

## مانده‌های ورونوی و کاربرد آنها در ارزیابی برازش مدل‌های فرایند نقطه‌ای: یک مطالعه کاربردی

حمیده ارژنگ دمیرچی<sup>۱</sup>، رضا پورطاهری<sup>۲</sup>

تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۴/۱۹

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۸/۲۴

### چکیده:

مدل‌های فرایند نقطه‌ای زیادی برای بررسی انواع رشته‌های علمی از قبیل: زمین‌شناسی، پزشکی، ستاره‌شناسی، جنگل‌داری، محیط زیست و غیره پیشنهاد شده‌اند. مسئله ارزیابی برازش این مدل‌ها مهم است. روش‌هایی بر مبنای مانده‌ها، ابزارهای مناسبی برای ارزیابی نیکویی برازش مدل‌های فرایند نقطه‌ای فضایی هستند. در این مقاله ابتدا مفاهیم مرتبط با مانده‌های ورونوی بررسی می‌شود، در ادامه پس از برازش یک فرایند نقطه‌ای خوشه‌ای به مجموعه داده‌های موقعیت درختان جنگل گیلان، با استفاده از این مانده‌ها مدل پیشنهاد شده ارزیابی می‌شود.

**واژه‌های کلیدی:** فرایند نقطه‌ای فضایی، الگوی نقطه‌ای فضایی، خانه ورونوی، سنگ‌فرش ورونوی، مانده‌های ورونوی.

### ۱ مقدمه

روش‌ها است. مانده‌ها و مباحث تشخیصی برای فرایند نقطه‌ای زمانی از سال ۱۹۷۰ و در مباحث فرایند سیگنال و تحلیل بقا به وجود آمدند. تعریف مانده‌های فرایند نقطه‌ای فضایی باید تعمیم طبیعی مانده‌های فرایند نقطه‌ای زمانی باشد که به طور معمول در تحلیل بقا به کار می‌رود. چنین تعمیمی برای فرایند نقطه‌ای فضایی به دلیل فقدان ترتیب طبیعی در فضاهای دوبعدی امکان ندارد. بعد از یک تغییر نگرش پیچیده این تعمیم امکان‌پذیر شد. این تغییر نگرش، جایگزینی تابع شدت شرطی معمول فرایند با تابع شدت شرطی پاپانجلو<sup>۸</sup> در فرایند فضایی بود. بدیلی و دیگران [۶] انواع مانده‌ها را با استفاده از تابع شدت شرطی پاپانجلو برای فرایند نقطه‌ای متناهی در  $\mathbb{R}^2$  معرفی کردند. با

فرایند نقطه‌ای در زمینه‌های مختلف علمی مانند نجوم، زیست‌شناسی، محیط زیست، زمین‌شناسی، پزشکی، فیزیک، پردازش تصویر، ارتباط از راه دور و غیره به کار می‌رود. امروزه مدل‌های فرایند نقطه‌ای<sup>۳</sup> زیادی برای توصیف و پیش‌بینی رخ داده‌ها<sup>۴</sup> در زمینه‌های مختلف به عنوان مثال برای توصیف و پیش‌بینی رخ داده‌های زلزله در مناطق زلزله‌خیز، پیشنهاد شده‌اند. ارزیابی نیکویی برازش<sup>۵</sup> مدل‌های پیشنهادی به رخ داده‌های مشاهده شده از جمله مهم‌ترین موضوعاتی هستند که نیاز به بررسی دارند. برای ارزیابی نیکویی برازش، روش‌های زیادی ارائه کرده‌اند. ابزارهای تشخیصی<sup>۶</sup> بر مبنای مانده‌ها<sup>۷</sup> یکی از این

<sup>۱</sup> دانش‌آموخته کارشناسی ارشد، آمار، دانشگاه علامه طباطبایی، ایران

<sup>۲</sup> هیأت علمی گروه آمار، دانشگاه علامه طباطبایی، ایران

<sup>۳</sup> Point Process

<sup>۴</sup> Events

<sup>۵</sup> Goodness of Fit

<sup>۶</sup> Diagnostic Tools

<sup>۷</sup> Residuals

<sup>۸</sup> Papangelou Conditional Intensity

<sup>۹</sup> Spatial Point Pattern

بیان می‌شود.

الگوی نقطه‌ای فضایی، مجموعه‌ای از مکان‌های فضایی اشیاء یا رخ داده‌های مشاهده شده است. به عبارتی به مجموعه  $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  الگوی نقطه‌ای فضایی موضعاً متناهی<sup>۱۲</sup> می‌گویند که در آن  $x_i$  نشان‌دهنده مکان  $i$ -امین رخداد است. رخداد مذکور ممکن است مکان وقوع زلزله، مکان درختان در یک جنگل، مکان جانوران در یک زیستگاه، مکان چاه‌های نفت، مکان ستارگان در کهکشان، مکان معادن فلزات، مکان جغرافیایی مشاهده یک بیماری و غیره باشد. در روش شناسی فرایند نقطه‌ای مکان رخداد معین، نقطه نامیده می‌شود. به منظور ایجاد روش‌های آماری برای تحلیل الگوهای نقطه‌ای، به مفهوم فرایند نقطه‌ای نیاز است. فرایند نقطه‌ای یک مکانیسم تصادفی است که در فضای اقلیدسی تعریف می‌شود و نتیجه حاصل از آن یک الگوی نقطه‌ای است. فرایند نقطه‌ای به سه دسته فرایند نقطه‌ای زمانی، فضایی و فضایی-زمانی تقسیم می‌شود. تمرکز اصلی ما بر روی فرایند نقطه‌ای فضایی است. در آمار، فرایند نقطه‌ای موضوع و ابزار نیرومندی برای مدل‌بندی و تحلیل الگوهای نقطه‌ای فضایی است. رفتار الگوی نقطه‌ای فضایی به عنوان یک تحقق از فرایند نقطه‌ای فضایی فرض می‌کند که الگو، تصادفی است یعنی مکان و تعداد نقاط ثابت نیست. الگوهای نقطه‌ای فضایی حاصل از فرایند نقطه‌ای فضایی به سه رده زیر تقسیم می‌شوند [۱۴]:

الف الگوهای تصادفی کامل فضایی<sup>۱۳</sup> (برای اختصار CSR می‌گویند).

ب الگوهای انبوهشی (خوشه‌ای<sup>۱۴</sup>)

ج الگوهای منظم<sup>۱۵</sup>

در شکل ۱ انواع الگوهای نقطه‌ای فضایی رسم شده‌اند. در این شکل (الف) الگوی نقطه‌ای تصادفی کامل، (ب) الگوی نقطه‌ای خوشه‌ای و (ج) الگوی نقطه‌ای منظم است.

استفاده از مانده‌هایی که معرفی نمودند به ارزیابی مدل‌های فرایند نقطه‌ای برازش شده به الگوی نقطه‌ای فضایی<sup>۱۶</sup> پرداختند. خواص مانده‌ها به وسیله بدیلی و دیگران [۷] مورد بحث قرار گرفتند. بدیلی و دیگران [۸] از مانده‌ها، با استفاده از آماره‌های امتیاز و شبه‌امتیاز برای استنباط رسمی استفاده کردند. لاوسون بیان کرد مانده‌های معرفی شده در بدیلی و دیگران [۶] با توجه به این که تابعی از  $B$  هستند ( $B$  مجموعه بول کراندار از پنجره مشاهده<sup>۱۷</sup>  $W \subset \mathbb{R}^2$  است)، به نحوه انتخاب  $B$  بستگی دارند، که در این مورد بحث نشده است. این نگرانی یک انگیزه اصلی شد که بری [۱۱] به پژوهش با عنوان «انتخاب افراز برای مدل‌های فرایند نقطه‌ای فضایی» پردازد. بری [۱۱] تأثیر انتخاب افراز بر تحلیل مانده‌های حاصل را بررسی کرد و یک شکل جدید از افراز را که بر مبنای سنگ‌فرش ورونوی<sup>۱۸</sup> است، پیشنهاد داد که منجر به ایجاد مانده ورونوی<sup>۱۱</sup> شد. مانده‌های ورونوی توسط بری و دیگران [۱۲] در ارزیابی مدل‌های فرایند نقطه‌ای فضایی پیش‌بینی زلزله کالیفرنیا استفاده شدند. این مقاله از پنج بخش تشکیل شده است. در بخش ۲ فرایند نقطه‌ای فضایی معرفی می‌شود. در بخش ۳ مانده‌های ورونوی را مطرح می‌شود. در بخش ۴ در باره تعیین نوع الگوی نقطه‌ای مشاهده شده، بحث می‌شود. در بخش ۵ نوع الگوی نقطه‌ای مکان رویش درختان جنگلی گیلان تعیین می‌شود. سپس با استفاده از مانده‌های ورونوی به ارزیابی مدل برازش شده به الگوی نقطه‌ای مکان رویش درختان جنگلی گیلان پرداخته می‌شود.

## ۲ فرایند نقطه‌ای فضایی و الگوی نقطه‌ای حاصل از آن

در این بخش ابتدا فرایند نقطه‌ای فضایی و الگوی نقطه‌ای حاصل از آن را به طور شهودی معرفی کرده سپس تعریف رسمی آنها

<sup>۱۰</sup> Voronoi Tessellation

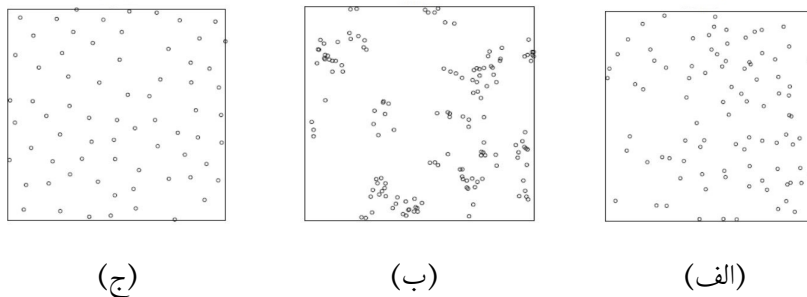
<sup>۱۱</sup> Voronoi Residuals

<sup>۱۲</sup> Locally Finite

<sup>۱۳</sup> Completely Spatial Randomness Point Pattern

<sup>۱۴</sup> Cluster

<sup>۱۵</sup> Regular Point Pattern



شکل ۱. انواع الگوهای نقطه‌ای فضایی

وقوع یک رخداد در بعضی نقاط نسبت به نقاط دیگر می‌شود. حتی ممکن است از وقوع یک رخداد در یک نقطه جلوگیری کند در این حالت انتظار داریم بعضی قسمت‌های ناحیه مورد مطالعه نسبت به سایر قسمت‌ها رخداد بیش‌تری داشته باشد و در نتیجه یک الگوی خوشه‌ای مشاهده گردد. وجود تعامل بین نقاط موجب نقض فرض استقلال می‌شود و در این صورت رخ داده‌ها ممکن است یک‌دیگر را جذب یا دفع کنند. فرایندهای نقطه‌ای کاکس<sup>۲۰</sup> و نیمین-اسکات<sup>۲۱</sup> از جمله فرایندهای نقطه‌ای هستند که تعامل بین نقاط از نوع جاذبه است و منجر به تولید الگوهای نقطه‌ای خوشه‌ای می‌شود. در فرایندهای نقطه‌ای مارکوف معمولاً تعامل بین نقاط از نوع دافعه است و منجر به الگوهای نقطه‌ای منظم می‌شوند. فرض کنید  $S$  یک فضای متریک تفکیک پذیر<sup>۲۲</sup> با متر اقلیدسی  $(\xi, \eta \in S)$   $d(\xi, \eta) = \|\xi - \eta\|$  باشد و فضایی است که در آن تحقق‌های فرایند نقطه‌ای رخ می‌دهند بنا بر این آن را فضای وضعیت<sup>۲۳</sup> فرایند نیز می‌نامند. در عمل به‌جای همه  $S$  اغلب بخشی از فضا در قالب یک پنجره مشاهده کراندار  $W \subseteq S$  بررسی می‌شود. هر زیر مجموعه  $S$ ، یک الگوی نقطه‌ای محسوب نمی‌شود و فقط زیرمجموعه‌های موضعاً متناهی یک الگوی نقطه‌ای در  $S$  هستند.

با توجه به این الگوهای نقطه‌ای رسم شده مشاهده می‌شود در الگوی نقطه‌ای تصادفی کامل بین نقاط تعاملی<sup>۱۶</sup> (دافعه<sup>۱۷</sup> یا جاذبه<sup>۱۸</sup>) وجود ندارد. در الگوی نقطه‌ای خوشه‌ای تعامل بین نقاط از نوع جاذبه است و نقاط تمایل به تجمع در برخی از ناحیه‌ها دارند. در الگوی نقطه‌ای منظم تعامل بین نقاط از نوع دافعه است. در این الگوی نقطه‌ای هیچ دو پیشامدی که فاصله آنها از یک‌دیگر کم‌تر از مقدار معینی باشد، مشاهده نمی‌شوند. هر الگوی نقطه‌ای CSR تحقق از یک فرایند نقطه‌ای پواسون همگن<sup>۱۹</sup> است. در این فرایند، نقاط در ناحیه مورد مطالعه تحت شرایط زیر تحقق می‌یابند:

(الف) احتمال وقوع هر رخداد در همه نقاط ناحیه مورد مطالعه یکسان است (ناحیه مورد مطالعه از هر نظر کاملاً همگن است).

(ب) وقوع یک رخداد در یک نقطه تأثیری در وقوع رخ دادهای دیگر در دیگر نقاط ناحیه مورد مطالعه ندارد (بین رخ دادهای تعاملی وجود ندارد).

تغییر یک یا هر دو شرط فرایند نقطه‌ای پواسون همگن موجب تحقق الگوهای نقطه‌ای خوشه‌ای یا منظم می‌گردد. شرط (الف)، شرط یکنواختی نامیده می‌شود و یک راه تغییر آن، ناهمگن شدن ناحیه مورد مطالعه است. ناهمگنی موجب کاهش احتمال

<sup>۱۶</sup> Interaction

<sup>۱۷</sup> Repulsive

<sup>۱۸</sup> Attractive

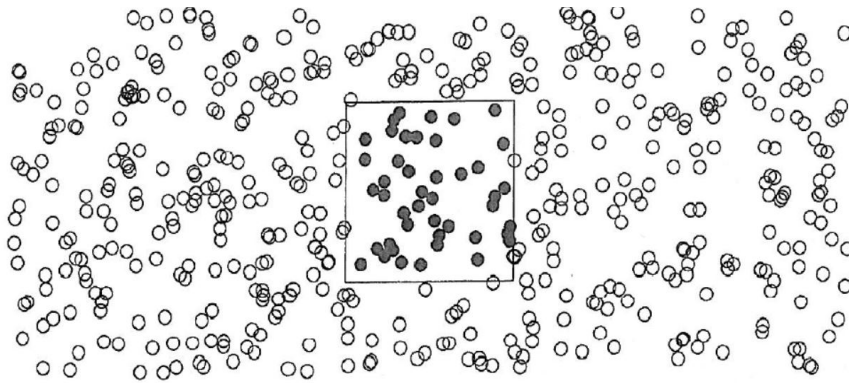
<sup>۱۹</sup> Homogeneous Poisson point process

<sup>۲۰</sup> Cox

<sup>۲۱</sup> Neyman-Scott

<sup>۲۲</sup> Separable

<sup>۲۳</sup> Status Space



شکل ۲. فرایند نقطه‌ای و الگوی نقطه‌ای مشاهده‌شده از آن در پنجره مشاهده

اندازه پذیر است، زیرا به ازای هر  $M \subseteq I$  داریم  $f_B^{-1}(M) \in \mathcal{N}$ .  
**تعریف ۲.۲.** [۱۹] فرض کنید  $S$  یک فضای متریک تفکیک پذیر باشد.  $N$  و  $\mathcal{N}$  به صورت (۱) و (۲) تعریف شده باشند. اگر  $X$  یک تابع اندازه‌پذیر از فضای احتمال  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  به فضای اندازه‌پذیر  $(N, \mathcal{N})$  باشد، آنگاه  $X$  یک فرایند نقطه‌ای روی  $S$  نامیده می‌شود.

جهت تعمیم نتیجه به دست آمده از الگوی نقطه‌ای مشاهده‌شده در پنجره  $W$  به کل فرایند نقطه‌ای فرض می‌شود فرایند نقطه‌ای مانا و همسانگرد است.

### ۳ مانده ورونوی

در این بخش با مانده ورونوی و ویژگی‌های آن معرفی می‌شود.  
**تعریف ۱.۳.** [۱۱] به ازای هر نقطه  $x_i$  از یک الگوی نقطه‌ای حاصل از فرایند نقطه‌ای، خانه ورونوی<sup>۲۴</sup> متناظر با آن به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$C_i = \{x \in W : \|x - x_i\| \leq \|x - x_j\|, \forall j \neq i\} \quad (۳)$$

$C_i$  ناحیه‌ای از همه مکان‌هایی است که به نقطه  $x_i$  نزدیک‌تر از دیگر نقاط الگوی نقطه‌ای هستند.

**تعریف ۲.۳.** [۱۱] سنگ‌فرش ورونوی یک افراز از فضای متریک است به طوری که نقاط الگوی نقطه‌ای حاصل از فرایند

به همین دلیل توجه به آن دسته از فرایندهای نقطه‌ای معطوف می‌شود که تحقق‌های آنها زیرمجموعه‌های موضعاً متناهی در  $S$  باشند. شکل ۲ نشان‌دهنده فرایند نقطه‌ای  $X$  تعریف شده در فضای اقلیدسی  $\mathbb{R}^2$  و نقاط مشاهده‌شده از فرایند در پنجره مشاهده  $W \subseteq \mathbb{R}^2$  است. در این شکل خطوط سیاه پررنگ نشان‌دهنده خطوط مرزی  $W$ ، نقاط توپر نقاط مشاهده‌شده و نقاط توخالی نقاط مشاهده‌نشده هستند.

همچنین فرض کنید  $B$  یک  $\sigma$ -میدان بول روی  $S$  باشد. در حقیقت  $B$ ،  $\sigma$ -میدان تولید شده به وسیله گوی‌های باز  $S$  است و  $B$  گردایه مجموعه‌های بول کراندار واقع در  $B$  باشد.  $B$  یک مجموعه بول کراندار و  $n(x \cap B)$  تعداد نقاط مشاهده‌شده از  $x$  در ناحیه  $B$  است.

**تعریف ۱.۲.** [۱۹] فرض کنید  $N$  مجموعه همه زیرمجموعه‌های موضعاً متناهی  $S$  باشد، یعنی

$$N = \{x \subseteq S : n(x \cap B) < \infty, \forall B \in \mathcal{B}_\sigma\} \quad (۱)$$

هر  $x \in N$  یک پیکربندی نقطه‌ای یا الگوی نقطه‌ای نامیده می‌شود. هر نقطه در الگوی نقطه‌ای یک رخداد نامیده می‌شود.  $\sigma$ -میدان  $\mathcal{N}$  روی  $N$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathcal{N} = \sigma(\{\{\{x \in N : n(x \cap B) = m\} : m \in I, B \in \mathcal{B}_\sigma\}\}) \quad (۲)$$

$I$  مجموعه اعداد صحیح نامنفی است.  $\mathcal{N}$ ،  $\sigma$ -میدانی است که هر نگاشت  $f_B : x \rightarrow n(x \cap B)$  به ازای هر  $B \in \mathcal{B}_\sigma$  نسبت به آن

<sup>۲۴</sup> Cell Voronoi

فرایندی که در آن یک نوع رخداد وجود دارد) تابع شدت به صورت زیر است:

$$\lambda(x) = \lim_{|dx| \rightarrow 0} \left\{ \frac{E[N(dx)]}{|dx|} \right\} \quad (۴)$$

$N(dx)$  تعداد رخداد فرایند نقطه‌ای در یک ناحیه به سطح  $dx$  است.

**تعریف ۴.۳.** [۱۱] مانده ورونوی خام برای خانه ورونوی  $C_i$ ، برابر است با تعداد نقاط مشاهده شده از فرایند در خانه  $C_i$ ، منهای تعداد نقاط مورد انتظار از فرایند در خانه  $C_i$  به عبارتی داریم:

$$R(C_i) = 1 - \int_{C_i} \hat{\lambda}(x) dx = 1 - |C_i| \bar{\lambda}_i \quad (۵)$$

که  $\hat{\lambda}$ ، برآورد تابع شدت شرطی مدل و  $\bar{\lambda}_i$ ، میانگین تابع شدت شرطی مدل در خانه  $C_i$  و  $|C_i|$ ، اندازه خانه  $C_i$  است. مانده ورونوی خام در رابطه (۵) تقریباً دارای توزیع گامای اصلاح شده است [۱۱]. در قسمت دوم این رابطه،  $|C_i| \bar{\lambda}_i$  دارای توزیع  $\Gamma(3/569, 3/569)$  است [۲۲]، بنا بر این داریم:

$$R(C_i) \stackrel{d}{=} 1 - X \quad (۶)$$

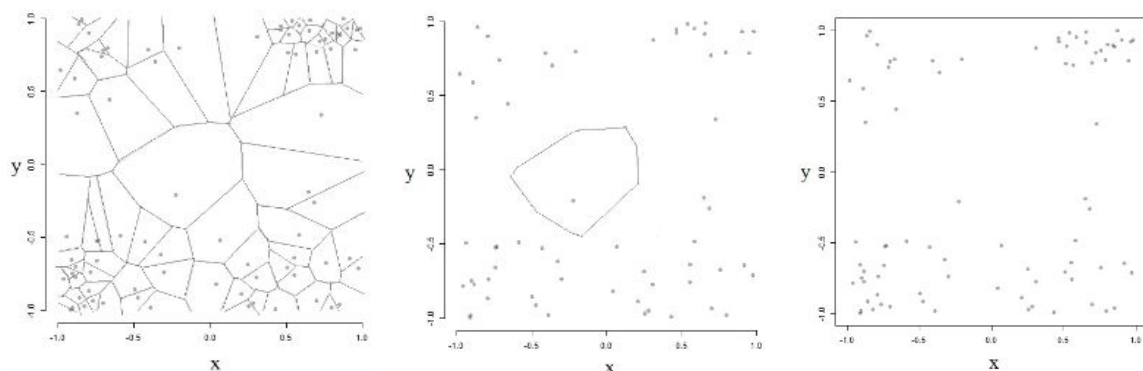
که در آن  $X = |C_i| \bar{\lambda}_i \sim \Gamma(3/569, 3/569)$

نقطه‌ای داخل چندضلعی‌های محدب یا خانه‌های ورونوی قرار می‌گیرند. به عبارتی دیگر می‌توان گفت سنگ‌فرش ورونوی مجموعه‌ای از خانه‌های ورونوی،  $\{C_i\}$ ، است.

در شکل ۳، (الف) نشان‌دهنده الگوی نقطه‌ای حاصل از یک فرایند نقطه‌ای، (ب) خانه ورونوی برای یک نقطه از الگوی نقطه‌ای و (ج) سنگ‌فرش ورونوی متناظر با الگوی نقطه‌ای است. سنگ‌فرش ورونوی را به دو روش عمود منصف<sup>۲۵</sup> و آورامی-جانسون-میل<sup>۲۶</sup> می‌توان رسم کرد [۱۶].

یک حالت خاص از سنگ‌فرش ورونوی که در آن نقاط به طور تصادفی و ناهمبسته توزیع شده‌اند، سنگ‌فرش ورونوی پواسون نام دارد. به عبارت دیگر هنگامی که الگوی نقطه‌ای، تحقق یک فرایند پواسون باشد، آن‌گاه سنگ‌فرش ورونوی متناظر را سنگ‌فرش ورونوی پواسون می‌نامند. سنگ‌فرش ورونوی پواسون به خصوص برای مدل‌بندی و توصیف طیف گسترده‌ای از پدیده‌های طبیعی و اجتماعی اهمیت دارد. سنگ‌فرش ورونوی پواسون در زمینه‌های مختلف علمی مانند نجوم، زمین‌شناسی، زیست‌شناسی، محیط‌زیست حیوانات، جامعه‌شناسی و غیره استفاده شده است.

**تعریف ۳.۳.** [۱۵] تابع شدت فرایند نقطه‌ای، میانگین تعداد رخدادها در واحد سطح است. برای فرایند نقطه‌ای یک‌متغیره



(ج)

(ب)

(الف)

شکل ۳. افراز یک الگوی نقطه‌ای به روش سنگ‌فرش ورونوی

<sup>۲۵</sup> Perpendicular Bisector

<sup>۲۶</sup> Avrami-Johnson-Mehl

برای الگوهای منظم، تابع  $K(r)$  کم‌تر از  $\pi r^2$  خواهد بود و برای الگوهای خوشه‌ای بیش‌تر از آن خواهد بود [۱۳].

**تعریف ۲.۴.** [۲۱] تابع  $L$  برای یک فرایند نقطه‌ای مانا در  $\mathbb{R}^2$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$L(r) = \left( \frac{K(r)}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (10)$$

برای یک فرایند نقطه‌ای پواسون همگن در  $\mathbb{R}^2$ ،  $L(r) = r$ . در این حالت نمودار  $L(r)$  در مقابل  $r$  یک خط مستقیم با شیب یک است. یک منحنی مقعر از این نمودار دلالت بر خوشه‌ای بودن و یک منحنی محدب از آن دلالت بر منظم بودن الگوی نقطه‌ای مورد مطالعه دارد.

## ۵ کاربرد: برازش فرایند نقطه‌ای فضایی به ساختار داده‌ها

در این بخش ابتدا با استفاده از توابع  $K$  ریپلی و  $L$  نوع الگوی نقطه‌ای مربوط به مکان رویش قسمتی از درختان جنگلی گیلان مشخص می‌شود. یک مدل مناسب برای الگوی نقطه‌ای درختان جنگلی گیلان برازش داده می‌شود. سپس نیکویی برازش مدل پیشنهادشده به الگوی نقطه‌ای درختان با استفاده از مانده‌های ورونوی ارزیابی می‌شود. داده‌های استفاده‌شده در این بخش از مؤسسه تحقیقات جنگل‌ها و مراتع کشور تهیه شده است.

### ۱.۵ تشخیص نوع الگوی نقطه‌ای

الگوی نقطه‌ای مربوط به درختان قسمتی از جنگل گیلان در شکل ۴ رسم شده است. هر یک از نقاط الگوی نقطه‌ای موقعیت مکانی درختان در جنگل است.

با استفاده از توابع  $Kest$  و  $Lest$  در بسته نرم‌افزاری spatstat محاسبات لازم برای تشخیص نوع الگوی نقطه‌ای درختان به وسیله

<sup>۲۷</sup> Raw

<sup>۲۸</sup> Pearson

<sup>۲۹</sup> Sumary Statistics

اگر فرایند نقطه‌ای پواسون همگن باشد، آن‌گاه اندازه‌خانه ورونوی  $\hat{e}$ ،  $|C_i|$  دارای توزیع گامای تقریبی است [۱۷، ۲۲]. همچنین مساحت مورد انتظار از خانه ورونوی برابر با عکس شدت فرایند است [۱۸]. این ویژگی‌ها برای حالت ناهمگن نیز تقریباً برقرار هستند در حالتی که تابع شدت شرطی در نزدیکی مکان مورد بررسی تقریباً ثابت باشد [۱۰]. مانده ورونوی خام<sup>۲۷</sup> با توجه به روش‌های مختلف گفته شده برای مقیاس‌بندی مانده‌ها در بدیلی و دیگران [۶] می‌تواند مقیاس‌بندی شود، که این منجر به مانده ورونوی پی‌یرسون<sup>۲۸</sup> به صورت زیر است:

$$R(C_i) = \frac{1 - \int_{C_i} \hat{\lambda}(x) dx}{\sqrt{\int_{C_i} \hat{\lambda}(x) dx}},$$

$$= \frac{1 - |C_i| \bar{\lambda}_i}{\sqrt{|C_i| \bar{\lambda}_i}}. \quad (7)$$

## ۴ تعیین نوع الگوی نقطه‌ای داده‌ها

از آماره‌های خلاصه<sup>۲۹</sup> برای تشخیص نوع الگوهای نقطه‌ای استفاده می‌شود. برخی از این آماره‌های خلاصه عبارت‌اند از تابع  $K$  ریپلی، تابع  $L$ ، تابع توزیع نزدیک‌ترین همسایگی، تابع فضای تهی. با توجه به این‌که در این مقاله فقط از توابع  $K$  ریپلی و  $L$  استفاده شده است، در این زیربخش فقط به معرفی این دو تابع پرداخته می‌شود.

**تعریف ۱.۴.** ریپلی [۲۰] تابع  $K$  را برای یک فرایند نقطه‌ای مانای  $\mathbf{X}$  به عنوان میانگین تعداد رخ‌دادهای اضافی در فاصله  $r$  از یک رخ‌داد دلخواه، تقسیم بر شدت  $\lambda$  معرفی نمود. به طور رسمی تابع  $K$  برای یک فرایند مانای  $\mathbf{X}$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$K(r) = \lambda^{-1} \{E[\mathbf{X}(b(\zeta, r)) | \zeta \in \mathbf{X}] - 1\} \quad (8)$$

برای یک فرایند نقطه‌ای پواسون همگن در  $\mathbb{R}^2$  تابع  $K$  عبارت است از:

$$K(r) = \pi r^2, \quad r \geq 0 \quad (9)$$

برای تقریب انتگرال موجود در مانده ورونوی،  $n$  نمونه از نقاط را به طور مکرر به هر خانه ورونوی اضافه می کند و این تکرار زمانی متوقف می شود که به آستانه ای مطلوب از دقت تقریب رسیده باشد. برای مانده های حاصل نمودار مانده ها، نمودار بافت نگاشت و نمودار Q-Q را رسم کردیم. عدم انحراف در نمودار Q-Q مانده ها و نسبتاً کوچک بودن اندازه مانده ها، نشان دهنده مناسب بودن مدل پیشنهادی است [۱۲]. نتایج حاصل برای مانده های محاسبه شده در شکل ۶ رسم شده است.

در شکل ۶، شکل (الف) نمودار مانده ها است. در این شکل رنگ هر یک از خانه ها نشان دهنده مقدار عددی به دست آمده برای مانده محاسبه شده در آن خانه است. نمودار مانده ها علاوه بر مقدار عددی مانده های محاسبه شده، مکانی که مانده به آن تعلق دارد را نشان می دهد. نوار رنگی موجود در زیر نمودار مانده ها نشان دهنده محدوده عددی مانده های به دست آمده و نوع رنگی که به وسیله آن در هر یک از خانه ها مشخص شده اند، است. با توجه به این طیف رنگی مشاهده می شود اندازه ی مانده های محاسبه شده نسبتاً کوچک است. شکل های (ب) و (ج) به ترتیب نمودار بافت نگاشت مانده ها همراه با منحنی سبز که چگالی توزیع در رابطه (۶) است و نمودار Q-Q ی مانده ها هستند. نسبتاً کوچک بودن اندازه مانده ها و عدم انحراف در نمودار Q-Q ی مانده ها نشان می دهد مدل پیشنهادی در رابطه (۱۱)، برای الگوی نقطه ای درختان، مدل تقریباً مناسبی است.

آماره های خلاصه در R انجام شد. نتایج حاصل برای این آماره های خلاصه در شکل ۵ رسم شده است.

با توجه به نتایج حاصل در شکل ۵ مشاهده می شود الگوی نقطه ای رسم شده در شکل ۴ به صورت خوشه ای است. بنا بر این بعد از انجام بررسی های لازم با استفاده از تابع Kppm در بسته نرم افزاری spatstat که یک مدل فرایند نقطه ای خوشه ای به الگوی نقطه ای برازش می دهد، در R یک مدل خوشه ای با تابع شدت زیر به الگوی نقطه ای درختان برازش داده شد:

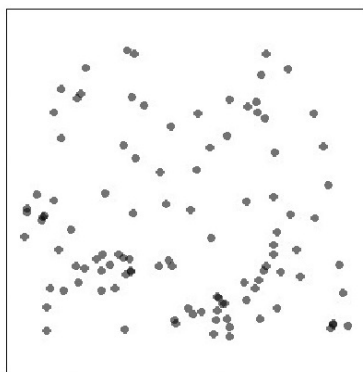
$$\lambda(x, y) = \exp(214 - 0.003993338x - 0.003453473y) \quad (11)$$

متغیرهای  $x$  و  $y$  نشان دهنده مختصات نقاط موقعیت مکانی درختان جنگلی گیلان است.

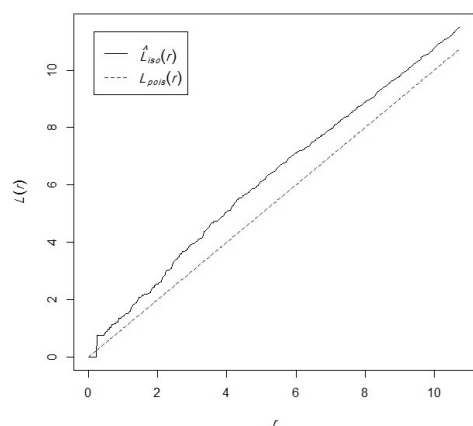
## ۲.۵ ارزیابی نیکویی برازش مدل پیشنهادی

در این زیربخش برای ارزیابی مدل پیشنهاد شده با استفاده از مانده های ورونوی، مطابق روند گفته شده در بری و دیگران [۱۲] عمل می شود. نتایج حاصل را با توضیحات بری و دیگران [۱۲] جهت تشخیص الگوی نقطه ای مناسب، مقایسه می شود.

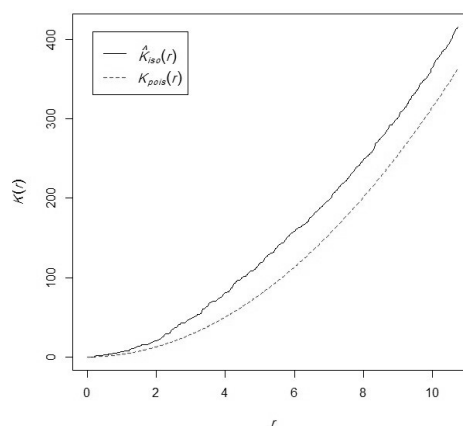
ابتدا الگوی نقطه ای درختان جنگلی گیلان مشاهده شده در شکل ۴ با استفاده از سنگ فرش ورونوی افزاز کردیم. در هر یک از خانه های ورونوی، مانده ورونوی را با استفاده از تابع شدت مدل پیشنهاد شده و تقریب انتگرال موجود در رابطه (۵) توسط الگوریتم مونته کارلو در R محاسبه کردیم. الگوریتم مونته کارلو



شکل ۴. الگوی نقطه ای مکان رویش درختان

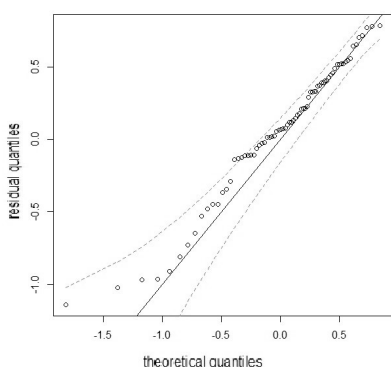


(ب)

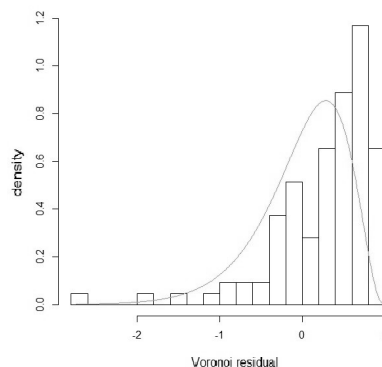


(الف)

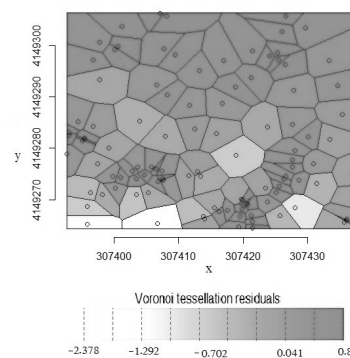
شکل ۵. برآورد الگوی نقطه‌ای مکان رویش درختان با استفاده از توابع  $K$  ریپلی و  $L$



(ج)



(ب)



(الف)

شکل ۶. نتایج حاصل از ارزیابی مدل برازش شده به الگوی نقطه‌ای درختان با استفاده از مانده‌های ورونوی

خاک مکان رویش آنها و غیره همواره مورد علاقه پژوهشگران بوده است. ابتدا نوع الگوی نقطه‌ای درختان جنگلی گیلان تعیین شد. سپس یک مدل مناسب به آن برازش داده شد و در نهایت با استفاده از ابزارهای تشخیصی بر مبنای مانده‌های ورونوی مانند نمودار مانده‌ها، نمودار بافت‌نگاشت و نمودار  $Q-Q$ ی مانده‌ها به ارزیابی نیکویی برازش مدل پیشنهاد شده به الگوی نقطه‌ای پرداخته شد.

## بحث و نتیجه گیری

در این مقاله فرایند نقطه‌ای فضایی، انواع الگوی نقطه‌ای حاصل از فرایند نقطه‌ای فضایی و مانده‌های ورونوی معرفی شد. در باره چگونگی تعیین نوع الگوی نقطه‌ای یک فرایند نقطه‌ای بحث شد. با توجه به این که نحوه پخش گونه‌های خاص درختان جنگلی به منظور کشف روابط بین موقعیت‌های مکانی آنها، میزان باروری

## مراجع

- [1] Baddeley, A., Turner, R., Møller, J. and Hazelton, M. (2005). Residual analysis for spatial point processes, *Journal of the Royal Statistical Society*, **67(5)**, 617-666.
- [2] Baddeley, A., Møller, J. and Pakes, A. G. (2008). Properties of residuals for spatial point processes, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **60(3)**, 627-649.
- [3] Baddeley, A., Rubak, E. and Møller, J. (2011). Score, pseudo-score and residual diagnostics for spatial point process models, *Statistical Science*, 613-646.
- [4] Baddeley, A., Rubak, E. and Turner, R. (2016). *Spatial Point Patterns: Methodology and Applications with R*, CRC Press.
- [5] Barr, C. D. and Schoenberg, F. P. (2010). On the Voronoi estimator for the intensity of an inhomogeneous planar Poisson process, *Biometrika*, 977-984.
- [6] Bray, A. (2013). *Partition Selection for Residuals of Spatial Point Process Models*, UCLA Electronic Theses and Dissertations.
- [7] Bray, A., Wong, K., Barr, C. D. and Schoenberg, F. P. (2014). Voronoi residual analysis of spatial point process models with applications to California earthquake forecasts, *The Annals of Applied Statistics*, **8(4)**, 2247-2267.
- [8] Cressie, N. A. (1993). *Statistics for spatial data: Wiley series in probability and mathematical statistics*, *Find This Article Online*.
- [9] Diggle, P. (2003). *Statistical Analysis of Spatial Point Patterns*, 2nd edn. London: Arnold.
- [10] Diggle, P. J. (2013). *Statistical Analysis of Spatial and Spatio-Temporal Point Patterns*, CRC Press.
- [11] Ferenc, J. S. and Néda, Z. (2007). On the size distribution of Poisson Voronoi cells, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, **385(2)**, 518-526.
- [12] Hinde, A. L. and Miles, R. E. (1980). Monte Carlo estimates of the distributions of the random polygons of the Voronoi tessellation with respect to a Poisson process, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **10 (3-4)**, 205-223. 311-316.
- [13] Meijering, J. L. (1953). Area, edge length and number of vertices in crystal aggregation with random nucleation, *Philips Research Reports*, **8**, 270-290.
- [14] Møller, J. and Waagepetersen, R. P. (2004). *Statistical Inference and Simulation for Spatial Point Processes*, Chapman Hall/CRC, Boca Raton.

- [15] Ripley, B. D. (1976). The second-order analysis of stationary point process, *Journal of Applied Probability*, **13**, 255-266.
- [16] Stoyan. D., Kendall. W. S. and Mecke. J. (1995). *Stochastic Geometry and its Applications*, John Wiley and Sons, Chichester, second edition.
- [17] Tanemura, M. (2003). Statistical distributions of Poisson Voronoi cells in two and three, *Forma*, **18**, 221–247.