# مقایسه روش‌های برآورد قابلیت اعتماد مدل تنش-مقاومت چندمؤلفه‌ای در توزیع رایلی وارون

شهرام یعقوب‌زاده شهرستانی[۱]

تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۳/۱۶
تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۷/۱۰

چکیده:
در این مقاله، قابلیت اعتماد در مدل تنش-مقاومت چندمؤلفه‌ای، وقتی که متغیرهای تنش و مقاومت دارای توزیع‌های رایلی وارون با پارامترهای متفاوت $\alpha$ و $\beta$ هستند، به روش‌های ماکسیمم درست‌نمایی، بیزی و بیزی تجربی برآورد می‌شود. سپس به‌کمک شبیه‌سازی مونته‌کارلو و دو مجموعه‌داده‌های واقعی، این روش‌های برآورد با هم مقایسه می‌شوند.

**واژه‌های کلیدی:** مدل تنش-مقاومت چندمؤلفه‌ای، قابلیت اعتماد، برآورد ماکسیمم درست‌نمایی، برآورد بیزی، برآورد بیزی تجربی، توزیع رایلی معکوس.

## ۱ مقدمه

تابع چگالی احتمال و تابع توزیع تجمعی توزیع رایلی وارون [۲۱] به‌ترتیب به‌صورت زیر است:

$$f(x;\alpha)=\frac{2\alpha}{x^3}e^{-\frac{\alpha}{x^2}},\quad x>0,\alpha>0, \tag{1}$$

$$F(x;\alpha)=e^{-\frac{\alpha}{x^2}},x>0,,\quad \alpha>0. \tag{2}$$

در این مقاله، توزیع با تابع چگالی احتمال در رابطهٔ (۱) و تابع توزیع تجمعی در رابطهٔ (۲) با نماد $IR(\alpha)$ نشان داده می‌شود. توزیع رایلی وارون برای مدل‌بندی داده‌های تنش-مقاومت و داده‌های مربوط به طول عمر بسیار مؤثر است. مدل‌های تنش-مقاومت به بررسی مقاومت مؤلفه مورد نظر در برابر فشار وارد بر آن می‌پردازد که میزان این فشار یک متغیر تصادفی است. این مدل‌ها به‌طور گسترده در بسیاری از شاخه‌های علوم مانند روانشناسی، داروسازی، پزشکی و مهندسی کاربرد دارند. چنین سیستمی تا وقتی فعال است که مقاومت سیستم از تنش وارد بر آن بیشتر باشد. بنا بر این اگر $X$ و $Y$ دو متغیر تصادفی مستقل باشند به‌طوری که برای یک سیستم، $X$ بیان‌کنندهٔ مقاومت و $Y$ بیان‌کنندهٔ تنش وارد بر آن باشد، $R=P(X>Y)$ که پارامتر قابلیت اعتماد سیستم تک‌مؤلفه‌ای نام دارد، میزان کارایی سیستم را نشان می‌دهد. در این مقاله برآورد قابلیت اعتماد[۲] در مدل تنش-مقاومت چندمؤلفه‌ای[۳] بر اساس توزیع رایلی وارون به دست آورده می‌شود. بنا بر این یک سیستم با $k$ مؤلفه را در نظر بگیرید که این مؤلفه‌ها، به‌ترتیب مقاومت‌های تصادفی $X_1$، $X_2$، $\cdots$، $X_k$ دارند و متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع با توزیع $IR(\alpha)$ هستند که هر کدام از این $k$ مؤلفه، تنش تصادفی $Y$ با توزیع $IR(\beta)$ دارد. با توجه به [۴]، این سیستم تا زمانی فعال است که حد اقل $s$ مؤلفه از $k$ مؤلفه، مقاومتش بر تنش آن غلبه کند. بنا بر این اگر $Y$، $X_1$، $X_2$، $\cdots$، $X_k$ متغیرهای تصادفی مستقل از هم و $G(y)$ تابع توزیع پیوسته $Y$ و $F(x)$ تابع توزیع پیوسته مشترک $X_1$، $X_2$، $\cdots$، $X_k$ باشند، آن‌گاه با توجه به [۴]، قابلیت اعتماد در سیستم چندمؤلفه‌ای به‌صورت

[۱] هیأت علمی گروه آمار، دانشگاه پیام نور تهران، تهران، ایران

[۲] Reliability estimation

[۳] Multicomponent stress-strength model

زیر تعریف می‌شود:

$$R_{s,k}=\sum_{i=s}^{k}\binom{k}{i}\int_{-\infty}^{\infty}(۱-F(y))^{i}(F(y))^{k-i}\,dG(y) \qquad (۳)$$

نویسندگان زیادی به برآورد قابلیت اعتماد در سیستم‌های تنش-مقاومت تک مؤلفه‌ای برای توزیع‌های مختلف پرداخته‌اند. بعضی از آنها عبارت‌اند از: [۱، ۲، ۳، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۴، ۱۵]. برآورد قابلیت اعتماد در سیستم‌های تنش-مقاومت چندمؤلفه‌ای که توسط [۴، ۱۲] مورد بررسی قرار گرفت، در سال‌های اخیر نیز مورد توجه بعضی از نویسندگان قرار گرفت. مانند [۱۶، ۱۷، ۱۸، ۲۰] که به برآورد قابلیت اعتماد در سیستم‌های تنش-مقاومت چندمؤلفه‌ای به‌ترتیب برای توزیع‌های لگ-لوژستیک، نمایی تعمیم‌یافته، رایلی و و ایبول توانی پرداخته‌اند. در بخش دوم این مقاله، برآورد ماکسیمم درست‌نمایی، برآورد بیزی و برآورد بیزی تجربی[۴] $R_{s,k}$ به دست آورده می‌شود. در بخش سوم به روش مونته‌کارلو، شبیه‌سازی انجام می‌شود. همچنین در این بخش از دو مجموعه‌داده‌های واقعی، برای تشریح روش‌های برآورد استفاده می‌گردد. بخش چهارم نیز به نتایج مقاله اختصاص داده شده است.

## ۲ روش‌های برآورد $R_{s,k}$

فرض کنید $X$ (مقاومت ) و $Y$ (تنش) متغیرهای تصادفی مستقل و به‌ترتیب دارای توزیع‌های $IR(\alpha)$ و $IR(\beta)$ هستند. با توجه به رابطهٔ (۳)، قابلیت اعتماد مدل تنش-مقاومت چندمؤلفه‌ای برای توزیع رایلی وارون به‌صورت زیر است:

$$R_{s,k}=\sum_{i=s}^{k}\binom{k}{i}\int_{۰}^{\infty}\left(۱-e^{-\frac{\alpha}{y^{۲}}}\right)^{i}\left(e^{-\frac{\alpha}{y^{۲}}}\right)^{k-i}\left(\frac{۲\beta}{y^{۳}}e^{-\frac{\beta}{y^{۲}}}\right)dy$$

به‌کمک بسط دوجمله‌ای داریم:

$$\begin{aligned}R_{s,k}&=\sum_{i=s}^{k}\sum_{j=۰}^{i}\binom{k}{i}\binom{i}{j}(-۱)^{j}\int_{۰}^{\infty}\left(\frac{۲\beta}{y^{۳}}\right)e^{-\frac{\beta+(k-i+j)\alpha}{y^{۲}}}dy\\&=\sum_{i=s}^{k}\sum_{j=۰}^{i}\binom{k}{i}\binom{i}{j}\frac{(-۱)^{j}\beta}{\beta+(k-i+j)\alpha}.\end{aligned} \qquad (۴)$$

### ۱.۲ برآورد ماکسیمم درست‌نمایی $R_{s,k}$

فرض کنید $X$ دارای توزیع $IR(\alpha)$ و $Y$ دارای توزیع $IR(\beta)$ و $X_۱,X_۲,\cdots,X_n$ یک نمونهٔ تصادفی از $X$ و $Y_۱,Y_۲,\cdots,Y_n$ یک نمونهٔ تصادفی از $Y$ هستند. بنا بر این لگاریتم تابع درست‌نمایی به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned}L(\alpha,\beta)=&n\log(۲\alpha)-۳\left(\sum_{i=۱}^{n}\log x_i+\sum_{j=۱}^{m}\log y_j\right)\\&+m\log(۲\beta)-\alpha\sum_{i=۱}^{n}\frac{۱}{x_i^{۲}}-\beta\sum_{j=۱}^{n}\frac{۱}{y_j^{۲}}.\end{aligned}$$

برآوردهای ماکسیمم درست‌نمایی $\alpha$ و $\beta$ که به‌ترتیب با نمادهای $\hat\alpha$ و $\hat\beta$ نشان داده می‌شود، به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$\hat\alpha=n\left(\sum_{i=۱}^{n}\frac{۱}{x_i^{۲}}\right)^{-۱},\hat\beta=m\left(\sum_{j=۱}^{m}\frac{۱}{y_j^{۲}}\right)^{-۱}.$$

بعد از به دست آوردن $\hat\alpha$ و $\hat\beta$، برآورد ماکسیمم درست‌نمایی $R_{s,k}$ که با نماد $\hat R_{s,k}^{ML}$ نشان داده می‌شود، به‌صورت زیر است:

$$\hat R_{s,k}^{ML}=\sum_{i=s}^{k}\sum_{j=۰}^{i}\binom{k}{i}\binom{i}{j}\frac{(-۱)^{j}\hat\beta}{\hat\beta+(k-i+j)\hat\alpha}=f(\hat\alpha,\hat\beta).$$

[۱۳] نشان داد $R_{s,k}$ یعنی $\hat R_{s,k}$، تابعی از دو آماره مستقل از هم مانند $\hat\alpha$ و $\hat\beta$ باشد، واریانس مجانبی آن به‌صورت زیر

$$V(\hat R_{s,k})=V(\hat\alpha)\left(\frac{\partial R_{s,k}}{\partial\alpha}\right)^{۲}+V(\hat\beta)\left(\frac{\partial R_{s,k}}{\partial\beta}\right)^{۲} \qquad (۵)$$

به دست می‌آید، که می‌تواند در محاسبه فاصلهٔ اطمینان مجانبی $R_{s,k}$ نقش مهمی داشته باشد. برای مثال به‌ازای $(s,k)=(۱,۲),(۲,۳)$، به‌کمک رابطهٔ (۴) داریم:

$$R_{۱,۲}=\frac{۲\alpha\beta}{(\beta+\alpha)(\beta+۳\alpha)},R_{۲,۳}=\frac{۶\alpha^{۲}\beta}{(\beta+\alpha)(\beta+۳\alpha)(\beta+۴\alpha)}.$$

اکنون می‌توان $\frac{\partial\hat R_{s,k}}{\partial\alpha}$ و $\frac{\partial\hat R_{s,k}}{\partial\beta}$ را به‌ازای $(s,k)=(۱,۲),(۲,۳)$ و با توجه به واریانس‌های مجانبی $\hat\alpha$ و $\hat\beta$ که به‌صورت زیر

$$V(\hat\alpha)=\frac{\alpha^{۲}}{n},\quad V(\hat\beta)=\frac{\beta^{۲}}{m}$$

هستند، واریانس مجانبی $\hat{R_{۱,۲}}$ و $\hat{R_{۱,۲}}$ را به‌کمک رابطهٔ (۵) به دست آورد.

[۴] Emperical bayesian

## ۲.۲ برآورد بیزی

در این بخش برآورد بیزی $R_{s,k}$ تحت تابع زیان توان دوم خطاها یعنی $L(\theta,\hat{\theta})=(\theta-\hat{\theta})^{۲}$ به دست می‌آید. فرض کنید $X_{۱},X_{۲},\cdots,X_n$ و $Y_{۱},Y_{۲},\cdots,Y_n$ دو نمونهٔ تصادفی مستقل از هم و به‌ترتیب دارای توزیع‌های $IR(\alpha)$ و $IR(\beta)$ هستند. با فرض آن‌که پارامترهای $\alpha$ و $\beta$ مستقل از هم و دارای توزیع‌های پیشین به‌ترتیب زیر

$$\begin{aligned}\pi(\alpha)&=\tfrac{b_{۱}^{a_{۱}}}{\Gamma(a_{۱})}\alpha^{a_{۱}-۱}e^{-b_{۱}\alpha}\\ \pi(\beta)&=\tfrac{b_{۲}^{a_{۲}}}{\Gamma(a_{۲})}\beta^{a_{۲}-۱}e^{-b_{۲}\beta}\end{aligned}\tag{۶}$$

هستند، توزیع پسین توأم $\alpha$ و $\beta$ به‌صورت زیر

$$\begin{aligned}\pi(\alpha,\beta|\mathbf{x},\mathbf{y})=&\frac{(b_{۱}+t)^{n+a_{۱}}(b_{۲}+u)^{m+a_{۲}}}{\Gamma(n+a_{۱})\Gamma(m+a_{۲})}\\ &\times\alpha^{n+a_{۱}-۱}\beta^{m+a_{۲}-۱}e^{-(b_{۱}+t)\alpha-(b_{۲}+u)\beta}\end{aligned}\tag{۷}$$

به دست می‌آیند، که در آن

$$\mathbf{x}=(x_{۱},\cdots,x_n)\quad,\mathbf{y}=(y_{۱},\cdots,y_n)$$

$$t=\sum_{i=۱}^{n}\frac{۱}{x_i^{۲}},\quad u=\sum_{j=۱}^{m}\frac{۱}{y_j^{۲}}$$

هستند. بنا بر این با توجه به رابطه‌های (۴) و (۷) برآورد بیزی $R_{s,k}$ که با نماد $R_{s,k}^{B}(t,u)$ نشان داده می‌شود، تحت تابع زیان توان دوم خطاها به‌صورت زیر

$$\begin{aligned}R_{s,k}^{B}(t,u)=&\sum_{i=s}^{k}\sum_{j=۰}^{i}\Bigg\{\binom{k}{i}\binom{i}{j}(-۱)^{j}\\ &\times\int_{۰}^{\infty}\int_{۰}^{\infty}\frac{\beta\pi(\alpha,\beta|\mathbf{x},\mathbf{y})}{\beta+(k-i+j)\alpha}d\alpha d\beta\Bigg\}\end{aligned}$$

به دست می‌آید. به‌کمک تغییر متغیرهای $w=\frac{\beta}{\beta+(k-i+j)\alpha}$ و $v=\beta+(k-i+j)\alpha$ داریم:

$$\begin{aligned}&\int_{۰}^{\infty}\int_{۰}^{\infty}\frac{\beta}{\beta+(k-i+j)\alpha}\pi(\alpha,\beta|\mathbf{x},\mathbf{y})d\alpha d\beta\\ &=\frac{B_{۱}\Gamma(n+m+a_{۱}+a_{۲})}{(k-i+j)^{n+a_{۱}}}\int_{۰}^{۱}\frac{w^{m+a_{۲}-۱}(۱-w)^{n+a_{۱}-۱}}{A^{n+m+a_{۱}+a_{۲}}}dw\end{aligned}$$

که در آن

$$A=w(u+b_{۲})+\frac{(t+b_{۱})(۱-w)}{k-i+j}$$

و

$$B_{۱}=\frac{(b_{۱}+t)^{n+a_{۱}}(b_{۲}+u)^{m+a_{۲}}}{\Gamma(n+a_{۱})\Gamma(m+a_{۲})}$$

هستند. بنا بر این

$$\begin{aligned}R_{s,k}^{B}(t,u)=&B\sum_{i=s}^{k}\sum_{j=۰}^{i}\Bigg\{\binom{k}{i}\binom{i}{j}\frac{(-۱)^{j}}{(k-i+j+۱)^{n+a_{۱}}}\\ &\times\int_{۰}^{۱}\frac{w^{m+a_{۲}-۱}(۱-w)^{n+a_{۱}-۱}}{A^{n+m+a_{۱}+a_{۲}}}dw\end{aligned}\tag{۸}$$

که در آن

$$B=\frac{(b_{۱}+t)^{n+a_{۱}}(b_{۲}+u)^{m+a_{۲}}\Gamma(n+m+a_{۱}+a_{۲})}{\Gamma(n+a_{۱})\Gamma(m+a_{۲})}$$

است. همچنین انتگرال در $R_{s,k}^{B}(t,u)$ دارای شکل صریحی نیست و باید به‌کمک روش‌های عددی مانند روش شبیه‌سازی مونته‌کارلو حل شود.

## ۳.۲ برآورد بیزی تجربی

در این بخش فرض می‌شود، ابر پارامترهای $a_{۱}$ و $a_{۲}$ معلوم و $b_{۱}$ و $b_{۲}$ مجهول هستند. به‌کمک تابع درست‌نمایی مشاهدات $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ و رابطهٔ (۶)، تابع چگالی شرطی $(\mathbf{x},\mathbf{y})$ به شرط $b_{۱}$ و $b_{۲}$ به‌صورت زیر

$$\begin{aligned}f(\mathbf{x},\mathbf{y}|b_{۱},b_{۲})=&\frac{۲^{n+m}b_{۱}^{a_{۱}}b_{۲}^{a_{۲}}\Gamma(n+a_{۱})\Gamma(m+a_{۲})}{\Gamma(a_{۱})\Gamma(a_{۲})(b_{۱}+t)^{n+a_{۱}}(b_{۲}+u)^{m+a_{۲}}}\\ &\times\prod_{i=۱}^{n}(\frac{۱}{x_i^{۳}})\prod_{j=۱}^{m}(\frac{۱}{y_j^{۳}})\end{aligned}\tag{۹}$$

به دست می‌آید. به‌کمک لگاریتم تابع چگالی داده شده در رابطهٔ (۹)، برآورد ماکسیمم درست‌نمایی $b_{۱}$ و $b_{۲}$ یعنی $\hat{b_{۱}}$ و $\hat{b_{۲}}$ به‌صورت زیر

$$\hat{b_{۱}}=\frac{a_{۱}}{n}t,\quad \hat{b_{۲}}=\frac{a_{۲}}{m}u$$

به دست می‌آیند. با جایگذاری $\hat{b_{۱}}$ و $\hat{b_{۲}}$ در رابطهٔ (۸)، برآورد بیزی تجربی $R_{s,k}$ که با نماد $R_{s,k}^{EB}$ نشان داده می‌شود، تحت تابع زیان توان دوم خطاها به‌صورت

$$\begin{aligned}R_{s,k}^{EB}(t,u)=&\hat{B}\sum_{i=s}^{k}\sum_{j=۰}^{i}\Bigg\{\binom{k}{i}\binom{i}{j}\frac{(-۱)^{j}\Gamma(n+m+a_{۱}+a_{۲})}{(k-i+j)^{n+a_{۱}}}\\ &\times\int_{۰}^{۱}\frac{w^{m+a_{۲}-۱}(۱-w)^{n+a_{۱}-۱}}{(\hat{A})^{n+m+a_{۱}+a_{۲}}}dw\Bigg\}\end{aligned}$$

به دست می‌آید، که $\hat{A}$ و $\hat{B}$ به‌صورت زیر

$$\hat{A}=w[u(1+\frac{a_2}{m})]+\frac{(1-w)[t(1+\frac{a_1}{n})]}{k-i+j}$$

$$\hat{B}=\frac{[t(1+\frac{a_1}{n})]^{n+a_1}[u(1+\frac{a_2}{m})]^{m+a_2}\Gamma(n+m+a_1+a_2)}{\Gamma(n+a_1)\Gamma(m+a_2)}$$

هستند.

# ۳ تحلیل داده‌ها

در این بخش با استفاده از روش شبیه‌سازی مونته‌کارلو و به‌کمک دو مجموعه‌داده‌های واقعی، برآوردهای $R_{s,k}^{ML}$، $R_{s,k}^{B}$ و $R_{s,k}^{EB}$ با استفاده از میانگین اریبی و میانگین توان دوم خطاهای آنها با هم مقایسه می‌شوند.

## ۱.۳ شبیه‌سازی

در این زیر بخش با استفاده از شبیه‌سازی مونته‌کارلو از هر کدام از توزیع‌های متغیر مقاومت و متغیر تنش که به‌ترتیب دارای توزیع‌های $IR(\alpha)$ و $IR(\beta)$ هستند، برای مقادیر متفاوت $(\alpha,\beta)$، مانند $(۳,۱/۵)$، $(۲/۵,۱/۵)$، $(۲,۱/۵)$، $(۱/۵,۱/۵)$، $(۱/۵,۲)$، $(۱/۵,۲/۵)$ و $(۱/۵,۳)$، ۱۰۰۰۰ نمونهٔ تصادفی به اندازه‌های ۱۰، ۲۰، ۳۰، ۴۰ تولید می‌شود. سپس برآورد ماکسیمم درستنمایی، برای $a_1=a_2=۱/۵, b_1=۲, b_2=۳$ برآورد بیزی و برای $a_1=a_2=۱/۵$ برآورد بیزی تجربی $R_{s,k}$ به همراه میانگین اریبی و میانگین توان دوم خطاهای آنها برای $(s,k)=(۱,۲),(۲,۳)$ به دست می‌آید، که در جدول‌های ۱ و ۲ آورده شده است. نتایج شبیه‌سازی، بیان‌کنندهٔ آن است، که

۱. با افزایش اندازهٔ نمونه، برای هر ترکیبی از پارامترهای $(\alpha,\beta)$، قدر مطلق میانگین اریبی و میانگین توان دوم خطاهای برآورد $R_{s,k}$ در هر دو حالت $(s,k)$ و تحت هر سه روش برآورد، کاهش می‌یابد و برآورد ماکسیمم درستنمایی $R_{s,k}$ نسبت به بقیه روش‌ها در هر دو حالت $(s,k)$ کاراتر است.

۲. در حالت $(s,k)=(۱,۲)$، برای $\beta$ ثابت، برای $\alpha\geq ۱/۵$ برآورد بیزی تجربی کاراتر از برآورد بیزی و برای $\alpha$ ثابت، برای $\beta\geq ۲/۵$ برآورد بیزی از برآورد بیزی تجربی کاراتر است. اما در حالت $(s,k)=(۲,۳)$ همواره برآورد بیزی از برآورد بیزی تجربی کاراتر است.

## ۲.۳ داده‌های واقعی

در این زیر بخش از دو مجموعه‌داده‌های واقعی برای تحلیل روش‌های برآورد $R_{s,k}$ استفاده می‌شود. این مجموعه‌داده‌ها که از [۵] گرفته شده است، مربوط به مدت زمان خرابی سیستم تهویه (بر حسب ساعت) مربوط به دو نوع هواپیمای مختلف است، که در [۱۹] نشان دادند این مجموعه‌داده‌ها به خوبی به توزیع رایلی وارون برازش می‌شوند. این مجموعه‌داده‌ها در جدول ۳ آمده‌اند.

به‌کمک این مجموعه‌داده‌ها برآورد ماکسیمم درستنمایی، برآورد بیزی برای $a_1=a_2=۱/۵, b_1=۲, b_2=۳$ و برآورد بیزی تجربی برای $a_1=a_2=۱/۵$ در حالت $(s,k)=(۱,۲)$ به‌ترتیب برابر با ۰/۲۲۷۹، ۰/۱۲۰۴ و ۰/۱۰۰۸ و در حالت $(s,k)=(۲,۳)$ به‌ترتیب برابر با ۰/۲۶۸۸، ۰/۱۷۲۲ و ۰/۱۰۶۱ به دست آمدند. نتایج بیان‌کنندهٔ بهتر بودن برآورد ماکسیمم درستنمایی نسبت به بقیه برآوردها در هر دو حالت $(s,k)$ است. همچنین بزرگ‌تر بودن مقادیر $R_{s,k}^{ML}$، $R_{s,k}^{B}$ و $R_{s,k}^{EB}$ در حالت $(s,k)=(۲,۳)$ بیان‌کنندهٔ کاراتر بودن سیستم سه مؤلفه‌ای با حد اقل دو مؤلفه فعال از سیستم دو مؤلفه‌ای با حد اقل یک مؤلفه فعال است.

# ۴ نتیجه‌گیری

در این مقاله برآورد قابلیت اعتماد در مدل تنش-مقاومت چندمؤلفه‌ای، بر اساس توزیع‌های رایلی وارون با پارامتر متفاوت به روش‌های ماکسیمم درستنمایی، بیزی و بیزی تجربی به دست آمدند. به‌کمک شبیه‌سازی مونته‌کارلو و دو مجموعه داده‌های واقعی، با استفاده از میانگین اریبی و میانگین توان

دوم خطاهای برآوردها، نشان داده شد که برآورد ماکسیمم درست‌نمایی از بقیه برآوردها کاراتر است. همچنین نتیجه گرفته شد که کارایی سیستم سه مؤلفه‌ای با حد اقل دو مؤلفه فعال بیشتر از کارایی سیستم دو مؤلفه‌ای با حد اقل یک مؤلفه فعال است.


## سپاس‌گزاری

نویسنده از سردبیر و داوران مجله در ارزیابی مقاله و پیشنهادات ارزندهشان نهایت تشکر را دارد.


**جدول ۱.** برآوردهای ماکسیمم درست‌نمایی (سطر اول)، برآورد بیزی (سطر دوم) و برآورد بیزی تجربی (سطر سوم) به همراه میانگین توان دوم خطاها (داخل پرانتز) برای $(s, k) = (۱, ۲)$

| $n = m$ | ۱۰ | ۲۰ | ۳۰ | ۴۰ |
|---|---|---|---|---|
| $(\alpha, \beta) = (۳, ۱٫۵)$ | −۰٫۰۰۱۶۶ (۰٫۰۱۰۰۱)<br>۰٫۰۰۶۷۷ (۰٫۰۱۷۸۱)<br>−۰٫۰۰۳۵۱ (۰٫۰۱۶۵۳) | ۰٫۰۰۱۰۴ (۰٫۰۰۹۱۶)<br>۰٫۰۱۱۵۱ (۰٫۰۱۵۴۹)<br>۰٫۰۰۱۸۳ (۰٫۰۱۱۰۵) | −۰٫۰۰۰۸۶ (۰٫۰۰۶۲۴)<br>۰٫۰۰۲۴۲ (۰٫۰۱۲۹۲)<br>−۰٫۰۰۱۸۶ (۰٫۰۱۱۵۳) | ۰٫۰۰۰۱۹ (۰٫۰۰۴۷۵)<br>−۰٫۰۰۲۵۹ (۰٫۰۱۳۱۸)<br>۰٫۰۰۰۷۴ (۰٫۰۱۲۳۷) |
| $(\alpha, \beta) = (۲٫۵, ۱٫۵)$ | −۰٫۰۰۳۶۱ (۰٫۰۱۰۵۸)<br>−۰٫۰۰۱۷۹ (۰٫۰۱۷۶۷)<br>−۰٫۰۰۶۹۱ (۰٫۰۱۵۲۹) | ۰٫۰۰۲۲۶ (۰٫۰۰۸۴۵)<br>−۰٫۰۰۱۰۷ (۰٫۰۱۴۶۲)<br>−۰٫۰۰۳۶۳ (۰٫۰۱۲۱۲) | −۰٫۰۰۰۵۱ (۰٫۰۰۵۶۱)<br>−۰٫۰۰۰۴۰ (۰٫۰۱۴۳۲)<br>۰٫۰۰۱۹۸ (۰٫۰۱۳۰۴) | −۰٫۰۰۱۰۳ (۰٫۰۰۴۳۴)<br>−۰٫۰۰۱۳۱ (۰٫۰۱۴۳۶)<br>−۰٫۰۰۲۵۶ (۰٫۰۰۱۳۶۰) |
| $(\alpha, \beta) = (۲, ۱٫۵)$ | −۰٫۰۰۶۲۱ (۰٫۰۱۰۶۰)<br>−۰٫۰۱۰۷۵ (۰٫۰۱۵۸۱)<br>−۰٫۰۱۱۴۱ (۰٫۰۱۲۳۱) | −۰٫۰۰۳۲۲ (۰٫۰۰۶۷۲)<br>−۰٫۰۰۶۷۳ (۰٫۰۱۴۹۲)<br>−۰٫۰۰۶۱۷ (۰٫۰۱۲۸۳) | −۰٫۰۰۱۸۱ (۰٫۰۰۴۴۷)<br>−۰٫۰۰۴۵۵ (۰٫۰۱۵۳۶)<br>−۰٫۰۰۳۷۸ (۰٫۰۱۴۲۲) | −۰٫۰۰۱۷۳ (۰٫۰۰۳۴۱)<br>−۰٫۰۰۴۰۰ (۰٫۰۱۵۹۳)<br>−۰٫۰۰۳۴۰ (۰٫۰۱۵۱۷) |
| $(\alpha, \beta) = (۱٫۵, ۱٫۵)$ | −۰٫۰۰۹۳۴ (۰٫۰۰۷۷۳)<br>−۰٫۰۱۸۷۴ (۰٫۰۱۴۰۸)<br>−۰٫۰۱۶۴۵ (۰٫۰۱۰۲۷) | −۰٫۰۰۴۹۸ (۰٫۰۰۳۹۳)<br>−۰٫۰۱۱۳۳ (۰٫۰۰۲۲۵)<br>−۰٫۰۰۹۱۴ (۰٫۰۱۳۹۱) | −۰٫۰۰۳۰۵ (۰٫۰۰۲۵۵)<br>−۰٫۰۰۷۷۹ (۰٫۰۱۶۷۲۲)<br>۰٫۰۰۵۷۸ (۰٫۰۱۵۷۵) | −۰٫۰۰۲۲۸ (۰٫۰۰۱۹۲)<br>−۰٫۰۰۶۸۱ (۰٫۰۱۸۷۵)<br>−۰٫۰۰۵۱۵ (۰٫۰۱۷۹۷) |
| $(\alpha, \beta) = (۱٫۵, ۲)$ | −۰٫۰۱۱۴۰ (۰٫۰۰۳۸۱)<br>−۰٫۰۲۲۳۳ (۰٫۰۱۴۱۸)<br>−۰٫۰۱۹۸۶ (۰٫۰۱۰۸۷) | −۰٫۰۰۵۷۸ (۰٫۰۰۱۵۴)<br>−۰٫۰۱۳۱۸ (۰٫۰۱۷۶۲)<br>−۰٫۰۱۰۷۴ (۰٫۰۱۵۴۸) | −۰٫۰۰۳۹۲ (۰٫۰۰۰۹۱)<br>−۰٫۰۰۸۹۷ (۰٫۰۲۰۶۸)<br>−۰٫۰۰۶۹۲ (۰٫۰۱۸۷۹) | −۰٫۰۰۲۸۷ (۰٫۰۰۰۶۳)<br>−۰٫۰۰۷۷۲ (۰٫۰۲۳۳۰)<br>−۰٫۰۰۵۹۵ (۰٫۰۲۱۷۱) |
| $(\alpha, \beta) = (۱٫۵, ۲٫۵)$ | −۰٫۰۱۲۰۷ (۰٫۰۰۲۶۱)<br>−۰٫۰۲۱۲۸ (۰٫۰۱۰۵۶)<br>−۰٫۰۲۱۰۱ (۰٫۰۱۵۷۸) | −۰٫۰۰۶۱۴ (۰٫۰۰۰۷۱)<br>−۰٫۰۱۱۷۳ (۰٫۰۱۶۸۳)<br>−۰٫۰۱۱۴۲ (۰٫۰۲۰۴۵) | −۰٫۰۰۴۱۳ (۰٫۰۰۰۳۳)<br>−۰٫۰۰۸۵۳ (۰٫۰۲۲۲۶)<br>−۰٫۰۰۷۹۷ (۰٫۰۲۵۵۱) | −۰٫۰۰۳۱۰ (۰٫۰۰۰۲۰)<br>−۰٫۰۰۵۷۷ (۰٫۰۲۵۸۴)<br>−۰٫۰۰۵۲۴ (۰٫۰۲۸۷۶) |
| $(\alpha, \beta) = (۱٫۵, ۳)$ | −۰٫۰۱۱۹۲ (۰٫۰۰۲۹۵)<br>−۰٫۰۱۶۳۳ (۰٫۰۱۱۱۶)<br>−۰٫۰۲۰۱۴ (۰٫۰۱۹۰۸) | −۰٫۰۰۵۹۹ (۰٫۰۰۰۹۴)<br>−۰٫۰۰۸۲۲ (۰٫۰۱۹۳۵)<br>−۰٫۰۱۱۲۰ (۰٫۰۲۵۹۵) | −۰٫۰۰۴۰۶ (۰٫۰۰۰۵۰)<br>−۰٫۰۰۴۹۸ (۰٫۰۲۵۲۲)<br>−۰٫۰۰۷۴۱ (۰٫۰۳۰۵۸) | −۰٫۰۰۳۰۴ (۰٫۰۰۰۳۳)<br>−۰٫۰۰۳۴۱ (۰٫۰۳۰۵۴)<br>−۰٫۰۰۵۱۸ (۰٫۰۳۵۳۸) |

**جدول ۲.** برآوردهای ماکسیمم درست‌نمایی (سطر اول)، برآورد بیزی (سطر دوم) و برآورد بیزی تجربی (سطر سوم) به همراه میانگین توان دوم خطاها (داخل پرانتز) برای $(s,k) = (۲,۳)$

| $n = m$ | ۱۰ | ۲۰ | ۳۰ | ۴۰ |
|---|---|---|---|---|
| $(\alpha,\beta) = (۳, ۱/۵)$ | −۰/۰۰۳۹۲ (۰/۰۰۸۷۱)<br>−۰/۰۳۵۹۰ (۰/۰۴۸۵۴)<br>−۰/۰۴۴۶۱ (۰/۰۶۸۱۹) | −۰/۰۰۱۷۴ (۰/۰۰۴۹۰)<br>−۰/۰۴۵۶۴ (۰/۰۴۵۰۴)<br>−۰/۰۵۱۰۹ (۰/۰۴۷۹۴) | −۰/۰۰۱۱۶ (۰/۰۰۳۴۵)<br>−۰/۰۴۷۴۹ (۰/۰۴۶۸۲)<br>−۰/۰۵۱۶۳ (۰/۰۴۶۹۴) | −۰/۰۰۰۸۶ (۰/۰۰۲۶۱)<br>−۰/۰۴۹۰۶ (۰/۰۴۶۴۷)<br>−۰/۰۵۲۴۵ (۰/۰۴۷۳۱) |
| $(\alpha,\beta) = (۲/۵, ۱/۵)$ | −۰/۰۰۴۹۲ (۰/۰۰۶۶۴)<br>−۰/۰۴۸۵۶ (۰/۰۷۱۲۶)<br>−۰/۰۵۰۸۴ (۰/۰۹۴۲۰) | −۰/۰۰۲۷۴ (۰/۰۰۳۶۱)<br>−۰/۰۶۲۵۵ (۰/۰۴۷۳۶)<br>−۰/۰۶۴۲۸ (۰/۰۵۰۵۱) | −۰/۰۰۱۵۸ (۰/۰۰۲۴۵)<br>−۰/۰۶۴۰۴ (۰/۰۴۷۸۵)<br>−۰/۰۶۵۲۴ (۰/۰۴۸۶۵) | −۰/۰۰۱۱۹ (۰/۰۰۱۸۷)<br>−۰/۰۶۴۹۹ (۰/۰۴۸۰۱)<br>−۰/۰۶۵۹۴ (۰/۰۴۸۰۴) |
| $(\alpha,\beta) = (۲, ۱/۵)$ | −۰/۰۰۷۰۲ (۰/۰۰۴۶۲)<br>−۰/۰۳۷۶۱ (۰/۲۳۲۰۶)<br>−۰/۰۳۳۳۳ (۰/۲۹۶۶۶) | −۰/۰۰۳۷۴ (۰/۰۰۲۰۳)<br>−۰/۰۶۶۸۲ (۰/۰۹۵۲۱)<br>−۰/۰۶۶۰۴ (۰/۱۰۲۴۶) | −۰/۰۰۲۳۲ (۰/۰۰۱۲۹)<br>−۰/۰۷۵۹۶ (۰/۰۶۴۴۸)<br>−۰/۰۷۵۶۱ (۰/۰۶۶۸۲) | −۰/۰۰۱۸۸ (۰/۰۰۰۹۴)<br>−۰/۰۸۰۱۸ (۰/۰۵۱۸۷)<br>−۰/۰۷۹۹۵ (۰/۰۵۲۹۹) |
| $(\alpha,\beta) = (۱/۵, ۱/۵)$ | −۰/۰۰۸۴۳ (۰/۰۰۲۵۶)<br>۰/۰۴۷۹۳ (۰/۱۱۵۸۲)<br>۰/۰۹۴۸۷ (۰/۱۵۵۰۴) | −۰/۰۰۴۴۳ (۰/۰۰۰۸۰)<br>۰/۰۴۲۵۰ (۰/۶۴۲۲۴)<br>۰/۰۴۹۳۶ (۰/۷۳۳۶۵) | −۰/۰۰۲۸۶ (۰/۰۰۰۳۷)<br>۰/۰۲۸۰۹ (۰/۴۴۷۲۶)<br>۰/۰۳۱۱۳ (۰/۴۸۲۸۲) | −۰/۰۰۲۱۹ (۰/۰۰۰۲۴)<br>−۰/۰۲۱۳۳ (۰/۳۶۳۶۸)<br>−۰/۰۲۳۱۶ (۰/۳۸۲۱۳) |
| $(\alpha,\beta) = (۱/۵, ۲)$ | −۰/۰۰۸۹۹ (۰/۰۰۳۹۶)<br>۰/۱۰۱۳۳ (۰/۱۴۳۷۶)<br>۰/۱۳۶۹۷۴ (۰/۲۰۸۸۵) | −۰/۰۰۴۳۶ (۰/۰۰۱۳۵)<br>۰/۰۵۸۳۸ (۰/۷۹۴۰۳)<br>۰/۰۶۹۹۱ (۰/۹۳۹۹۳) | −۰/۰۰۳۰۶ (۰/۰۰۰۸۲)<br>۰/۰۴۴۳۲ (۰/۵۶۷۲۸)<br>۰/۰۵۰۴۳ (۰/۶۳۵۶۸) | −۰/۰۰۲۱۹ (۰/۰۰۰۲۳)<br>۰/۰۳۶۳۶ (۰/۴۳۷۸۸)<br>۰/۰۳۹۷۵ (۰/۵۱۱۷۴) |
| $(\alpha,\beta) = (۱/۵, ۲/۵)$ | −۰/۰۰۷۸۶ (۰/۰۰۶۶۸)<br>۰/۱۲۴۵۵۰ (۰/۱۶۱۸۶)<br>۰/۱۷۶۲۲ (۰/۲۴۷۲۶) | −۰/۰۰۴۱۵ (۰/۰۰۳۳۶۲)<br>۰/۰۸۰۶۱ (۰/۷۳۷۷۲)<br>۰/۰۹۶۶۲ (۰/۹۱۵۸۹) | −۰/۰۰۲۸۰ (۰/۰۰۲۲۷)<br>۰/۰۶۴۸۹ (۰/۷۰۳۵۵)<br>۰/۰۷۴۹۴ (۰/۸۰۳۴۷) | −۰/۰۰۲۰۹ (۰/۰۰۱۵۷)<br>۰/۰۵۱۵۷ (۰/۵۴۰۱۷)<br>۰/۰۵۶۹۴ (۰/۵۹۲۲۳) |
| $(\alpha,\beta) = (۱/۵, ۳)$ | −۰/۰۰۷۰۷ (۰/۱۰۴۳)<br>۰/۱۵۴۹۹ (۰/۲۸۵۸۶)<br>۰/۲۲۵۷۱ (۰/۳۰۱۴۵) | −۰/۰۰۳۱۷ (۰/۰۰۵۳۷)<br>۰/۱۰۲۳۸ (۰/۸۸۷۵۷)<br>۰/۱۲۸۲۸ (۰/۹۶۳۳۲) | −۰/۰۰۲۳۱ (۰/۰۰۳۶۱)<br>۰/۰۸۳۰۰ (۰/۷۷۰۰۱)<br>۰/۰۹۷۱۶ (۰/۹۰۴۶۸) | −۰/۰۰۱۸۰ (۰/۰۰۲۷۱)<br>۰/۰۶۸۵۳ (۰/۶۰۸۰۴)<br>۰/۰۷۷۱۳ (۰/۶۸۴۸۷) |

**جدول ۳.** مجموعه‌داده‌های اول **X** و مجموعه‌داده‌های دوم **Y**

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **X** | ۳۳ | ۴۷ | ۵۵ | ۵۶ | ۱۰۴ | ۱۷۶ | ۱۸۲ | ۲۲۰ | ۲۳۹ | ۲۴۶ | ۳۲۰ |
| **Y** | ۱۲ | ۲۱ | ۲۶ | ۲۷ | ۲۹ | ۲۹ | ۴۸ | ۵۷ | ۵۹ | ۷۰ | ۷۴ |
| | ۱۵۳ | ۳۲۶ | ۳۸۶ | ۵۰۲ | | | | | | | |

# مراجع


[1] Awad, M., and Gharraf, K. (1986). Estimation of $P(Y < X)$ in Burr case: A comparative study. *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, **15**, 389-403.

[2] Asgharzadeh A., Valiollahi R., and Raqab M. Z. (2011). Stress-strength reliability of Weibull distribution based on progressively censord samples, *SORT*, **35(2)**, 103-124.

[3] Al-Mutairi D. K., Gitany M. E., and Kundu D. (2013). Inferences on Stress-strength reliability from Lindley distribution, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **42(8)**, 1443-1463.

[4] Bhattacharyya, G. K., and Johnson R. A. (1974). Estimation of reliability in multicomponent stress-strength model, *JASA*, **69**, 966-970.

[5] Bain, L. J., and M. Engelhardt. (1991). Statistical Analysis of Reliability and Life-Testing Models, 2nd ed., Marcel and Dekker, New York, NY.

[6] Downtown, F. (1973). The estimation of $P(Y < X)$ in the normal case, *Technometrics*, **15**, 551-558.

[7] Enis, P., and Geisser, S. (1971). Estimation of the probability that $Y < X$. *JASA*, **66**, 162-168.

[8] Ghitany M. E., Al-Mutairi D. K., and Aboukhamseen S. M. (2015). Estimation of the reliability of a Stress-strength system from power indley distributions, *Communications Statistics Simulation and Computation*, **44**, 118-136.

[9] Kundu D., and Gupta R. D. (2006). Estimation of $P(Y < X)$ for Weibull distribution, *IEEE Transactions on Reliability*, **55(2)**, 270-280.

[10] Lio Y. L., and Tsai T. R. (2012). Estimation of for Burr XII distribution based on the progressivey first failure-censord samples, *Journal of Applied Statistics*, **39(2)**, 465-483.

[11] Nandi S. B., and Aich A. B. (1994). A note on estimation of $P(X > Y)$ for some distributions useful in life-testing, *IAPQR Trans-actions*, **19(1)**, 35-44.

[12] Pandey M., and Borhan U. M. d. (1985). *Estimation of reliability in multicomponent stress-strength model following Burr distribution*, Proceedings of the First Asian congress on Quality and Reliability, New Delhi, India, 307-312.

[13] Rao C. R. (1973). *Linear Statistical Inference and its Applications*, Wiley Eastern Limited, India.

[14] Raqab M. Z., and Kundu D. (2005). Comparison of diferent estimators of $P(Y < X)$ for a scaled Burr type X distribution, *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, **34(2)**, 465-483.

[15] Raqab M. Z., Madi M. T., and Kundu, D. (2008). Estimation of $P(Y < X)$ for the 3-parameter generalized exponential distribution, *Communications in Statistics -Theory and Methods*, **37(18)**, 2854-2864.

[16] Rao G. S., and Kantam R. R. L. (2010). Estimation of reliability in multicomponent stress-strength model: log-logistic distribution,*Electronic Journal of Applied Statistical Analysis*, **3(2)**, 75-84.

[17] Rao G. S. (2012a). Estimation of reliability in multicomponent stress-strength model based on generalized exponential distribution, *Colombian Journal of Statistics*, **35(1)**, 67-76.

[18] Rao G. S. (2012b). Estimation of reliability in multicomponent stress-strength model based on Rayliegh distribution, *ProbStat Forun*, **5**, 150-161.

[19] Rao G. S., Kantam, R. R. L., Rosaiah, K., and Reddy, J. P. (2013). Estimation of stress–strength reliability from inverse Rayleigh distribution. *Journal of Industrial and Production Engineering*, 30(**4**), 256-263.

[20] Rao G. S., Aslam M., and Aril O. H. (2017). Estimation of reliability in multicomponent stress-strength model based on exponentiated Weibull distribution, *Communications Statistics Simulation and Computation*, **46**(**15**), 7495-7502.

[21] Treyer V. N. (1964). *Doklady Acad*, Nauk, Belorus, U.S.S.R.