برآوردهای E-بیزی و بیزی سلسله مراتبی پارامتر توزیع رایلی

علی شادرخ،[۱] شهرام یعقوب زاده شهرستانی[۲]

تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۱/۲۵
تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۶/۳۰

چکیده:

در این مقاله برآوردهای E-بیزی و بیزی سلسله مراتبی پارامتر توزیع رایلی تحت تابع زیان درجهٔ دوم و بر اساس نمونه‌های سانسور فزآیندهٔ نوع دوم به دست آورده می‌شود و سپس با استفاده از روش شبیه‌سازی مونته‌کارلو، این برآوردگرها با هم و با برآوردگر بیزی مقایسه می‌شوند.

واژه‌های کلیدی: توزیع رایلی، برآورد E-بیزی، برآورد بیزی سلسله مراتبی، سانسور فزآیندهٔ نوع دوم، شبیه‌سازی مونته‌کارلو.

۱ مقدمه

توزیع رایلی که در [۲۷] معرفی شد، به دلیل آن که در حوزه‌های مختلف علم و تکنولوژی مانند مدل‌بندی ارتفاع امواج دریا در اقیانوس شناسی، مهندسی ارتباطات، توزیع طول عمر قطعات صنعتی، مطالعه‌های بالینی در بارهٔ بیماران سرطانی، نظریه قابلیت اطمینان و تحلیل بقا کاربرد دارد، برآورد پارامتر آن به روش‌های مختلف توصیه می‌شود. نویسندگان مختلفی در بارهٔ توزیع رایلی مطالعه‌هایی انجام دادند. [۱۹]، نقش مهم این توزیع را در مهندسی ارتباطات نشان دادند. [۱۲]، کاربرد توزیع رایلی را در مطالعه‌های بالینی مربوط به بیماران سرطانی نشان دادند. [۱۸]، برآورد بیزی و بهترین برآورد ناوردای[۳] پارامتر توزیع رایلی را تحت تابع زیان آنتروپی به دست آورد. [۲۱]، بر اساس نمونه‌های چندکی، برآورد پارامتر، تابع خطر و تابع قابلیت اعتماد توزیع رایلی را به دست آورد. [۲۰]، برآورد بیزی پارامتر توزیع رایلی بر اساس توزیع پیشین تعمیم یافتهٔ جفریز به دست آوردند.

سانسور کردن یک امر متداول در آزمایش‌های مربوط به طول عمر و مطالعه‌های قابلیت اطمینان است. اگر آزمایشگر تصمیم بگیرد با مشاهدهٔ اوّلین شکست، R_1 واحد از واحدهای آزمایشی سالم و در زمان دومین شکست، R_2 واحد از واحدهای آزمایشی سالم را به تصادف از آزمایش خارج کند و این کار را در زمان m-امین شکست ادامه دهد، همه واحدهای باقی‌مانده یعنی $R_m = n - R_1 - R_2 - \cdots - R_{m-1} - m$ واحد از آزمایش خارج می‌شوند، در این صورت طرح سانسور فزآیندهٔ نوع دوم[۴] رخ می‌دهد. در این حالت زمان‌های شکست واحدها، متغیرهای تصادفی وR_iها ثابت‌های از قبل تعیین شده‌اند. در نتیجهٔ این طرح سانسور، m مقدار مرتب‌شده به دست می‌آید که آماره‌های ترتیبی سانسور فزآیندهٔ نوع دوم نامیده می‌شود [۱۱]. برای مطالعهٔ بیشتر در این زمینه به [۱۳] مراجعه کنید. در سال‌های اخیر مطالعه‌های زیادی روی روش‌های استنباطی با داده‌های سانسور فزآیندهٔ نوع دوم انجام شده که می‌توان به [۱۴، ۱۵، ۱۶] اشاره کرد. توزیع پیشین بیزی سلسله مراتبی ابتدا توسط لیندلی و اسمیت [۲۶] معرفی شد و سپس توسط هان [۲۲] مورد

[۱] هیأت علمی گروه آمار، دانشگاه پیام نور تهران، تهران، ایران
[۲] هیأت علمی گروه آمار، دانشگاه پیام نور تهران، تهران، ایران

[۳] The best invariant estimator

[۴] Progressive type-II censored

[۵] Experimental bayesian estimator

بررسی بیشتری قرار گرفت و روش‌های E-بیز[5] و بیزی سلسله مراتبی[6] معرفی شد. اخیراً روش‌های E-بیزی و بیزی سلسله مراتبی برای برآورد پارامتر توزیع نمایی و برای برآورد پارامتر نسبت توزیع دوجمله‌ای در[۱۴، ۱۳] ، برآورد پارامتر و تابع قابلیت اعتماد توزیع بور نوع ۱۲ بر اساس نمونه‌های سانسور فزآیندهٔ نوع دوم [۲۵]، برآورد پارامتر توزیع پاسکال در [۱۸] مورد استفاده قرار گرفته شد. در این مقاله توزیع رایلی با تابع چگالی احتمال و تابع توزیع تجمعی به‌ترتیب برابر با رابطه‌های زیر است:

$$f(x;\lambda) = 2\lambda x e^{-\lambda x^2}, \quad x > 0, \lambda > 0 \qquad (۱)$$

$$F(x;\lambda) = 1 - e^{-\lambda x^2}, \quad x > 0, \lambda > 0. \qquad (۲)$$

در این مقاله در بخش دوم برآوردهای E-بیزی و بیزی سلسله مراتبی پارامتر توزیع رایلی تحت تابع زیان درجهٔ دوم و بر اساس طرح سانسور فزآیندهٔ نوع دوم به دست آورده می‌شود. در بخش سوم با استفاده از شبیه‌سازی مونته‌کارلو برآوردگرهای بیزی، E-بیزی و بیزی سلسله مراتبی با هم مقایسه می‌شوند. بخش چهارم هم به نتایج مقاله اختصاص داده شده است.

۲ برآورد پارامتر λ

در این بخش برآوردهای E-بیزی و بیزی سلسله مراتبی پارامتر λ تحت تابع زیان درجهٔ دوم و بر اساس نمونه‌های سانسور فزآیندهٔ نوع دوم به دست می‌آید. بنا بر این توزیع پیشین λ، توزیع گاما با ابر پارامترهای a و b فرض می‌شود که به‌صورت زیر است:

$$\pi(\lambda|a,b) = \frac{b^a}{\Gamma(a)}\lambda^{a-1}e^{-\lambda b}, \quad \lambda > 0, a, b > 0 \qquad (۳)$$

[۲۲]، ابرپارامترهای a و b طوری در نظر گرفته می‌شود که $\pi(\lambda|a,b)$ نسبت به λ کاهشی باشد، بنا بر این با توجه به‌عبارت زیر:

$$\frac{d\pi(\lambda|a,b)}{d\lambda} = \frac{b^a \lambda^{a-2} e^{-\lambda b}}{\Gamma(a)}\left((a-1) - \lambda b\right),$$

حوزهٔ مقادیر a و b به‌صورت $b > 0$ و $0 < a \leq 1$ است. [۱۷]، نشان داد، که با بزرگ شدن b کارایی برآوردگر بیزی λ کاهش می‌یابد. بنا بر این ابر پارامتر b از بالاکراندار و به‌صورت $0 < b < c$ است. [۲۴]، نشان داد که مناسب‌ترین توزیع برای b، توزیع یکنواخت است. بنا بر این در این مقاله توزیع b، یعنی $\pi_1(b)$ توزیع یکنواخت پیوسته در بازه $(0, c)$ و $a = 1$ در نظر گرفته می‌شوند، که در این صورت رابطهٔ (۳) برابر با عبارت $\pi(\lambda|b) = be^{-\lambda b}$ می‌شود.

۱.۲ برآورد E-بیزی λ

در این بخش تحت تابع زیان $L(\hat{\theta}, \theta) = (\hat{\theta} - \theta)^2$ که $\hat{\theta}$ برآورد θ است، ابتدا برآورد بیزی و سپس برآورد E-بیزی λ به دست می‌آید. اگر توزیع رایلی با تابع چگالی احتمال رابطهٔ (۱)، توزیع زمان شکست و $Y_{1:m:n}, Y_{2:m:n}, \cdots, Y_{m:m:n}$ یک نمونه سانسورشده فزآیندهٔ نوع دوم از آن و y_i یافته $Y_{i:m:n}$ باشد، آن‌گاه با توجه به بالاکریشنان و اگروالا [۱۵]، تابع درست‌نمایی به‌صورت زیر است:

$$L(\lambda|\mathbf{Y}) = C\left(\prod_{i=}^{m} y_i\right) 2^m \lambda^m e^{-\lambda\sum_{i=1}^{m}(1+R_i)y_i^2} \qquad (۴)$$

که در آن $\mathbf{Y} = (Y_{1:m:n}, Y_{2:m:n}, \cdots, Y_{m:m:n})$ و

$$C = n(n - R_1 - 1)\cdots(n - R_1 - \ - R_{m-1} - m + 1)$$

هستند. با توجه به رابطهٔ (۴) توزیع پسین λ به‌صورت زیر است:

$$\pi^*(\lambda|\mathbf{Y}) = \frac{\left(b + \sum_{i=1}^{m}(1 + R_i)y_i^2\right)^{m+1}}{m!} \times \lambda^m e^{-\lambda\left(b + \sum_{i=1}^{m}(1+R_i)y_i^2\right)}. \qquad (۵)$$

بنا بر این برآورد بیزی پارامتر λ تحت تابع زیان درجهٔ دوم که با نماد $\hat{\lambda}_{Bay}(b)$ نشان داده می‌شود به‌صورت زیر است:

$$\hat{\lambda}_{Bay}(b) = E(\lambda|\mathbf{Y}) = \frac{m+1}{b + \sum_{i=1}^{m}(1 + R_i)y_i^2}. \qquad (۶)$$

اگر برآورد بیزی پارامتر λ، $\hat{\lambda}_{Bay}(b)$ و توزیع پیشین b، $\pi_1(b)$ باشد، آن‌گاه برآورد E-بیزی پارامتر λ که با نماد $\hat{\lambda}_{EBay}$ نیز

[6] Hierarchical bayesian estimator

نشان داده می‌شود، به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\hat{\lambda}_{EBay} = \int_{\Lambda} \hat{\lambda}_{Bay}(b)\pi_1(b)db, \quad b \in \Lambda.$$

بنا بر این با توجه به رابطهٔ (۶) و توزیع b، برآورد E-بیزی λ به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$\hat{\lambda}_{EBay} = \frac{1}{c}\int_{0}^{c} \hat{\lambda}_{Bay}(b)\pi_1(b)db \tag{7}$$

$$= \frac{m+1}{c}\left[\log\left(c+\sum_{i=1}^{m}(1+R_i)y_i^2\right) - \log\left(\sum_{i=1}^{m}(1+R_i)y_i^2\right)\right]. \tag{8}$$

۲.۲ برآورد بیزی سلسله مراتبی پارامتر λ

فرض کنید b یک ابر پارامتر در پارامتر θ، $\pi(\theta|b)$ تابع چگالی پیشین θ و $\pi_1(b)$ تابع چگالی پیشین ابر پارامتر b هستند، آن‌گاه تابع چگالی پیشین سلسله مراتبی θ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\pi_2(\theta) = \int_{\Lambda} \pi(\theta|b)\pi_1(b)db, \quad b \in \Lambda.$$

بنا بر این تابع چگالی پیشین سلسله مراتبی λ به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$\pi_2(\lambda) = \int_{0}^{c} \pi(\lambda|b)\pi_1(b)db = \frac{1}{c}\int_{0}^{c} be^{-b\lambda}db = \frac{1-(1+\lambda c)e^{-c\lambda}}{c\lambda^2}, \tag{9}$$

در نتیجه تابع چگالی پسین بیزی λ به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\pi^{**}(\lambda|\mathbf{Y}) = \frac{\lambda^{m-2}\left[1-(1+\lambda c)e^{-c\lambda}\right]e^{-\lambda\sum_{i=1}^{m}(1+R_i)y_i^2}}{\int_{0}^{\infty}\lambda^{m-2}\left[1-(1+\lambda c)e^{-c\lambda}\right]e^{-\lambda\sum_{i=1}^{m}(1+R_i)y_i^2}d\lambda}. \tag{10}$$

اکنون با استفاده از رابطهٔ (۹) برآورد بیزی سلسله مراتبی پارامتر λ به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$\hat{\lambda}_{HBay} = E_{\pi^{**}}(\lambda|\mathbf{Y}) = \frac{m-1}{T(c+T)} \times \frac{(c+T)^{m+1}-T^{m+1}-(m+1)cT^m}{(c+T)^m-T^m-mcT^{m-1}}, \tag{11}$$

که در آن $T=\sum_{i=1}^{m}(1+R_i)y_i^2$ است.

۳ شبیه‌سازی

در این بخش با استفاده از شبیه‌سازی مونته‌کارلو، برآوردهای بیزی، E-بیزی و بیزی سلسله مراتبی λ با هم مقایسه می‌شوند، که برای این منظور به‌کمک الگوریتم بالاکریشنان وسندهو [۱۴]، از توزیع رایلی با تابع چگالی احتمال در رابطهٔ (۱) و با پارامتر $\lambda = 2$، نمونه‌های سانسور فزآیندهٔ نوع دوم به‌صورت زیر تولید می‌شوند:

گام اول: ابتدا m عدد تصادفی مستقل از توزیع یکنواخت استاندارد تولید کنید و آنها را $W_1, W_2, \cdots, W_m$ بنامید.

گام دوم: برای $i = 1, 2, \cdots, m$، V_iها به‌صورت $V_i = W_i^{\{1/(i+\sum_{j=m+1-i}^{m} R_j)\}}$ تعریف کنید.

گام سوم : برای $i = 1, 2, \cdots, m$، $U_{i:m:n}$ها را به‌صورت $U_{i:m:n} = 1 - \prod_{j=1}^{i} V_{m+1-j}$ تعریف کنید، که در این حالت $U_{1:m:n}, U_{2:m:n}, \cdots, U_{m:m:n}$، یک نمونهٔ سانسورشدهٔ فزآیندهٔ نوع دوم از توزیع یکنواخت استاندارد است.

گام چهارم: برای $i = 1, 2, \cdots, m$، $Y_{i:m:n}$ها را از رابطهٔ $Y_{i:m:n} = F^{-1}(U_{i:m:n})$ به دست آورید، که $F^{-1}(.)$ وارون تابع توزیع متناظر با تابع چگالی احتمال در رابطهٔ (۱ است. در این حالت $Y_{1:m:n}, Y_{2:m:n}, \cdots, Y_{m:m:n}$، آماره‌های ترتیبی سانسور شدهٔ فزآیندهٔ نوع دوم از توزیع رایلی با تابع چگالی احتمال در رابطهٔ (۱۰) هستند. اکنون با استفاده از نمونهٔ تولید شدهٔ $Y_{1:m:n}, Y_{2:m:n}, \cdots, Y_{m:m:n}$ و به‌کمک رابطه‌های (۶)، (۷) و (۱۰) برآوردگرهای بیزی، E-بیزی و بیزی سلسله مراتبی به دست می‌آیند.

گام‌های اول تا چهارم ۱۰۰۰ بار تکرار می‌شوند و سپس میانگین مقادیر برآوردگرها و جذر خطای میانگین توان دوم برآوردگرها $(\sqrt{MSE})$ محاسبه می‌شود، که نتایج در جدول‌های ۱ و ۲ آمده‌اند و بیان‌کنندهٔ آن است که برآورد بیزی پارامتر توزیع رایلی از برآوردهای E-بیزی و بیزی سلسله مراتبی و برآورد E-بیزی تجربی نیز از برآورد بیزی سلسله مراتبی بهتر است.

۴ نتایج

در این مقاله برآوردهای E-بیزی و بیزی سلسله مراتبی پارامتر توزیع رایلی بر اساس نمونه‌های سانسور فزآیندهٔ نوع دوم به دست آمد. سپس با استفاده از شبیه‌سازی مونته‌کارلو نشان داده شد، که برآورد بیزی از برآوردهای E-بیزی و بیزی سلسله مراتبی بهتر و برآورد E-بیزی نیز از برآورد بیزی سلسه مراتبی بهتر است.

سپاس‌گزاری

نویسندگان از سردبیر و داوران محترم به‌خاطر ارزیابی این مقاله و پیشنهادهای ارزندهشان نهایت تشکر و قدردانی را دارند.

جدول ۱. میانگین برآوردها با مقدار $\sqrt{MSE}$ آنها تحت تابع زیان درجهٔ دوم برای $b=$ ۱٫۵ و $c=$ ۲

n	m	طرح	$\hat{\lambda}_{Bay}$	$\hat{\lambda}_{EBay}$	$\hat{\lambda}_{HBay}$
۱۰	۵	(۵, ۰, ⋯ , ۰)	۰٫۹۷۵۴(۰٫۸۸۷۴)	۳٫۲۸۰(۱٫۰۰۵)	۴٫۵۵۱(۲٫۵۷۰)
۱۰	۵	(۲, ۳, ۰, ⋯ , ۰)	۱٫۸۸۶(۰٫۳۱۳۶)	۳٫۱۲۴(۰٫۹۴۴۲)	۴٫۱۵۷(۲٫۳۷۱)
۲۰	۱۰	(۱۰, ۰, ⋯ , ۰)	۰٫۹۵۹۶(۰٫۰۴۷۸)	۵٫۰۴۲(۱٫۳۰۲)	۷٫۱۱۹(۲٫۹۵۲)
۲۰	۱۰	(۳, ۴, ۳, ۰, ⋯ , ۰)	۲٫۳۸۶(۰٫۲۹۷۵)	۴٫۶۰۱(۱٫۱۴۳)	۶٫۱۵۳(۲٫۳۷۴)
۵۰	۳۰	(۲۰, ۰, ⋯ , ۰)	۱٫۴۰۹(۰٫۰۳۸۸)	۱۱٫۲۳(۲٫۳۱۹)	۱۵٫۷۷(۴٫۶۳۴)
۵۰	۴۰	(۱, ۴, ۵, ۰, ⋯ , ۰)	۴٫۳۵۹(۰٫۹۵۰۱)	۴٫۶۶۲(۱٫۱۶۷)	۶٫۲۷۵(۲٫۴۷۴)
۵۰	۲۵	(۱, ⋯ , ۱)	۷٫۰۱۶(۱٫۳۱۴)	۷٫۲۱۶(۱٫۴۲۹)	۹٫۰۳۷(۲٫۳۷۴)
۸۰	۵۰	(۱۵, ۱۵, ۰, ⋯ , ۰)	۱٫۸۱۴(۰٫۰۷۱۳)	۱۰٫۹۲(۲٫۴۳۸)	۱۵٫۲۲(۴٫۸۵۰)

جدول ۲. میانگین برآوردها با مقدار $\sqrt{MSE}$ آنها تحت تابع زیان درجهٔ دوم برای $b=$ ۰٫۵ و $c=$ ۱٫۵

n	m	طرح	$\hat{\lambda}_{Bay}$	$\hat{\lambda}_{EBay}$	$\hat{\lambda}_{HBay}$
۱۰	۵	(۵, ۰, ⋯ , ۰)	۰٫۹۷۸۴(۰٫۰۸۵۸)	۳٫۶۹۳(۱٫۱۸۷۰)	۴٫۶۰۸(۲٫۳۶۷)
۱۰	۵	(۲, ۳, ۰, ⋯ , ۰)	۱٫۸۶۶(۰٫۳۲۵۴)	۳٫۴۲۰(۱٫۱۴۴)	۳٫۱۳۶(۲٫۱۹۲)
۲۰	۱۰	(۱۰, ۰, ⋯ , ۰)	۰٫۹۵۹۵(۰٫۴۸۷۲)	۵٫۵۵۳(۱٫۵۳۸۶)	۷٫۱۳۸(۲٫۹۴۰)
۲۰	۱۰	(۳, ۴, ۳, ۰, ⋯ , ۰)	۲٫۳۸۴(۰٫۲۹۷۵)	۵٫۰۲۶(۱٫۳۳۸)	۶٫۱۶۶(۲٫۳۴۱)
۵۰	۳۰	(۲۰, ۰, ⋯ , ۰)	۰٫۹۶۳۵(۰٫۰۲۶۸)	۹٫۰۰۴(۲٫۲۰۰)	۱۱٫۷۶(۴٫۰۰۹)
۵۰	۴۰	(۱, ۴, ۵, ۰, ⋯ , ۰)	۴٫۳۵۰(۰٫۹۷۲۱)	۵٫۰۹۳(۱٫۳۹۰)	۶٫۲۸۷(۲٫۴۶۹)
۵۰	۲۵	(۱, ⋯ , ۱)	۶٫۹۵۴(۱٫۳۷۸)	۷٫۶۱۳(۱٫۶۸۴)	۸٫۹۴۸(۲٫۴۹۷)
۸۰	۵۰	(۱۵, ۱۵, ۰, ⋯ , ۰)	۱٫۸۲۰(۰٫۰۶۶۵)	۱۱٫۹۷(۲٫۶۸۱)	۱۵٫۴۸(۴٫۶۲۹)

مراجع

[1] Asgharzadeh, A., and Moradnejad, P. (2008). Inference for a Skew Normal Distribution Based on Progressively Type-II Censored Samples. *Journal of Statistical Research of Iran*, **5(1)**, 33-56.

[2] Bhattacharya, S. K., and Tyagi, R. K. (1990). Bayesian survival analysis based on the Rayleigh model. *Trabajos de Estadistica*, **5**, 81-92.

[3] Balakrishnan, N., and Kannan, N. (2000). Point and Interval Estimation for the Parameters of the Logistic Distribution Based on Progressively Type-II Censored Samples. *In Handbook of Statistics*, **20**, 431-456.

[4] Balakrishnan, N., and Sandhu, R. A. A. (1995). Simple simulational algorithm for generating progressive Type-II censored samples. *Journal of the American Statistical Association*, **49**, 229-230.

[5] Balakrishnan, N., and Aggarwala, R. (2000). *Progressive Censoring: Theory, Methods and Applications*. Birkhauser, Boston.

[6] Balakrishnan, N., and Asgharzadeh, A. (2005). Inference for the scaled halflogistic distribution based on progressively Type II censored samples. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, **34** , 73-87.

[7] Berger, J. O. (1985). *Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis*, second ed., Springer-Verlag, New York.

[8] Chung, Y. (1995). Estimation of scale parameter from Rayleigh distribution under entropy loss. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, **2**(**1**), 33-40.

[9] Dyer, D. D. and Whisenand, C. W. (1973). Best linear unbiased estimator of the parameter of the Rayleigh distribution. *IEEE Transactions on Reliability*, **22**, 27-34.

[10] Dey, S., and Maiti, S. S. (2012). Bayesian estimation of the parameter of Rayleigh distribution under the extended Jeffrey's prior. *Electronic Journal of Applied Statistical Analysis*, **5**(1), 44-59.

[11] Fernandez, A. J. (2010). Bayesian estimation and prediction based on Rayleigh sample quantiles. *Quality and Quantity*, **44**, 1239-1248.

[12] Han, M. (1997). The structure of hierarchical prior distribution and its applications. *Chinese Operations Research and Management Science*, **6**(**3**), 31-40.

[13] Han, M. (2009). E-Bayesian estimation and hierarchical Bayesian estimation of failure rate. *Applied Mathematical Modelling*, **33**(**4**), 1915-1922.

[14] Han, M. (2011). E-Bayesian estimation of the reliability derived from Binomial distribution. *Applied Mathematical Modelling*, **35**, 2419-2424.

[15] Jaheen, Z. F., and Okasha, H. M. (2011). E-Bayesian estimation for the Burr type XII model based on type-2 censoring. *Applied Mathematical Modelling*, 35, 4730-4737.

[16] Lindley, D. V., and Smith, A. F. (1972). Bayes estimation for the linear model. *Journal of the Royal Statistical Society-Series B*, **34**, 1-41.

[17] Rayleigh, J. W. S. (1880). On the resultant of a large number of vibration of the somepith and of arbitrary phase. *Philosophical Magazine, 5th series*, **10**, 73-78.

[18] Wang, J., Li, D., and Chen, D. (2012). E-Bayesian estimation and hierarchical bayesian estimation of the system reliability parameter. *Systems Engineering Procedia*, **3**, 282–289.