$f(y;\lambda_1,\lambda_2)=\frac{4\pi}{\pi+2\tan^{-1}(\lambda_2)}\phi(y)\Phi(\lambda_1 y)\Phi(\lambda_2\lvert y\rvert)$ $y,\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$
چوله‌نرمال دوتکه چوله تعمیم‌یافته جمالی‌زاده و دیگران (۲۰۱۱) $(GSTPSN)$	$w(y;\lambda_1,\lambda_2,\rho)=\Phi(\lambda_1 y,\lambda_2\lvert y\rvert;\rho)$	$f(y;\lambda_1,\lambda_2,\rho)=C^*(\lambda_1,\lambda_2,\rho)\phi(y)\Phi_2(\lambda_1 y,\lambda_2\lvert y\rvert;\rho)$ $y,\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$
چوله‌نرمال دوتکه تعمیم‌یافته جمالی‌زاده و دیگران (۲۰۱۱) $(GTPSN)$	$w(y;\lambda_1,\lambda_2,\rho)=\Phi(\lambda_1\lvert y\rvert,\lambda_2\lvert y\rvert;\rho)$	$f(y;\lambda_1,\lambda_2,\rho)=C^{**}(\lambda_1,\lambda_2,\rho)\phi(y)\Phi_2(\lambda_1\lvert y\rvert,\lambda_2\lvert y\rvert;\rho)$ $y,\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$
چوله‌نرمال دوتکه بالاکریشنان (۲۰۰۲) $(BTPSN)$	$w(y,\lambda_1,\lambda_2)=\Phi(\lambda_1 y+\lambda_2 y^3)$	$f(y;\lambda_1,\lambda_2)=2\phi(y)\Phi(\lambda_1 y+\lambda_2 y^3)$ $y,\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$

$$C^*(\lambda_1,\lambda_2,\rho)=\frac{4\pi}{\cos^{-1}\left(\frac{-(\rho+\lambda_1\lambda_2)}{\sqrt{1+\lambda_1^2}\sqrt{1+\lambda_2^2}}\right)+\cos^{-1}\left(\frac{-(\rho-\lambda_1\lambda_2)}{\sqrt{1+\lambda_1^2}\sqrt{1+\lambda_2^2}}\right)+2\tan^{-1}(\lambda_2)}$$

$$C^{**}(\lambda_1,\lambda_2,\rho)=\frac{2\pi}{\cos^{-1}\left(\frac{-(\rho+\lambda_1\lambda_2)}{\sqrt{1+\lambda_1^2}\sqrt{1+\lambda_2^2}}\right)+\tan^{-1}(\lambda_1)+\tan^{-1}(\lambda_2)}$$

جدول ۳. تابع چگالی توزیع‌های نرمال وزنی با ساختار بریده به‌همراه توابع وزن متناظر آنها.

نام توزیع	تابع وزن	تابع چگالی توزیع نرمال وزنی
نرمال بریده شده از راست	$w(y,a)=I_{(-\infty,a)}(y)$	$f_w(y)=\frac{I_{(-\infty,a)}(y)}{\Phi(a)}\phi(y)$
نرمال بریده شده از چپ	$w(y,b)=I_{(b,+\infty)}(y)$	$f_w(y)=\frac{I_{(b,+\infty)}(y)}{1-\Phi(b)}\phi(y)$
نرمال از دو سو بریده شده	$w(y,a,b)=I_{(a,b)}(y)$	$f_w(y)=\frac{I_{(a,b)}(y)}{\Phi(b)-\Phi(a)}\phi(y)$
نرمال از میان بریده شده	$w(y,a,b)=I_{(-\infty,a]\cup[b,+\infty)}(y)$	$f_w(y)=\frac{I_{(-\infty,a]\cup[b,+\infty)}(y)}{1-\Phi(b)+\Phi(a)}\phi(y)$

مراجع

[1] Arellano-Valle, R. B. Branco, M. C. and Genton, M. G. (2006). A unified view on skewed distributions arising from selections, *The Canadian Journal of Statistics*, **34(4)**, 581-601.

[2] Arellano-Valle, R. B., Gomez, H. W. and Quintana, F. A. (2004). A new class of skew-normal distribution, *Communication in Statistics – Theory and Methods*, **33**, 1465-1480.

[3] Arnold, B. C. and Beaver, R. J. (2000a). Some skewed multivariate distributions, *American Journal of Mathematical Management Science*, **20**, 27-38.

[4] Azzalini, A. (1985). A class of distributions which includes the normal ones, *Scandinavian Journal of Statistics*, **12**, 171-178.

[5] Balakrishnan, N. (2002). Discussion on ”Skew Multivariate Models Related to Hidden Truncation and/or Selective Reporting”, *Test*, **11**, 37-39.

[6] Bradford, R. C. (1979). Estimating the parameters of a truncated normal distribution, *Applied Mathematics and computation*, **5**, 149-156.

[7] Celestin, C. and Mizere, D. (2005). Overdispersion and underdispersion characterization of weigthed possion distributions, *LMA Technical Report*, 5-23.

[8] Chakraborty, S. and Das, K. (2006). On some properties of a class of weigthed quasi-binomial distributions, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **136**, 159–182.

[9] Fallah, A. and Chareh, H. (2011). Incorporating various distributional properties using weight distributions, *Journal of Statistical Sciences, In Persian*,**4(2)**, 167-182.

[10] Ferreira, C. S. D., Bolfarine, B. H. and Victor H. Lachos, C. V. H. (2011). Skew scale mixtures of normal distributions: Properties and estimation, *Statistical Methodology*, **8**, 154-171.

[11] Fisher, R. A. (1934). The effect of models of ascertainment upon the estimation of frequencies. *Annals of Eugenics*, **6**,13–25.

[12] Guillamon, A., Navarro, J. and Ruizj, M. (1998). Kernel density estimation using weigthed data, *Communication in Statistic Theory and Methods*, **27**, (**9**), 2123-2135.

[13] Gupta, A. K., Chang, F. C. and Huang, W. J. (2002). Some skew-symmetric models, *Random Operators and Stochastic Equations*, **10**, (**2**), 133-140.

[14] Gupta, R. C. and Gupta, R. D. (2004). Generalized skew-normal model, *Test*, **13** (**2**), 501-524.

[15] Hattaway, J. T. (2010). Parameter estimation and hypothesis testing for the truncated normal distribution with applications to introductory satistics grades, *Thesis of Department of Statistics Brigham Young University*, 1-69.

[16] He, S. and Yang, G. L. (2003). Estimation of regresion parameters with left truncated data, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **117**, 99-122.

[17] Jamalizadeh, A., Behboodian, J. and Balakrishnan, N. (2008). A two-parameter generalized skew-normal distribution, *Statistical and Probability Letters*,**78**, 1722-1728.

[18] Jamalizadeh, A., Arabpour, A. R. and Balakrishnan, N. (2011). A generalized skew two-piece skew-normal distribution, *Statistical Papers*, **52**, 431–446.

[19] Jones, M. C. (1990). The relationship between moments of truncated and original distributions plus some other simple structural properties of weighted distributions, *Metrika*, **37**, 233-243.

[20] Klein, I. and Fischer, M. (2006). Skewness by splitting the scale parameter, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **35**(**7**), 1159-1171.

[21] Kim, H. J. (2005). On a class of two-piece skew-normal distributions, *Journal of Theoretical and Applied Statistics*, **39**(**6**), 537-553.

[22] Kochar, S. C. and Gupta, R. P. (1987). Some results on weighted distributions for positive valued random variables, *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, **1**, 417-423.

[23] Kotez, S., Balakrishnan, N. and Johnson, N. L. (2000). *Continuous Multivariate Distributions*, Wiley Series in Probability and Statistics, Second Edition.

[24] Nadarajah, S. and Kotz, S. (2003). Skewed distributions generated by the normal kernel, *Statistics Probability Letters*, **65**(**3**), 269-277.

[25] Patil, G. P. and Rao, C. R. (1978). Weighted distributions and size-biased sampling with applications to wildlife populations and human families, *Biometrics*,**34**, 179-89.

[26] Rao, C. R. (1965). On discrete distributions arising out of methods of ascertainment, *Sankhya*, **27**, 311-324.

[27] Steck, G. P. (1962). Orthant probability for the equicorrelated multivariate normal distribution, *Biometrika*, **49**, 433-445.

[28] Yadegari, I., Gerami, A. and Khaledi, M. J. (2008). A generalization of the balakrishnan skew-normal distribution, *Statistics Probability Letters*, **78**, 1165-1167.