مقایسه سیستم‌های منسجم متشکل از مؤلفه‌های تصادفی از دو دسته مختلف

سیما زمانی،[۱] سعید زال‌زاده،[۲]

تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۱۱/۱۹
تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۶/۳۰

چکیده:
سیستم منسجمی متشکل از مؤلفه‌های مستقل یا وابسته را در نظر بگیرید و فرض کنید که مؤلفه‌های آن به‌طور تصادفی از دو کلاس مختلف انتخاب شده، و مؤلفه‌های کلاس اول به مفهوم برخی از ترتیب‌های تصادفی بزرگ‌تر از مؤلفه‌های کلاس دوم هستند. در این مقاله، با استفاده از ترتیب‌های تصادفی مختلف به مقایسه قابلیت اعتماد چنین سیستم‌هایی پرداخته می‌شود و نشان داده می‌شود که هرگاه تعداد تصادفی مؤلفه‌های انتخاب‌شده از دسته اول به مفهوم برخی از ترتیب‌های تصادفی افزایش می‌یابد، قابلیت اعتماد سیستم حاصل بیشتر خواهد بود. هرگاه مؤلفه‌های سیستم، وابسته در نظر گرفته شوند، برای توصیف ساختار وابستگی میان طول عمر مؤلفه‌ها از توابع مفصل استفاده می‌شود.
واژه‌های کلیدی: سیستم‌های منسجم، قابلیت اعتماد، مفصل

۱ مقدمه

در مباحث قابلیت اعتماد طراحی و بهینه کردن سیستم‌های پیچیده به‌طورگسترده مورد توجه محققان بوده و تحقیقات وسیعی در این زمینه انجام شده است. [۹] مروری کلّی بر روش‌ها و حل مسائل بهینه سازی انجام دادند و فهرست مفیدی از منابع را در این زمینه ارائه کردند. [۱، ۴، ۱۱، ۱۷] از جمله افرادی هستند که در زمینهٔ تخصیص بهینه مؤلفه‌ها به سیستم‌های موازی و سری کار کرده‌اند. یکی از مباحث مهم در مطالعهٔ سیستم‌های موازی، سری وk از n که حالت‌های خاصی از سیستم‌های منسجم هستند، مطالعهٔ عملکرد این سیستم‌ها است در حالتی که مؤلفه‌های آنها از انواع مختلفی تشکیل شده‌اند و هدف، تخصیص بهینه مؤلفه‌ها برای افزایش قابلیت اعتماد سیستم است. از جمله این تحقیقات می‌توان به مقالات [۶، ۵، ۱۰، ۱۳] اشاره کرد.

[۲] نشان داد که گاهی انتخاب تصادفی مؤلفه‌ها از میان گزینه‌های ممکن می‌تواند به طراحی سیستمی با قابلیت اعتماد بالاتر منجر شود. به‌ویژه وی ثابت کرد که در یک سیستم سری با مؤلفه‌های مستقل و طول عمرهای غیر هم‌توزیع، انتخاب تصادفی مؤلفه‌ها بهترین انتخاب است. پس از آن مقاله [۳] بر روی سیستم‌های سری و موازی با مؤلفه‌های تصادفی مطالعه کردند. در این تحقیق آنها فرض کردند که مؤلفه‌های سیستم می‌توانند از دو انبار مختلف تهیه شوند و مؤلفه‌های یکی از انبارها به مفهوم ترتیب تصادفی معمولی بهتر از مؤلفه‌های موجود در انبار دیگر است. از جمله تحقیقاتی که به تازگی در مورد سیستم‌های منسجم متشکل از مؤلفه‌های تصادفی انجام شده است، می‌توان به مقاله [۷] اشاره کرد که در آن سیستم‌های سری و موازی با مؤلفه‌هایی که می‌توانند به‌طور تصادفی از گروهای مختلف انتخاب شوند مورد مطالعه قرار گرفته و سیستم‌های بهینه به‌دست‌آمده است. [۱۸] قابلیت اعتماد سیستم‌های k از n وزنی را که مؤلفه‌های آنها به‌طور تصادفی انتخاب می‌شوند، مورد مطالعه قرار دادند. در عمل بنا به دلایل متعددی ممکن است اجزای مشابه تشکیل‌دهندهٔ یک سیستم دارای طول عمرهای متفاوتی باشند. به‌عنوان مثال ممکن است این اجزا توسط

[۱] هیأت علمی گروه آمار، دانشگاه سمنان، سمنان، ایران
[۲] دانشجوی کارشناسی ارشد آمار، دانشگاه سمنان، سمنان، ایران

تولیدکنندگان متفاوتی تولید شده باشند و به هنگام تولید سیستم مورد نظر به‌عنوان مؤلفه‌های تشکیل‌دهندهٔ سیستم، با یکدیگر ترکیب شوند. حتی قابلیت اعتماد اجزای تولیدشده توسط یک تولیدکننده هم می‌تواند به دلیل وجود عواملی همچون عوامل انسانی و یا کیفیت مواد اوّلیه در طی زمان تولید دچار تغییراتی شوند. از دیدگاه عملیاتی علم به این‌که دسته‌ای از مؤلفه‌ها قابلیت اعتماد بیشتری دارند، پیشنهاد می‌شود که قطعات بیشتری از این دسته انتخاب شود. در صورت نداشتن چنین اطلاعاتی مسئلهٔ انتخاب بهینه (تخصیص بهینه) به‌طور شهودی روشن نیست. در این حالت، یک روش انتخاب، انتخاب نیمی از مؤلفه‌ها از هر دسته است. چرا که در این صورت اطمینان حاصل می‌شود که نیمی از مؤلفه‌های انتخاب‌شده قابلیت اعتماد بیشتری دارند. مشابه همین کار در نظریهٔ ریسک نیز انجام می‌شود. یعنی تنوع در انتخاب‌های ممکن، ابزاری برای به حد اقل رساندن ریسک است.

در این مقاله مروری خواهد شد بر سیستم‌هایی که مؤلفه‌های آن به‌طور تصادفی می‌توانند از میان دو مجموعه با طول عمرهای متفاوت انتخاب شوند. فرض می‌شود که توزیع طول عمر مؤلفه‌ها در هر یک از مجموعه‌ها یکسان باشند. در بخش ۲ به ارائه مفاهیم و تعاریف اوّلیه پرداخته خواهد شد و سپس در بخش ۳ سیستم‌های سری با مؤلفه‌های تصادفی مستقل بررسی می‌شود. در بخش ۴ مشابه بخش ۳، به بررسی سیستم‌های موازی با مؤلفه‌های تصادفی مستقل پرداخته خواهد شد. سیستم‌های منسجم با انتخاب تصادفی مؤلفه‌ها تحت آزمایش‌های برنولی در بخش ۵ مورد بررسی قرار می‌گیرد و به مطالعه خواص ترتیبی آنها پرداخته می‌شود.

۲ مفاهیم اوّلیه

در این بخش ابتدا مفاهیم اوّلیه در زمینه ساختار و قابلیت اعتماد سیستم‌های منسجم ارائه می‌شود.

۱.۲ سیستم و مؤلفه‌های آن

سیستمی را در نظر بگیرید که شامل تعدادی مؤلفه $c_1, \ldots, c_n$ است و برای هدفی معین طراحی شده است. به‌طور طبیعی عملکرد سیستم، تابعی از عملکرد مؤلفه‌های آن است. فرض کنید، سیستم n $(n \geq 1)$ مؤلفه دارد و هر مؤلفه در آن فعال یا غیر فعال است. برای توصیف این وضعیت، یک متغیر دو مقداری نظیر مؤلفه c_i، $i = 1, 2, \ldots, n$، به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{مؤلفه } c_i \text{ فعال است} \\ 0, & \text{مؤلفه } c_i \text{ غیر فعال است} \end{cases}$$

که در آن $x_i = 1$ است، هرگاه مؤلفه i-ام در سیستم فعال باشد و در غیر این صورت $x_i = 0$ است. همچنین فرض شود که سیستم نیز در یکی از دو وضعیت فعال یا غیر فعال باشد. برای تعیین وضعیت سیستم بر حسب وضعیت مؤلفه‌ها، فرض می‌شود که پیوند سیستم با مؤلفه‌های آن، با تابع دو مقداری $\varphi(\mathbf{x})$، که به تابع ساختار سیستم معروف است، مشخص شود. $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ بردار وضعیت سیستم نامیده می‌شود. بنا بر این بسته به وضعیت بردار $\mathbf{x}$ داریم:

$$\varphi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \text{اگر سیستم فعال است} \\ 0, & \text{اگر سیستم غیر فعال است.} \end{cases}$$

شکل تابع $\varphi(\mathbf{x})$ پس از آن‌که نوع ارتباط بین مؤلفه‌های موجود در سیستم معلوم شود، قابل تعیین خواهد بود.

۲.۲ مفصل

مفصل‌ها ابزاری برای تعیین ساختار وابستگی بردارهای تصادفی و مولّد توزیع توأم این بردارها با مشخص بودن توزیع‌های حاشیه‌ای آنها هستند. تابع مفصل نظیر یک بردار تصادفی، تابعی است که تابع توزیع توأم را به توابع توزیع حاشیه‌ای متناظر با آن مرتبط می‌سازد.

تعریف ۱.۲. *برای بردار مفروض* $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_m)$ *از طول عمرها با تابع توزیع توأم* F *و توابع توزیع حاشیه‌ای* F_i،

$i = 1, 2, \ldots, m$ تابع $C : [0, 1]^m \longrightarrow [0, 1]$ مفصل نظیر $\mathbf{X}$ نامیده می‌شود، هرگاه داشته باشیم:

$$F(x_1, \ldots, x_m) = C(F(x_1), \ldots, F(x_m)), \qquad \forall (x_1, \ldots, x_m)) \in \mathbb{R}^m.$$

در تعریف ۱.۲ اگر توابع توزیع حاشیه‌ای پیوسته باشند، آن‌گاه مفصل C یکتا خواهد بود و برای هر $u_1, \cdots, u_m \in [0, 1]$ داریم:

$$C(u_1, \ldots, u_m) = F(F_1^{-1}(u_1), \ldots, F_m^{-1}(u_m)).$$

این رابطه نشان می‌دهد که C، خود یک تابع توزیع است. بنا بر این مفصل توزیعی چند متغیر است که توزیع‌های حاشیه‌ای آن یکنواخت است. در مباحث قابلیت اعتماد که با توابع بقا سروکار داریم غالباً بجای تابع مفصل ازتابع مفصل بقا استفاده می‌شود. تابع $\widehat{C} : [0, 1]^m \longrightarrow [0, 1]$ مفصل بقا نظیر $\mathbf{X}$ است هرگاه داشته باشیم:

$$\bar{F}(x_1, \ldots, x_m) = \widehat{C}(\bar{F}(x_1), \ldots, \bar{F}(x_m)), \ \forall (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m.$$

به‌طور مشابه وقتی توابع توزیع حاشیه‌ای پیوسته باشند. برای هر $u_1, \cdots, u_m \in [0, 1]$ داریم:

$$\widehat{C}(u_1, \ldots, u_m) = \bar{F}(\bar{F}_1^{-1}(u_1), \ldots, \bar{F}_m^{-1}(u_m)).$$

([۱۶] را ببینید.)

در بخش‌های بعدی سیستم‌هایی منسجم متشکل از m مؤلفه را در نظر می‌گیریم که طول عمرهای تصادفی آنها با $X_1, \cdots, X_k, Y_{k+1}, \cdots, Y_m$ نشان داده می‌شوند. این طول عمرها به‌ترتیب از دو کلاس $mathcalB_X = X_1, \cdots, X_k$ و $mathcalB_Y = Y_{k+1}, \cdots, Y_m$ با اندازه‌های k و $m-k$ استخراج می‌شوند. دو متغیر تصادفی X و Y را در نظر بگیرید. فرض کنید که طول عمرهای موجود در کلاس $\mathcal{B}_X$ هم توزیع با X و طول عمرهای موجود در کلاس $\mathcal{B}_Y$ هم توزیع با Y باشند.

به‌منظور برقراری نتیجه کلّی‌تر برای ترتیب تصادفی معمولی در بخش ۵، نیاز است که مفهوم بیشاندن را به‌کار ببریم.

تعریف ۲.۲. *[۱۲] فرض کنید $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ بردارهای حقیقی مقدار و $x_{(1)} \leq \cdots \leq x_{(m)}$ و $y_{(1)} \leq \cdots \leq y_{(m)}$ به‌ترتیب مقادیر مرتب‌شده متناظر با بردارهای $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ باشند. در این صورت*

الف . $\mathbf{x}$ به‌وسیله $\mathbf{y}$ به‌طور ضعیف از پایین بیشانده می‌شود ($\mathbf{x} \leq_w \mathbf{y}$) ، اگر نامساوی زیر برقرار باشد:

$$\sum_{i=j}^{m} x_{(i)} \leq \sum_{i=j}^{m} y_{(i)}, \quad j = 1, \ldots, m.$$

ب . $\mathbf{x}$ به‌وسیله $\mathbf{y}$ به‌طور ضعیف از بالا بیشانده می‌شود ($\mathbf{x} \leq^w \mathbf{y}$) ، اگر نامساوی زیر برقرار باشد:

$$\sum_{i=1}^{j} x_{(i)} \geq \sum_{i=1}^{j} y_{(i)}, \quad j = 1, \ldots, m.$$

دو ترتیب بالا معادل هستند، هرگاه داشته باشیم:

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = \sum_{i=1}^{m} y_i. \qquad (1)$$

بنا بر این هرگاه $\mathbf{x} \leq_w \mathbf{y}$ و شرط (۱) برقرار باشند،گوییم $\mathbf{y}$ به مفهوم بیشاندن بزرگ‌تر از $\mathbf{x}$ است ($\mathbf{x} \preceq \mathbf{y}$).

مفهوم بیشاندن ارتباط نزدیکی با پراکندگی دارد. در واقع اگر $\mathbf{x} \preceq \mathbf{y}$، آن‌گاه $x_{(m)} - x_{(1)} \leq y_{(m)} - y_{(1)}$. یعنی دامنه بردار $\mathbf{y}$ بزرگ‌تر از دامنه بردار $\mathbf{x}$ است.

تعریف ۳.۲. *[۱۲] تابع حقیقی مقدار $h : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ روی مجموعه $\mathbf{D} \subseteq \mathbb{R}$ شور-محدب(شور-مقعر)[3] نامیده می‌شود اگر داتشه باشیم:*

$$h(\mathbf{x}) \leq h(\mathbf{y})(\geq), \quad \forall \mathbf{x} \preceq \mathbf{y}, \ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m. \qquad (2)$$

۳.۲ ترتیب‌های تصادفی

فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی مطلقاً پیوسته با تکیه‌گاه $(0, \infty)$، به‌ترتیب با توابع توزیع $F_X(t)$ و $F_Y(t)$، توابع چگالی $f_X(t)$ و $f_Y(t)$، و توابع بقای $\bar{F}_X(t) = 1 - F_X(t)$ و $\bar{F}_Y(t) = 1 - F_Y(t)$ باشند.

- گوییم X در ترتیب تصادفی معمولی از Y کمتر است ($X \leq_{st} Y$)، هرگاه $\bar{F}_X(t) \leq \bar{F}_Y(t); \ \forall t > 0$.

[3] Schur-convex

- گوییم X در ترتیب نرخ خطر از Y کمتر است ($X \leq_{hr} Y$)، هرگاه $\frac{\bar{F}_Y(t)}{\bar{F}_X(t)}; \forall t \geq ۰$ به‌ازای $t \geq ۰$ تابعی صعودی باشد.
- گوییم X در ترتیب نرخ خطر وارون از Y کمتر است ($X \leq_{rhr} Y$)، هرگاه $\frac{F_Y(t)}{F_X(t)}$ به‌ازای $t \geq ۰$ تابعی صعودی باشد.
- گوییم X در ترتیب نسبت درست‌نمایی از Y کمتر است ($X \leq_{lr} Y$)، هرگاه $\frac{f_Y(t)}{f_X(t)}$ به‌ازای $t \geq ۰$ تابعی صعودی باشد.
- گوییم X در ترتیب محدب از Y کمتر است ($X \leq_{cx} Y$)، هرگاه برای همه توابع محدب $\phi : R \longrightarrow R$ داشته باشیم:

$$E(\phi(X)) \leq E(\phi(Y)).$$

- گوییم X در ترتیب مقعر صعودی از Y کمتر است $X \leq_{icv} Y$، هرگاه برای همهٔ توابع مقعر وصعودی $\phi : R \longrightarrow R$ داشته باشیم:

$$E(\phi(X)) \leq E(\phi(Y)).$$

۳ سیستم‌های سری

برای $k = ۱, ۲, \ldots, m-۱$، طول عمر سیستم‌های سری که مؤلفه‌های آن از دو کلاس $\mathcal{B}_X$ و $\mathcal{B}_Y$ انتخاب می‌شوند به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{cases} S_۰ = \min\{Y_۱, \ldots, Y_m\}, \\ S_k = \min\{X_۱, X_۲, \ldots, X_k, Y_{k+۱} \ldots, Y_m\}, \\ S_m = \min\{X_۱, \ldots, X_m\}, \end{cases} \qquad (۳)$$

که در آن $X_۱, \ldots, X_k$ از دستهٔ $\mathcal{B}_X$ و $Y_{k+۱}, \ldots, Y_m$ از دستهٔ $\mathcal{B}_Y$ انتخاب شده‌اند. اگر K (تعداد مؤلفه‌های انتخاب‌شده از دسته $\mathcal{B}_X$) تصادفی باشد، S_K به جای S_k در نظر گرفته می‌شود. یاد آوری می‌شود که $X_۱, \ldots, X_m$ را هم توزیع با متغیر تصادفی مفروض X و $Y_۱, \ldots, Y_m$ را هم توزیع با متغیر تصادفی مفروض Y و متغیر تصادفی K مستقل از متغیرهای تصادفی مستقل X و Y فرض می‌شود. در این صورت، تابع قابلیت اعتماد سیستم سری بر اساس قانون احتمال کل و احتمال انتخاب شدن هر مؤلفه به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$\bar{F}_{S_K}(t) = \sum_{k=۰}^{m} \bar{F}_X^k(t) \bar{F}_Y^{m-k}(t) P(K=k), \quad t \geq ۰.$$

فرض کنید که طول عمر مؤلفه‌های انتخاب‌شده از دستهٔ $\mathcal{B}_X$ به مفهوم تصادفی بزرگ‌تر از طول عمر مؤلفه‌های دستهٔ $\mathcal{B}_Y$ باشد، یعنی $X \geq_{st} Y$. در این صورت داریم:

$$\begin{aligned} X \geq_{st} Y &\Longleftrightarrow \bar{F}_X(t) \geq \bar{F}_Y(t) \\ &\Longleftrightarrow \bar{F}_X^{k-۱}(t) \bar{F}_Y^{m-k+۱} \leq \bar{F}_X^k(t) \bar{F}_Y^{m-k}(t) \\ &\Longleftrightarrow \bar{F}_{S_{k-۱}}(t) \leq \bar{F}_{S_k}(t) \\ &\Longleftrightarrow S_{k-۱} \leq_{st} S_k, \quad \forall k = ۱, ۲, \ldots, m. \end{aligned}$$

یعنی با افزایش k، قابلیت اعتماد سیستم افزایش می‌یابد. گزارهٔ زیر برای حالتی که K متغیری تصادفی است [۳].

گزارهٔ ۱.۳. *فرض کنید $X \geq_{st} Y$ و k به‌طور تصادفی از دو متغیر تصادفی $K_۱$ و $K_۲$ با تکیه‌گاه مشترک $\{۰, ۱, \cdots, m\}$ انتخاب می‌شود. اگر $K_۱ \leq_{st} K_۲$، آن‌گاه $S_{K_۱} \leq_{st} S_{K_۲}$.*

مثال ۲.۳. *دو سیستم سری با طول عمرهای $S_{K_۱}$ و $S_{K_۲}$ و هر یک متشکل از m مؤلفه را در نظر بگیرید. مؤلفه‌های این سیستم‌ها تحت آزمایش‌های برنولی مستقل و هم‌توزیع انتخاب می‌شوند. به بیان دقیق‌تر هر مؤلفه از سیستم با طول عمر S_{K_i}، از دسته‌های $\mathcal{B}_X$ و $\mathcal{B}_Y$ با احتمالات به‌ترتیب p_i و $۱-p_i$، $i = ۱, ۲$، انتخاب شده است. بنا بر این K_i دارای توزیع دو جمله‌ای است و تابع بقای سیستم، به‌صورت زیر است.*

$$\begin{aligned} \bar{F}_{S_{K_i}} &= \sum_{k=۰}^{m} \binom{n}{k} \bar{F}_X^k(t) \bar{F}_Y^{m-k}(t) p_۱^k (۱-p_۱)^{m-k} \\ &= \sum_{k=۰}^{m} \binom{n}{k} (\bar{F}_X(t) p_۱)^k (\bar{F}_Y(t)(۱-p_۱))^{m-k} \\ &= (\bar{F}_X(t) p_۱ + \bar{F}_Y(t)(۱-p_۱))^m, \quad t \geq ۰. \end{aligned}$$

نشان داده می‌شود که اگر $p_۱ \leq p_۲$، آن‌گاه $K_۱ \leq_{st} K_۲$. چون برقرار بودن ترتیب نسبت درست‌نمایی، برقرار بودن ترتیب تصادفی معمولی را نتیجه می‌دهد کافی است نشان دهیم که

$K_۲ \leq_{lr} K_۱$. *بنا بر این عبارت زیر باید نسبت به k صعودی باشد.*

$$g(k) = \frac{P(K_۲ = k)}{P(K_۱ = k)} = \frac{\binom{m}{k} p_۲^k (۱ - p_۲)^{m-k}}{\binom{m}{k} p_۱^k (۱ - p_۱)^{m-k}}$$

فرض کنید $k_۱ \leq k_۲$، با توجه به نسبت درست‌نمایی باید نشان داد که:

$$\left(\frac{p_۲}{۱ - p_۲}\right)^{k_۱ - k_۲} \leq \left(\frac{p_۲}{۱ - p_۲}\right)^{k_۲ - k_۱}$$

که عبارت زیر را نتیجه می‌دهد:

$$\frac{p_۲(۱ - p_۱)}{p_۱(۱ - p_۲)}^{k_۲ - k_۱} \geq ۱$$

که عبارت بالا معادل است با $p_۱ \leq p_۲$. لذا ترتیب تصادفی نسبت درست‌نمایی و در نتیجه ترتیب تصادفی معمولی برقرار است. همچنین می‌توان نشان داد که اگر $X \geq_{st} Y$، آن‌گاه $S_{K_۱} \leq_{st} S_{K_۲}$. زیرا اگر

$$\bar{F}_X(t) \geq \bar{F}_Y(t)$$

داریم:

$$(p_۱ - p_۲)\bar{F}_X(t) \leq (p_۱ - p_۲)\bar{F}_Y(t)$$

و در نتیجه:

$$[p_۱\bar{F}_X(t) + (۱ - p_۱)\bar{F}_Y(t)]^m \leq [p_۲\bar{F}_X(t) + (۱ - p_۲)\bar{F}_Y(t)]^m.$$

در قضیهٔ زیر که توسط دی کریسنزو و پلری [۳] ثابت شده است نشان داده می‌شود که شرط $K_۱ \leq_{st} K_۲$ را می‌توان با شرط ضعیف‌تر $K_۱ \leq_{icx} K_۲$ جایگزین کرد. باید توجه داشت که ممکن است در بعضی موارد تعداد مؤلفه‌های انتخاب‌شده، امیدهای یکسانی داشته باشند و نتوان از ترتیب تصادفی معمولی استفاده کرد.

قضیهٔ ۳.۳. *فرض کنید $X \geq_{st} Y$ و دنبالهٔ طول عمرهای $\{S_۰, \ldots, S_m\}$ که در عبارت (۱۴) تعریف شده را داشته باشیم. اگر $K_۱ \leq_{icx} K_۲$، آن‌گاه $S_{K_۱} \leq_{st} S_{K_۲}$.*

با استفاده از قضیهٔ ۳.۳ می‌توان کران‌هایی برای تابع بقای سیستم سری هنگامی‌که m عدد زوجی باشد، پیدا کرد. نتیجه زیر را ببینبد.

نتیجه ۴.۳. *فرض کنید $X \leq_{st} Y$ و دنباله طول عمرهای $\{S_۰, \ldots, S_m\}$ که در (۱۴) تعریف شده‌اند را داشته باشیم. همچنین فرض کنید $m = ۲n$ و K دارای تکیه‌گاه $\{۰, ۱, \ldots, ۲n\}$ باشد و $E(K) = n$. در این صورت برای هر $t \geq ۰$ داریم:*

$$\bar{F}_X^n(t)\bar{F}_Y^n(t) \leq \bar{F}_{S_K}(t) \leq \frac{۱}{۲}[\bar{F}_X^{۲n}(t) + \bar{F}_Y^{۲n}(t)].$$

اثبات. فرض کنید $K_۱ \overset{a.s}{=} n$ و متغیر تصادفی $K_۲$ با احتمالات $P[K_۲ = ۰] = P[K_۲ = n] = \frac{۱}{۲}$. در این صورت می‌توان نشان داد $K_۱ \leq_{icx} K \leq_{icx} K_۲$.

در این صورت باید نشان دهیم برای هر تابع محدب و صعودی $\phi(.)$ عبارت زیر برقرار است:

$$E[\phi(K_۱)] \leq E[\phi(K)] \leq E[\phi(K_۲)],$$

از این‌که $K_۱ \overset{a.s}{=} n$ و $\phi(.)$ محدب و صعودی است، نتیجه می‌شود $\phi(n) = \phi[E(K_۱)] \leq E[\phi(K_۱)]$ یعنی $K_۱ \leq_{icx} K$. حال نشان می‌دهیم $K \leq_{icx} K_۲$. می‌دانیم

$$E[\phi(K_۲)] = \frac{۱}{۲}\phi(۰) + \frac{۱}{۲}\phi(۲n),$$

و

$$\begin{aligned} E[\phi(K)] &= \sum_{k=۰}^{۲n} \phi(k)P(K = k) \\ &= \sum_{k=۰}^{۲n} \phi(\lambda ۲n + (۱ - \lambda)۰)P(K = k), \end{aligned}$$

که در آن $\lambda = \frac{k}{۲n}$. بنا بر نامساوی جنسین داریم:

$$\begin{aligned} E[\phi(K)] &= \sum_{k=۰}^{۲n} \phi(\lambda ۲n + (۱ - \lambda)۰)P(K = k) \\ &\leq \sum_{k=۰}^{۲n} (\lambda\phi(۲n) + (۱ - \lambda)\phi(۰))P(K = k) \\ &= \sum_{k=۰}^{۲n} (\frac{k}{۲n}\phi(۲n) + (۱ - \frac{k}{۲n}\phi(۰))P(K = k) \\ &= \frac{۱}{۲}\phi(۰) + \frac{۱}{۲}\phi(۲n) = E[\phi(K_۲)], \end{aligned}$$

در نتیجه بنا بر قضیهٔ ۳.۳ داریم:

$$S_{K_1} \leq_{st} S_k \leq_{st} S_{K_2},$$

یعنی

$$\bar{F}_{S_{K_1}}(t) \leq \bar{F}_{S_K}(t) \leq \bar{F}_{S_{K_2}}(t), \qquad (۴)$$

از طرفی

$$\bar{F}_{S_{K_1}}(t) = \bar{F}_{S_n}(t) = \bar{F}^n_X(t)\bar{F}^n_Y(t),$$

همچنین داریم:

$$\begin{aligned}\bar{F}_{S_{K_2}}(t) =& \bar{F}^0_Y(t)\bar{F}^{2n-0}_Y(t)P(K_2 = 0)\\ &+ \bar{F}^{2n}_X(t)\bar{F}^{2n-2n}_Y(t)P(K_2 = 2n)\\ =& \frac{1}{2}\bar{F}^{2n}_X(t) + \frac{1}{2}\bar{F}^{2n}_Y(t).\end{aligned}$$

در نتیجه داریم:

$$\bar{F}^n_X(t)\bar{F}^n_Y(t) \leq \frac{1}{2}[\bar{F}^{2n}_X(t) + \bar{F}^n_Y(t)]. \qquad (۵)$$

□

۴ سیستم موازی

برای $k = 1, 2, \ldots, m-1$ طول عمر سیستم موازی که مؤلفه‌های آن از دو دستهٔ $\mathcal{B}_X$ و $\mathcal{B}_Y$ انتخاب می‌شوند، را به‌صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\begin{cases} P_0 = \max\{Y_1, \ldots, Y_m\}, \\ P_k = \max\{X_1, \ldots, X_k, Y_{k+1}, \ldots, Y_m\}, \\ P_m = \max\{X_1, \ldots, X_m\}, \end{cases} \qquad (۶)$$

که در آن $X_1, \ldots, X_k$ از دستهٔ $\mathcal{B}_X$ و $Y_{k+1}, \ldots, Y_m$ از دستهٔ $\mathcal{B}_Y$ انتخاب شده‌اند. اگر K (تعداد مؤلفه‌های انتخاب شده از دسته $\mathcal{B}_X$) تصادفی باشد، P_K به‌جای P_k در نظر گرفته می‌شود که فرض کنید K، تعداد مؤلفه‌های انتخاب‌شده از دستهٔ $\mathcal{B}_X$ یک متغیر تصادفی و مستقل از متغیرهای تصادفی مستقل X_i و Y_i است. در این صورت با استفاده از قانون احتمال کل و احتمالات انتخاب شدن مؤلفه‌ها، تابع توزیع سیستم موازی را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$F_{P_K}(t) = \sum_{k=0}^{m} F_X(t)^k F_Y(t)^{m-k} P(K = k), \quad t \geq 0.$$

فرض کنید که طول عمر مؤلفه‌های انتخاب‌شده از دستهٔ $\mathcal{B}_X$ به مفهوم تصادفی بزرگ‌تر از طول مؤلفه‌های انتخاب‌شده از دستهٔ $\mathcal{B}_Y$ باشد. یعنی $X \geq_{st} Y$. در نتیجه $F_X(t) \leq F_Y(t)$ خواهیم داشت:

$$F^{k-1}_X(t)F^{m-k+1}_Y(t) \geq F^k_X(t)F^{m-k}_Y(t),$$

بنا بر این معادل است با $F_{P_{k-1}}(t) \geq F_{P_k}(t)$، یعنی برای $k = 1, \cdots, m$ داریم $P_{k-1} \leq_{st} P_k$. لذا با افزایش k قابلیت اعتماد سیستم موازی افزایش می‌یابد. گزارهٔ زیر برای حالتی که K متغیری تصادفی است [۳].

گزارهٔ ۱.۴. *فرض کنید* $X \geq_{st} Y$ *اگر* $K_1 \leq_{st} K_2$*، آن‌گاه* $P_{K_1} \leq_{st} P_{K_2}$.

[۳] همچنین در قضیهٔ زیر ثابت کردند که گزارهٔ ۱.۴ را می‌توان تحت شرط ضعیف‌تر $\leq_{icv}$ به دست آورد.

قضیهٔ ۲.۴. *فرض کنید* $X \geq_{st} Y$ *و دنبالهٔ طول عمرهای* $\{P_0, P_1, \ldots, P_m\}$ *که در رابطهٔ (۶) تعریف شده است را داشته باشیم. اگر* $K_1 \leq_{icv} K_2$*، آن‌گاه* $P_{K_1} \leq_{st} P_{K_2}$.

مثال ۳.۴. *دو سیستم موازی* P_{K_1} *و* P_{K_2} *که هر یک از مؤلفه‌های آنها بر اساس آزمایش‌های برنولی مستقل و به‌ترتیب با پارامترهای* p_1 *و* p_2 *انتخاب شده‌اند را در نظر بگیرید. به‌طور دقیق‌تر هر مؤلفه از سیستم با طول عمر* P_{K_i}، $i = 1, 2$ *از دستهٔ* $\mathcal{B}_X$ *و* $\mathcal{B}_Y$ *با احتمالات به‌ترتیب* p_i *و* $1 - p_i$ *انتخاب شده‌اند. بنا بر این* K_i *دارای توزیع دوجمله‌ای است و تابع توزیع سیستم* P_{K_i} *به‌صورت زیر نوشته می‌شود:*

$$\begin{aligned}F_{P_{K_i}}(t) &= \sum_{k=0}^{m} C^K_n F^k_X(t)F^{m-k}_Y(t)p^k_i(1-p_i)^{m-k}\\ &= \sum_{k=0}^{m} C^k_n(F_X(t)p_i)^k(F_Y(t)(1-p_i))^{m-k}\\ &= (p_iF_X(t) + (1-p_i)F_Y(t))^m.\end{aligned}$$

همانند مثال ۲.۳ به راحتی نشان داده می‌شود که اگر $p_۱ \le p_۲$، آن‌گاه $K_۱ \le_{st} K_۲$. همچنین می‌توان نشان داد اگر $Y \ge_{st} X$، آن‌گاه $P_{K_۱} \le_{st} P_{K_۲}$.

۵ انتخاب تصادفی مؤلفه‌ها تحت آزمایش‌های برنولی

در این بخش برای سیستم‌های منسجم حالتی بررسی می‌شود که مؤلفه‌ها تحت آزمایش‌های برنولی مستقل و با احتمالاتی که ممکن است متفاوت باشند، از یکی از دو دستهٔ $\mathcal{B}_X$ و $\mathcal{B}_Y$ انتخاب می‌شوند. فرض کنید که طول عمر مؤلفه‌ها وابسته باشند. ابتدا در حالت کلّی‌تر سیستمی با تابع ساختار ϕ را در نظر بگیرید که مؤلفه‌های آن به‌طور تصادفی از دسته‌های $\mathcal{B}_X$ و $\mathcal{B}_Y$ انتخاب می‌شوند. فرض کنید طول عمر مؤلفه‌های موجود در کلاس $\mathcal{B}_X$ هم‌توزیع با X و طول عمر مؤلفه‌های موجود در کلاس $\mathcal{B}_Y$ هم‌توزیع با Y باشند. نمادهای $T_n = \phi(X_۱, \cdots, X_m)$ و $T_۰ = \phi(Y_۱, \cdots, Y_m)$ نشان‌دهندهٔ طول عمر سیستم‌های به‌دست‌آمده از مؤلفه‌های هم توزیع از دسته‌های به‌ترتیب فقط $\mathcal{B}_Y$ و فقط $\mathcal{B}_X$ باشند. به‌طور مشابه $T_k = \phi(X_۱, \cdots, X_k, Y_{k+۱}, \cdots, Y_m)$ نشان‌دهندهٔ طول عمر سیستمی است که k مؤلفه آن دارای طول عمر هم‌توزیع و از دستهٔ $\mathcal{B}_X$ و $m-k$ مؤلفه دیگر آن دارای طول عمر هم‌توزیع و از دسته $\mathcal{B}_Y$، $k = ۱, ۲, \cdots, m-۱$ هستند. در این صورت اگر k متغیری تصادفی با تکیه‌گاه $\{۰, ۱, \cdots, m\}$ باشد، آن‌گاه تابع قابلیت اعتماد T_k را می‌توان به شکل زیر نوشت [۱۴].

$$\bar{F}_{T_k}(t) = \sum_{k=۰}^{m} h(\bar{F}_{Z_۱}(t), \ldots, \bar{F}_{Z_k}(t), \bar{F}_{Z_{k+۱}}(t), \ldots, \bar{F}_{Z_m}(t)) \times P(K=k), \quad (۷)$$

که در آن

$$\bar{F}_{Z_۱}(t) = \bar{F}_{Z_۲}(t) = \cdots = \bar{F}_{Z_k}(t) = \bar{F}_X(t)$$

و

$$\bar{F}_{Z_{k+۱}}(t) = \bar{F}_{Z_{k+۲}}(t) = \cdots = \bar{F}_{Z_m}(t) = \bar{F}_Y(t),$$

و $h : [۰,۱]^m \to [۰,۱]$ تابعی صعودی است. در رابطهٔ (۷) h تابع تسلط نامیده می‌شود. تابع تسلط تابعی است صعودی و $h(۰, \cdots, ۰) = ۰$ ، $h(۱, \cdots, ۱) = ۱$. در حالت کلّی h لزوماً یک مفصل نیست و فقط به تابع ساختار ϕ و مفصل $\widehat{C}$ وابسته است. به راحتی می‌توان نشان داد که برای یک سیستم سری تابع h برابر با $\widehat{C}$ است. به‌طور مشابه هرگاه k به‌طور تصادفی و بر اساس متغیر تصادفی گسسته K با تکیه‌گاه $\{۰, ۱, \cdots, m\}$ انتخاب شود، آن‌گاه می‌توان تابع توزیع T_k را به‌صورت زیر نوشت:

$$F_{T_k}(t) = \sum_{k=۰}^{m} \widetilde{h}(F_{Z_۱}(t), \ldots, F_{Z_k}(t), F_{Z_{k+۱}}(t), \ldots, F_{Z_m}(t)) \times P(K=k), \quad (۸)$$

که در آن

$$F_{Z_۱}(t) = F_{Z_۲}(t) = \cdots = F_{Z_k}(t) = F_X(t)$$

و

$$F_{Z_{k+۱}}(t) = F_{Z_{k+۲}}(t) = \cdots = F_{Z_m}(t) = F_Y(t)$$

و $\widetilde{h}$ تابعی است صعودی در $[۰,۱]^m$ که در رابطه‌های $\widetilde{h}(۰, \cdots, ۰) = ۰$ و $\widetilde{h}(۱, \cdots, ۱) = ۱$ صدق می‌کند و فقط به تابع ساختار ϕ و تابع مفصل C وابسته است. مثلاً برای یک سیستم موازی داریم $\widetilde{h} = C$ [۱۴، ۱۵].

حال دو سیستم منسجم با طول عمرهای زیر را در نظر بگیرید:

$$T_{\mathbf{p}} = \phi(Z_{p_۱}, \ldots, Z_{p_m}), \quad T_{\mathbf{q}} = \phi(Z_{q_۱}, \ldots, Z_{q_m}) \quad (۹)$$

که در آن $\mathbf{p} = (p_۱, \ldots, p_m)$، $\mathbf{q} = (q_۱, \ldots, q_m)$، $p_i, q_i \in (۰,۱)$، $i = ۱, \ldots, m$ و ϕ تابع ساختار سیستم است. فرض کنید $(Z_{p_۱}, \ldots, Z_{p_m})$ و $(Z_{q_۱}, \ldots, Z_{q_m})$ دارای ساختار وابستگی (مفصل) یکسان باشند و X و Y نیز به‌ترتیب دارای

توابع قابلیت اعتماد $\bar{F}_X(t)$ و $\bar{F}_Y(t)$ باشند. نتیجه i–امین آزمایش برنولی مشخص می‌کند که i–امین مؤلفه سیستم از توزیع X پیروی می‌کند یا از توزیع Y. از این رو توابع قابلیت اعتماد Z_{p_i} و Z_{q_i} به‌صورت زیر هستند:

$$P(Z_{p_i} > t) = p_i\bar{F}_X(t) + (1-p_i)\bar{F}_Y(t),$$
$$P(Z_{q_i} > t) = q_i\bar{F}_X(t) + (1-q_i)\bar{F}_Y(t), \tag{10}$$

که در آن $t \in \mathbb{R}$ و $i = 1, \ldots, m$. اگر $p_i \geq q_i$ و $X \geq_{st} Y$، آن‌گاه برای $T_{\mathbf{p}}$ و $T_{\mathbf{q}}$ تعریف شده در رابطهٔ ۹ داریم $T_{\mathbf{p}} \geq_{st} T_{\mathbf{q}}$. در واقع هر دو سیستم دارای ساختارهای یکسان با مؤلفه‌هایی (که احتمالاً به دلیل نتایج متفاوت آزمایش‌های برنولی نابرابر خواهند بود) هستند. از طرفی چون بردارهای $(Z_{p_1}, \ldots, Z_{p_m})$ و $(Z_{q_1}, \ldots, Z_{q_m})$ دارای مفصل یکسان هستند، تابع تسلط هر دو سیستم برابر خواهد بود.

درگزارهٔ زیر که به راحتی و با استفاده از قضیهٔ A.8 در [۱۲] ثابت می‌شود حالت کلّی‌تری در نظر گرفته می‌شود و توزیع X_iها و Y_iها می‌تواند متفاوت در نظر گرفته شود [۱۴].

گزارهٔ ۱.۵. *دو سیستم منسجم با توابع ساختار یکسان ϕ و طول عمرهای $T_X = \phi(X_1, \ldots, X_m)$ و $T_Y = \phi(Y_1, \ldots, Y_m)$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $(X_1, \ldots, X_m)$ و $(Y_1, \ldots, Y_m)$ ساختارهای وابستگی یکسانی دارند و توابع قابلیت اعتماد حاشیه‌ای آنها به‌ترتیب برابر است با $\bar{F}_i(t)$، $\bar{G}_i(t)$ و $i = 1, \ldots, m$. اگر تابع تسلط h در فاصلهٔ $(0,1)^m$ شور–محدب(شور مقعر) باشد و به‌ازای هر t داشته باشیم:*

$$(\bar{F}_1(t), \ldots, \bar{F}_m(t)) \leq_w (\leq^w)(\bar{G}_1(t), \ldots, \bar{G}_m(t)),$$

آن‌گاه $T_X \leq_{st} (\geq_{st}) T_Y$.

چون هر مفصل ارشمیدسی یک تابع شور مقعر است [۱۶] و در سیستم‌های سری داریم $h = \widehat{C}$، گزارهٔ ۱.۵ را می‌توان برای چنین سیستم‌هایی که شامل مؤلفه‌های وابسته با مفصل بقای ارشمیدسی هستند به‌کار برد. به‌عنوان نتیجه‌ای از گزارهٔ ۱.۵، می‌توان این گزاره را برای سیستم‌های منسجم با مؤلفه‌هایی که بر اساس آزمایش‌های برنولی انتخاب می‌شوند، بیان کرد.

توجه کنید که درگزاره‌های زیر فرض می‌شود سیستم‌های منسجم دارای ساختارهای یکسان و همچنین مؤلفه‌های سیستم‌ها که تحت آزمایش‌های برنولی مستقل انتخاب می‌شوند نیز دارای ساختارهای وابستگی (مفصل) یکسان هستند [۱۴].

گزارهٔ ۲.۵. *فرض کنید $T_{\mathbf{p}}$ و $T_{\mathbf{q}}$ که در رابطهٔ (۹) تعریف شده است را داشته باشیم و $(Z_{p_1}, \ldots, Z_{p_m})$ و $(Z_{q_1}, \ldots, Z_{q_m})$ دارای ساختار وابستگی یکسان و Z_{p_i} و Z_{q_i} دارای توابع قابلیت اعتماد به‌دست‌آمده در رابطهٔ (۱۰) باشند. اگر تابع تسلط h در فاصله $(0,1)^m$ شور–محدب(شور مقعر) باشد، $X \geq_{st} Y$ و $\mathbf{p} \leq_w (\leq^w)\mathbf{q}$، آن‌گاه $T_{\mathbf{p}} \leq_{st} (\geq_{st}) T_{\mathbf{q}}$.*

در ادامه نتایج مشابهی برای ترتیب تصادفی نرخ خطر ارائه می‌شود.

گزارهٔ ۳.۵. *[۸]، فرض کنید $\bar{F}_1$ و $\bar{F}_2$ توابع قابلیت اعتماد و $\bar{F}$ و $\bar{F}^*$ دو تابع قابلیت اعتماد مرکب بر حسب $\bar{F}_1$ و $\bar{F}_2$ با وزن‌های p, q, p^*, q^*؛ $p + q = 1$ و $p^* + q^* = 1$ به‌صورت زیر باشند:*

$$\bar{F}(t) = p\bar{F}_1(t) + q\bar{F}_2(t),$$

$$\bar{F}_2^* = p^*\bar{F}_1(t) + q^*\bar{F}_2(t).$$

اگر $\bar{F}_1 \leq_{hr} \bar{F}_2$ و $q \leq q^*$، آن‌گاه $\bar{F} \leq_{hr} \bar{F}^*$.

برای اثبات دو گزارهٔ بعدی به [۱۴] مراجعه کنید.

گزارهٔ ۴.۵. *فرض کنید $T_{\mathbf{p}}$ و $T_{\mathbf{q}}$ متغیرهای تصادفی تعریف شده در رابطهٔ (۹)، بردارهای $(Z_{p_1}, \ldots, Z_{p_m})$ و $(Z_{q_1}, \ldots, Z_{q_m})$ دارای توابع مفصل یکسان و Z_{p_i} و Z_{q_i} دارای توابع قابلیت اعتماد در رابطهٔ (۱۰) باشند. علاوه بر این فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی مطلقاً پیوسته و $X \geq_{hr} Y$. اگر رابطهٔ زیر*

$$\frac{u_i}{h(u_1, \ldots, u_m)} \frac{\partial}{\partial u_i} h(u_1, \ldots, u_m) \tag{11}$$

نسبت به $u_1, \ldots, u_m$ نزولی باشد که در آن $(u_1, \ldots, u_m) \in (0,1)^m$ و برای $i = 1, \ldots, m$ و $p_i \leq q_i$، آن‌گاه $T_{\mathbf{p}} \leq_{hr} T_{\mathbf{q}}$.

گزارهٔ ۵.۵. *فرض کنید $T_{\mathbf{p}}$ و $T_{\mathbf{q}}$ متغیرهای تصادفی تعریف شده در رابطهٔ (۹)، بردارهای $(Z_{p_1}, \ldots, Z_{p_m})$ و $(Z_{q_1}, \ldots, Z_{q_m})$ دارای تابع مفصل یکسان و Z_{p_i} و Z_{q_i} دارای توابع قابلیت*

اعتماد در رابطهٔ (۱۰) باشند. علاوه بر این فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی مطلقاً پیوسته و $X \geq_{rhr} Y$. اگر رابطهٔ زیر

$$\frac{u_i}{\widetilde{h}(u_۱,\ldots,u_m)}\frac{\partial}{\partial u_i}\widetilde{h}(u_۱,\ldots,u_m) \qquad (۱۲)$$

نسبت به $u_۱,\ldots,u_m$ نزولی باشد که در آن $(u_۱,\ldots,u_m)\in(۰,۱)^m$ و برای $i=۱,\ldots,m$ و $p_i \leq q_i$، آن‌گاه $T_{\mathbf{p}} \leq_{rhr} T_{\mathbf{q}}$.

مثال ۶.۵. *دو سیستم سری را در نظر بگیرید که هر کدام از سه مؤلفه وابسته تشکیل شده و دارای طول عمرهایی هستند که وابستگی آن توسط مفصل بقای کلایتون توصیف شده است. [۱۶] بنا بر این تابع تسلط به‌صورت زیر است:*

$$h(u,v,w)=\widehat{C}(u,v,w)=(u^{-\theta}+v^{-\theta}+w^{-\theta}-۲)^{-۱/\theta}.$$

فرض کنید $\bar{F}_i$ و $\bar{G}_i$؛ $i=۱,۲,۳$ به‌ترتیب توابع قابلیت اعتماد حاشیه‌ای مؤلفه‌های اوّلین و دوّمین سیستم باشند. چون مفصل کلایتون متعلق به خانواده مفصل‌های ارشمیدسی است، h تابعی شور–مقعر است. حال اگر

$$(\bar{F}_۱(t),\bar{F}_۲(t),\bar{F}_۳(t)) \geq^w (\bar{G}_۱(t),\bar{G}_۲(t),\bar{G}_۳(t)),$$

آن‌گاه با استفاده از گزارهٔ ۱.۵ داریم، $T_۱ \leq_{st} T_۲$.

برای نمونه اگر مؤلفه‌های دو سیستم سری دارای توزیع نمایی با میانگین ۱, ۲, ۳ و ۴/۳, ۴/۳, ۳ باشد، آن‌گاه

$$(e^{-t},e^{-t/۲},e^{-t/۳}) \geq^w (e^{-۳t/۴},e^{-۳t/۴},e^{-t/۳}),\ \forall t\geq ۰$$

چون

$$e^{-t/۳}\geq e^{-t/۳},\quad e^{-t/۲}+e^{-t/۳}\geq e^{-۳t/۴}+e^{-t/۴},$$

$$e^{-t}+e^{-t/۲}+e^{-t/۳}\geq e^{-۳t/۴}+e^{-۳t/۴}+e^{-t/۳}.$$

توجه شود که آخرین معادله برابر است با

$$e^{-t}+e^{-t/۲}-۲e^{-۳t/۴}=(e^{-t/۲}+e^{-t/۴})^۲\geq ۰,\ \forall t$$

که معادل است با

$$e^{-t}+e^{-t/۲}-۲e^{-۳t/۴}\geq ۰.$$

اما رابطهٔ اخیر درست است چون

$$.e^{-t}+e^{-t/۲}-۲e^{-۳t/۴}=(e^{-t/۲}-e^{-t/۴})^۲\geqslant ۰$$

بنا بر این با استفاده از گزارهٔ ۲.۵، با ازای هر $t>۰$ داریم:

$$h(e^{-t},e^{-t/۲},۲e^{-t/۳})\leq h(e^{-۳t/۴},e^{-۳t/۴},e^{-t/۳}).$$

یعنی طول عمرهای دو سیستم در ترتیب‌های تصادفی معمولی قابل مقایسه است. شایان ذکر است که در حقیقت برای هر انتخابی از توابع قابلیت اعتماد $\bar{F}_۱$، $\bar{F}_۲$ و $\bar{F}_۳$ که

$$\bar{F}_۱(t)\leqslant \bar{G}(t)=(\frac{\bar{F}_۱(t)+\bar{F}_۲(t)+\bar{F}_۳(t)}{۳}),$$

داریم:

$$(\bar{F}_۱(t),\bar{F}_۲(t),\bar{F}_۳(t)) \geq^w (\bar{G}(t),\bar{G}(t),\bar{G}(t))\ \forall t\geq ۰.$$

بنا بر این در چنین سیستم سری با وابستگی مشخص، همگنی میان مؤلفه‌ها قابلیت اعتماد سیستم را افزایش می‌دهد. لذا در چنین حالتی بهتر است که مؤلفه‌های سیستم برای هر موقعیتی در آن به‌طور تصادفی انتحاب شوند.

۶ نتیجه‌گیری

در این مقاله سیستم‌های منسجمی مورد مطالعه قرار گرفت که مؤلفه‌های آنها به‌طور تصادفی از دو دستهٔ متفاوت انتحاب می‌شوند. در این مطالعه فرض بر این است که قابلیت اعتماد مؤلفه‌های موجود در یک دسته بیشتر از قابلیت اعتماد مؤلفه‌های موجود در دستهٔ دیگر است. تعداد مؤلفه‌های انتخاب شده از دستهٔ بهتر ممکن است ثابت یا تصادفی در نظر گرفته شود. همچنین حالتی مورد مطالعه قرار گرفت که در هر موقعیت از سیستم، مؤلفه‌ها بر اساس آزمایش‌های برنولی مستقل انتخاب می‌شوند. در این مقاله نشان داده شد که هر گاه تعداد مؤلفه‌های انتخابی از دسته بهتر بیشتر باشد، آن‌گاه سیستم به مفهوم ترتیب تصادفی معمولی ارتقا می‌یابد. همچنین گاهی انتخاب تصادفی مؤلفه‌ها از دسته‌های مختلف می‌تواند منجر به افزایش قابلیت اعتماد سیستم گردد.

مراجع

[1] Baxter, L. A., and Harche, F. (1992). On the optimal assembly of series-parallel systems. *Operations Research Letters*, **11**(**3**), 153-157.

[2] Di Crescenzo, A. (2007). A Parrondo paradox in reliability theory. *arXiv preprint math*/0602308.

[3] Di Crescenzo, A., and Pellerey, F. (2011). Stochastic comparisons of series and parallel systems with randomized independent components. *Operations Research Letters*, **39**(**5**), 380-384.

[4] Chern, M. S. (1992). On the computational complexity of reliability redundancy allocation in a series system. *Operations Research Letters*, **11**(**5**), 309-315.

[5] Eryilmaz, S. (2012). On the mean residual life of a k-out-of-n: G system with a single cold standby component. *European Journal of Operational Research*, **222**(**2**), 273-277.

[6] Hazra, N. K., and Nanda, A. K. (2014). Some results on series and parallel systems of randomized components. *Operations Research Letters*, **42**(**2**), 132-136.

[7] Hazra, N. K., Finkelstein, M., and Cha, J. H. (2017). On optimal grouping and stochastic comparisons for heterogeneous items. *Journal of Multivariate Analysis*, **160**, 146-156.

[8] Martinez, P. J. H. (2007). *Estudio de la Forma de Funciones de Fiabilidad en Poblaciones Heterogéneas* (Doctoral dissertation, Universidad de Murcia).

[9] Kuo, W., and Prasad, V. R. (2000). An annotated overview of system-reliability optimization. *IEEE Transactions on Reliability*, **49**(**2**), 176-187.

[10] Li, X., and Ding, W. (2010). Optimal allocation of active redundancies to k-out-of-n systems with heterogeneous components. *Journal of Applied Probability*, **47**(**1**), 254-263.

[11] Malon, D. M. (1990). When is greedy module assembly optimal?. *Naval Research Logistics (NRL)*, **37**(**6**), 847-854.

[12] Marshall, A. W., Olkin, I., and Arnold, B. C. (1979). *Inequalities: Theory of Majorization and its Applications* (Vol. 143, pp. xx+-569). New York: Academic press.

[13] Navarro, J., and Rychlik, T. (2010). Comparisons and bounds for expected lifetimes of reliability systems. *European Journal of Operational Research*, **207**(**1**), 309-317.

[14] Navarro, J., Pellerey, F., and Di Crescenzo, A. (2015). Orderings of coherent systems with randomized dependent components. *European Journal of Operational Research*, **240**(**1**), 127-139.

[15] Navarro, J., del Águila, Y., Sordo, M. A., and Suárez□Llorens, A. (2014). Preservation of reliability classes under the formation of coherent systems. *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, **30(4)**, 444-454.

[16] Nelsen, R. B. (2007). *An Introduction to Copulas*. Springer Science and Business Media.

[17] Prasad, V. R., and Raghavachari, M. (1998). Optimal allocation of interchangeable components in a series-parallel system. *IEEE Transactions on Reliability*, **47(3)**, 255-260.

[18] Salehi, M., Shishebor, Z., and Asadi, M. (2019). On the reliability modeling of weighted k-out-of-n systems with randomly chosen components. *Metrika*, **82(5)**, 589-605.