

مقایسه چند الگوریتم بر آورد ماکسیمم درستنمایی مدل آمیخته خطی تعمیم یافته فضایی

فاطمه حسینی^۱، امید کریمی

تاریخ دریافت: ۹۹/۳/۲۷

تاریخ پذیرش: ۹۹/۱۱/۱

چکیده:

در مدل‌های آمیخته خطی تعمیم یافته فضایی، همبستگی فضایی با اضافه کردن متغیرهای پنهان به مدل در نظر گرفته می‌شود. در این مدل‌ها چون متغیر پاسخ فضایی غیر گاوسی است و به دلیل وجود متغیرهای پنهان تابع درستنمایی معمولاً شکل بسته‌ای ندارد و لذا رهیافت ماکسیمم درستنمایی برای بر آورد پارامترها با چالش مواجه است. هدف اصلی این مقاله معرفی دو الگوریتم جدید برای به دست آوردن برآوردهای ماکسیمم درستنمایی پارامترها و مقایسه با الگوریتم‌های موجود از نظر سرعت و دقت است. الگوریتم‌های معرفی شده بر روی یک مجموعه داده شبیه‌سازی شده به کار گرفته و عملکرد آن‌ها مقایسه می‌شود.

واژه‌های کلیدی: همبستگی فضایی، مدل‌های آمیخته خطی تعمیم یافته فضایی، بر آورد ماکسیمم درستنمایی.

۱ مقدمه

ارتباط برقرار می‌شود. اغلب به دلیل گسسته و در نتیجه ناگوسی بودن متغیر پاسخ و وجود تعداد زیادی متغیر پنهان فضایی تابع درستنمایی در مدل‌های SGLMM شکل بسته‌ای ندارد و نمی‌توان از روش‌های معمول محاسبه برآوردهای ماکسیمم درستنمایی استفاده نمود. برای حل مشکل و به دست آوردن بر آورد ماکسیمم درستنمایی پارامترهای این نوع از مدل‌های آماری الگوریتم‌های مختلفی پیشنهاد شده است، به عنوان مثال الگوریتم همسانه‌سازی داده‌ها^۵ توسط [۲] به مدل‌های GLMM تعمیم داده شد. همچنین [۱]، [۱۴] و [۱۵] این الگوریتم را به مدل‌های SGLMM تعمیم دادند. [۱۷] با استفاده از الگوریتم گرادیان بیشینه‌سازی امید ریاضی^۶ (EMG) و روش‌های نمونه‌گیری مونت کارلویی، الگوریتم گرادیان بیشینه‌سازی امید ریاضی مونت کارلویی^۷ (MCEMG) را برای به دست آوردن بر آورد ماکسیمم درستنمایی پارامترهای مدل SGLMM معرفی نمود. با به کارگیری توزیع شرطی تقریبی متغیرهای پنهان معرفی شده توسط [۵] و با استفاده از الگوریتم EMG [۶] و [۱۱] یک الگوریتم تقریبی با عنوان الگوریتم گرادیان بیشینه‌سازی امید ریاضی تقریبی^۸ (AEMG) پیشنهاد دادند. در راستای کاهش زمان محاسبات به دست آوردن برآوردهای SGLMM، [۱۶] با استفاده از رهیافت درستنمایی

مدل‌های آمیخته خطی^۲ (GLM's) توسط [۱۲] به صورت تعمیمی از مدل‌های خطی معرفی شدند. این نوع از مدل‌ها کلاس بزرگ‌تری از مدل‌های آماری خطی است که در آن متغیر پاسخ گسسته و پیوسته می‌تواند باشد و مشابه مدل‌های خطی فرض می‌شود که پاسخ‌ها مستقل‌اند. اغلب در عمل شرط استقلال وجود ندارد و پاسخ‌ها به شرط متغیرهای پنهان مستقل‌اند و به عبارت دیگر استقلال شرطی وجود دارد. [۳] برای پاسخ‌های گسسته که وابسته به یک اثر تصادفی هستند، با افزودن یک متغیر پنهان به مدل (GLM) مدل‌های آمیخته خطی تعمیم یافته^۳ (GLMM's) را معرفی نمودند. [۴] در مدل آمیخته خطی تعمیم یافته فرض کردند پاسخ‌ها به مکان قرار گرفتن آزمودنی وابسته است و اثر تصادفی را به عنوان اثر فضایی در نظر گرفتند و این مدل را مدل آمیخته خطی تعمیم یافته فضایی^۴ (SGLMM) نامیدند. در مدل‌های نام برده شده برخلاف مدل‌های خطی که به طور مستقیم بین میانگین متغیر پاسخ و متغیرهای کمکی ارتباط برقرار می‌شود، در این مدل‌ها با استفاده از یک تابع پیوند معلوم بین میانگین متغیر پاسخ و متغیرهای کمکی

^۱ دانشگاه سمنان، گروه آمار fatemeh.hoseini@semnan.ac.ir

^۲ Generalized Linear Models

^۳ Generalized Linear Mixed Models

^۴ Spatial Generalized Linear Mixed Model

^۵ Data cloning

^۶ Expectation Maximization Gradient Algorithm

^۷ Monte Carlo EMG Algorithm

^۸ Approximate EMG Algorithm

نمایی به شکل

$$f(y_i|x_i) = \exp\{y_i x_i - b(x_i) + c(y_i)\}$$

باشد، که در آن $b(\cdot)$ و $c(\cdot)$ توابع معلوم اند. میانگین $(y_i|x_i)$ و x_i به صورت $E(y_i|x_i) = g^{-1}(x_i)$ در ارتباط اند، که در آن $g(\cdot)$ یک تابع پیوند معلوم است.

در این صورت تابع درستنامایی مدل به شکل

$$L(\eta|y) = \int \left\{ \prod_{i=1}^n f(y_i|x_i) \right\} f(x|\eta) dx, \quad \eta = (\beta', \theta)', \quad (2)$$

است که شکل بسته‌ای ندارد و تعداد انتگرال‌ها در (۲) برابر تعداد متغیرهای پنهان فضایی است و به دست آوردن برآورد ماکسیمم درستنامایی پارامترها به راحتی امکان پذیر نیست. بنابراین به دست آوردن برآورد پارامترهای مدل SGLM یکی از مهم ترین اهداف در مطالعه این مدل است و تاکنون الگوریتم‌های متفاوتی برای به دست آوردن برآوردهای ماکسیمم درستنامایی در این مدل‌ها ارائه شده است. در قسمت‌های بعد به برخی از این الگوریتم‌ها اشاره می‌شود.

۳ الگوریتم گرادیان بیشینه‌سازی امید

ریاضی مونت کارلویی

با به کار بردن الگوریتم EMG می‌توان برای به دست آوردن برآورد پارامترها از رابطه

$$\eta^{(m+1)} = \eta^{(m)} - \left[E \left(\frac{\partial^2 \ell(\eta)}{\partial \eta \partial \eta'} | y \right) \right]_{\eta=\eta^{(m)}}^{-1} \times \left[E \left(\frac{\partial \ell(\eta)}{\partial \eta} | y \right) \right]_{\eta=\eta^{(m)}}, \quad (3)$$

استفاده نمود ([۱۷])، که در آن $\ell(\eta) = \ln L(\eta; y)$. امید ریاضی‌های شرطی در (۳) به راحتی قابل محاسبه نیستند و می‌توان از نمونه‌های مونت کارلویی برای به دست آوردن تقریبی آن‌ها استفاده نمود و در نتیجه با ترکیب روش‌های نمونه‌گیری مونت کارلویی و رهیافت EMG الگوریتم MCEMG را برای به دست آوردن برآوردهای ماکسیمم درستنامایی در مدل SGLM معرفی نمود که به شرح زیر است.

- یک مقدار اولیه برای $\eta^{(0)}$ انتخاب کنید، به طوری که $L(\eta^{(0)}|y) > 0$ و $m = 0$ قرار دهید.

- با استفاده از الگوریتم متروپلیس-هستینگس نمونه‌های مونت کارلویی $x^{(1)}, \dots, x^{(N)}$ را از $f_{x|y}(x|y, \eta^{(m)})$ استخراج نمایید.

- با به کار بردن نمونه‌ها $x^{(1)}, \dots, x^{(N)}$ برآوردهای مونت کارلویی امید ریاضی‌های شرطی $E \left\{ \frac{\partial \ln f(x|\eta)}{\partial \eta} | y \right\}$ و $E \left\{ \frac{\partial^2 \ln f(x|\eta)}{\partial \eta \partial \eta'} | y \right\}$ به صورت

دوبه‌دویی و ترکیب الگوریتم بیشینه‌سازی امید ریاضی و روش مربع‌بندی ارمیت برای حل انتگرال‌ها، الگوریتم بیشینه‌سازی امید ریاضی دوبه‌دویی مربع‌بندی^۹ (QPEM) را معرفی کردند. [۹] با استفاده از رهیافت درستنامایی دوبه‌دویی، الگوریتم بیشینه‌سازی امید ریاضی و رهیافت تقریبی [۵] الگوریتم بیشینه‌سازی امید ریاضی دوبه‌دویی تقریبی^{۱۰} (APEM) را برای محاسبه برآورد ماکسیمم درستنامایی پارامترهای مدل SGLMM ارائه نمودند. در این مقاله دو الگوریتم جدید AEMG و APEM با الگوریتم‌های موجود MCEMG و QPEM از نظر سرعت و دقت در یک مثال شبیه‌سازی از مدل SGLMM مورد مقایسه قرار می‌گیرند. ساختار مقاله به این صورت است که در بخش دو به معرفی مدل مورد بررسی پرداخته می‌شود. در بخش سه الگوریتم گرادیان بیشینه‌سازی امید ریاضی مونت کارلویی. در بخش چهار الگوریتم گرادیان بیشینه‌سازی امید ریاضی، در بخش پنج الگوریتم بیشینه‌سازی امید ریاضی دوبه‌دویی مربع‌بندی و در بخش شش الگوریتم بیشینه‌سازی امید ریاضی دوبه‌دویی تقریبی ارائه می‌شوند. در بخش هفت یک مثال شبیه‌سازی ارائه و الگوریتم‌ها پیاده‌سازی و مورد مقایسه قرار می‌گیرند.

۲ مدل

فرض کنید $x = (x_1, \dots, x_n)'$ بردار متغیرهای پنهان فضایی با چگالی $N_n(H\beta, \Sigma\theta)$ در n موقعیت $\{s_1, \dots, s_n\}$ با پارامتر مکان $H\beta$ شامل ماتریس $n \times (p+1)$ متغیرهای کمکی و بردار $p+1$ بعدی پارامترهای رگرسیونی $\beta = (\beta_0, \dots, \beta_p)'$ است. $\Sigma\theta$ یک ماتریس کوواریانس $n \times n$ معین مثبت معمولاً با ساختاری شامل دو پارامتر $\theta = (\sigma, \phi)$ می‌باشد که در آن σ و ϕ به ترتیب پارامتر مقیاس و پارامتر همبستگی فضایی نامیده می‌شوند. در این مقاله برای در نظر گرفتن همبستگی فضایی تابع کوواریانس به صورت یک تابع ماترن همسانگرد به صورت

$$\Sigma_\theta(h) = \frac{\sigma^2}{\Gamma(v) 2^{v-1}} (\kappa h)^v K_v(\kappa h), \quad \kappa = \frac{\sqrt{2v}}{\phi}, \quad (1)$$

در نظر گرفته می‌شود، که در آن $\theta = (\sigma^2, \phi, v)$ ، Γ یک تابع گاما، K_v تابع بسل اصلاح شده و $v > 0$ پارامتر هموارسازی است که در عمل معمولاً پارامتر هموارسازی v معلوم فرض می‌شود. اکنون

$$f(x|\eta) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |\Sigma_\theta|^{\frac{1}{2}}} \exp \left(-\frac{1}{2} (x - H\beta)^\top \Sigma_\theta^{-1} (x - H\beta) \right),$$

که در آن $\eta = (\beta', \theta)'$ بردار پارامترهای مدل است. همچنین فرض کنید بردار متغیرهای پاسخ در موقعیت‌های دارای مشاهده $\{s_1, \dots, s_k\}$ به صورت $y' = (y_1, \dots, y_k)$ است، به طوری که طبق [۱۲] $f(y|x)$ متعلق به یک خانواده

⁹Quadrature pairwise EM

¹⁰Approximate Pairwise EM Algorithm

[۶] با به کار بردن قضیه ۱.۴ و الگوریتم EMG، الگوریتم AEMG برای به دست آوردن برآوردهای ماکسیمم درستنمایی در مدل SGLM معرفی نمود که دیگر نیاز به نمونه‌های مونت کارلویی ندارد و به همین دلیل از سرعت محاسبات بالاتری نسبت به الگوریتم MCEMG برخوردار می‌باشد. ایده اصلی در این الگوریتم استفاده از توزیع تقریبی نرمال برای توزیع شرطی متغیر پنهان و در نهایت به دست آوردن امیدریاضی‌های شرطی به صورت

$$E\{\ln f(x|\eta)\} | y = \int \ln f(x|\eta) \hat{f}(x|y, \eta) dx$$

است. این الگوریتم به شرح زیر است.

- یک مقدار اولیه برای $\eta^{(0)}$ انتخاب کنید، به طوری که $L(\eta^{(0)}|y) > 0$ و $m = 0$ قرار دهید.

- یک مقدار اولیه برای $x^{(0)}$ انتخاب کنید، به عنوان مثال مد توزیع $f(x|\eta)$ و $d = 0$ قرار دهید.

- از (۴) توزیع شرطی تقریبی را محاسبه کنید.

$$\hat{f}(x|y, \eta^{(m)}) = N(\hat{\mu}_{x|y, \eta^{(m)}}(y, x^{(d)}), \hat{\Sigma}_{x|y, \eta^{(m)}}(x^{(d)})).$$

- مد توزیع شرطی تقریبی $\hat{f}(x|y, \eta^{(m)})$ را $x^{(d+1)}$ قرار دهید.

- قرار دهید $d = d + 1$ و به مرحله ۳ برگردید و تا رسیدن به همگرایی تکرار شود.

- اکنون $\eta^{(m+1)}$ را طوری انتخاب کنید که

$$\eta^{(m+1)} = \eta^{(m)} - \left[\hat{E} \left\{ \frac{\partial^2 \ln f(x|\eta)}{\partial \eta \partial \eta'} | y \right\} \right]_{\eta = \eta^{(m)}}^{-1} \times \left[\hat{E} \left\{ \frac{\partial \ln f(x|\eta)}{\partial \eta} | y \right\} \right]_{\eta = \eta^{(m)}}$$

- قرار دهید $m = m + 1$ و تا رسیدن به همگرایی الگوریتم تکرار شود.

برای محاسبه و ساده کردن رابطه موجود در مرحله ۳ الگوریتم AEMG داریم

$$\begin{aligned} \eta^{(m+1)} &= \eta^{(m)} - \left[\hat{E} \left\{ \frac{\partial^2 \ln f(x|\eta)}{\partial \eta \partial \eta'} | y \right\} \right]_{\eta = \eta^{(m)}}^{-1} \\ &\times \left[\hat{E} \left\{ \frac{\partial \ln f(x|\eta)}{\partial \eta} | y \right\} \right]_{\eta = \eta^{(m)}} \\ &= \eta^{(m)} - \left[\frac{\partial^2}{\partial \eta \partial \eta'} \hat{E} \left\{ (\ln f(x|\eta)) | y \right\} \right]_{\eta = \eta^{(m)}}^{-1} \\ &\times \left[\frac{\partial}{\partial \eta} \hat{E} \left\{ (\ln f(x|\eta)) | y \right\} \right]_{\eta = \eta^{(m)}}, \end{aligned} \quad (5)$$

به طوری که

$$\begin{aligned} \hat{E} \{ \ln f(x|\eta) | y \} &= -\frac{1}{\nu} \ln |\Sigma_\theta| - \frac{n}{\nu} \ln 2\pi \\ &- \frac{1}{\nu} E \left\{ (x - H\beta)' \Sigma_\theta^{-1} (x - H\beta) | y \right\}. \end{aligned} \quad (6)$$

اکنون با در نظر گرفتن $W = [(x - H\beta)' | y]$

$$W \approx N(\hat{\mu}_w, \hat{\Sigma}_{x|y, \eta}(x^0))$$

و $\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial \ln f(x^{(j)} | \eta^{(m)})}{\partial \eta} \right)$ و $\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial^2 \ln f(x^{(j)} | \eta^{(m)})}{\partial \eta \partial \eta'} \right)$ به دست آورید. - قرار دهید $\eta^{(m+1)}$ به صورت

$$\begin{aligned} \eta^{(m+1)} &= \eta^{(m)} - \left[E \left\{ \frac{\partial^2 \ln f(x|\eta)}{\partial \eta \partial \eta'} | y \right\} \right]_{\eta = \eta^{(m)}}^{-1} \\ &\times \left[E \left\{ \frac{\partial \ln f(x|\eta)}{\partial \eta} | y \right\} \right]_{\eta = \eta^{(m)}}. \end{aligned}$$

- قرار دهید $m = m + 1$ و به مرحله ۲ برگردید و تا رسیدن به همگرایی،

الگوریتم را تکرار نمایید.

با توجه به نرمال بودن توزیع متغیرهای پنهان، مشتق‌های موجود در مرحله

چهار الگوریتم را می‌توان به دست آورد. داریم

$$\begin{aligned} \ln f(x|\eta) &= -\frac{1}{\nu} \ln |\Sigma_\theta| - \frac{1}{\nu} (x - H\beta)' \Sigma_\theta^{-1} (x - H\beta) \\ \frac{\partial \ln f(x|\beta)}{\partial \beta} &= H' \Sigma_\theta^{-1} (x - H\beta) \\ \frac{\partial \ln f(x|\theta)}{\partial \theta_k} &= -\frac{1}{\nu} \text{tr} \left(\Sigma_\theta^{-1} \frac{\partial \Sigma_\theta}{\partial \theta_k} \right) + \frac{1}{\nu} x' \left(\Sigma_\theta^{-1} \frac{\partial \Sigma_\theta}{\partial \theta_k} \Sigma_\theta^{-1} \right) x \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ln f(x|\theta)}{\partial \theta_k \partial \theta_\ell} &= -\frac{1}{\nu} \text{tr} \left(\Sigma_\theta^{-1} \frac{\partial^2 \Sigma_\theta}{\partial \theta_k \partial \theta_\ell} - \Sigma_\theta^{-1} \frac{\partial \Sigma_\theta}{\partial \theta_k} \Sigma_\theta^{-1} \frac{\partial \Sigma_\theta}{\partial \theta_\ell} \right) \\ &- \frac{1}{\nu} x' \Lambda x, \end{aligned}$$

که $\Lambda = \Sigma_\theta^{-1} \left(\frac{\partial \Sigma_\theta}{\partial \theta_k} \Sigma_\theta^{-1} \frac{\partial \Sigma_\theta}{\partial \theta_\ell} + \frac{\partial \Sigma_\theta}{\partial \theta_\ell} \Sigma_\theta^{-1} \frac{\partial \Sigma_\theta}{\partial \theta_k} - \frac{\partial^2 \Sigma_\theta}{\partial \theta_k \partial \theta_\ell} \right) \Sigma_\theta^{-1}$ است.

۴ الگوریتم گرادیان بیشینه‌سازی امید ریاضی تقریبی

قضیه ۱.۴. ([۵]) فرض کنید $y_i | x_i \sim N_n(H\beta, \Sigma_\theta)$ با $b(x_i) + c(y_i)$ مقدار ثابت α آنگاه

$$(x|y, \eta) \approx N_n(\hat{\mu}_{x|y, \eta}, \hat{\Sigma}_{x|y, \eta}), \quad (4)$$

که در آن بردار متغیرهای پنهان در k موقعیت دارای مشاهده پاسخ است. $P = P(x)$ و $R = A\Sigma_\theta A' + P$ یک ماتریس قطری با عناصر

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_{x|y, \eta} &= H\beta + \text{قطر } P(i, i) = 1/b''(x_i), \quad i = 1, \dots, k \\ \hat{\Sigma}_{x|y, \eta} &= \Sigma_\theta - \Sigma_\theta A' R^{-1} A \Sigma_\theta, \quad \Sigma_\theta A' R^{-1} (z(y, x^{obs}) - AH\beta) \end{aligned}$$

$$z_i(y_i, x_i) = [y_i - b'(x_i) + x_i b''(x_i)] / b''(x_i), \quad i = 1, \dots, k$$

یک خطی سازی از $f(y|x^{obs})f(x|\eta)$ در یک مقدار ثابت x است.

که در آن

$$\hat{\mu}_w = (\hat{\mu}_{x|y,\eta}(y, x^\circ) - H\beta),$$

بنابراین $\hat{\mu}_w = \Sigma_\theta A'R^{-1}(z(y, x^\circ) - AH\beta)$ از طرفی چون $\{(x - H\beta)' \Sigma_\theta^{-1} (x - H\beta) | y\}$ در (۶) یک فرم درجه دو به صورت $W' \Sigma_\theta^{-1} W$ است، پس

$$\begin{aligned} \hat{E}[\{\ln f(x|\eta)\} | y] &= -\frac{1}{\nu} \ln |\Sigma_\theta| - \ln \nu \pi - \frac{1}{\nu} \text{tr}(\Sigma_\theta^{-1} \hat{\Sigma}_{x|y,\eta}) \\ &- \frac{1}{\nu} \hat{\mu}'_w \Sigma_\theta^{-1} \hat{\mu}_w, \end{aligned}$$

با جایگذاری این عبارت در (۵) مشتقات محاسبه می شوند.

۶ الگوریتم بیشینه سازی امید ریاضی دوه‌دویی تقریبی

قضیه ۱.۶. [۶] اگر x نرمال به صورت $N(H\beta, \Sigma_\theta)$ و $(x|y, \eta)$ نرمال تقریبی به شکل

$$\hat{f}(x|y, \eta) = N_n(\hat{\mu}_{x|y,\eta}, \hat{\Sigma}_{x|y,\eta})$$

باشند، آنگاه $\text{argmax}_\eta \hat{Q}_1(\eta | \eta^{(m)}) = \text{argmax}_\eta \hat{Q}_1(\eta | \eta^{(m)})$ که در آن $\hat{Q}_1(\eta | \eta^{(m)})$ عبارت است از

$$\sum_{(\ell, \ell') \in \mathcal{K}} \int \int \log \{f(x_{\ell\ell'} | \eta)\} \hat{f}(x_{\ell\ell'} | y_{\ell\ell'}, \eta^{(m)}) dx_{\ell\ell'}.$$

با استفاده از قضیه ۱.۴ و قضیه ۱.۶، [۶] الگوریتم APEM را معرفی نمود که در الگوریتم زیر روند اجرای این الگوریتم توضیح داده شده است. - مقادیر اولیه $\eta^{(0)}$ طوری انتخاب شوند که $PL(\eta^{(0)} | y) > 0$ و قرار

دهید $m = 0$.

- مقدار اولیه برای $x^{(0)}$ را به صورت مد $f(x_{\ell\ell'} | \eta)$ در نظر بگیرید و قرار

دهید $d = 0$.

(الف) از قضیه ۱.۴ $\hat{f}(x_{\ell\ell'} | y_{\ell\ell'}, \eta)$ را محاسبه نمایید.

(ب) $x^{(d)}$ را مد توزیع $\hat{f}(x_{\ell\ell'} | y_{\ell\ell'}, \eta)$ در نظر بگیرید و قرار دهید $d = d + 1$

و به (الف) برگردید. همگرایی پس از تعداد کمی تکرار حاصل می شود.

- از قضیه ۱.۶ عبارت $\hat{Q}_1(\eta | \eta^{(m)})$ محاسبه شود.

- اکنون $\eta^{(m+1)}$ را طوری انتخاب کنید که

$$\eta^{(m+1)} = \text{argmax}_\eta \hat{Q}_1(\eta | \eta^{(m)}).$$

به مرحله (۳) برگردید و تا زمان رسیدن به همگرایی ادامه دهید.

۷ مثال شبیه سازی

۴۰۰ موقعیت تصادفی در یک شبکه منظم 20×20 تولید شده است. یک

تابع کوواریانس ماترن برای دو مقدار معلوم پارامتر هموارسازی $1/5$ و $2/5$

و پارامترهای دیگر تابع کوواریانس به صورت

$$\theta = (\sigma^2, \phi) = (0.5, 1)$$

منظور شد و متغیرهای پنهان از توزیع نرمال با میانگین صفر و این تابع

کوواریانس تولید شدند. با استفاده از متغیرهای پنهان تولید شده متغیر پاسخ

با فرض دوجمله ای بودن به صورت $y_j \sim \text{Bin}(u_j, p_j)$ که در آن $u_j = 5$

تولید و برای یک نمونه از متغیرهای پنهان تولید شده نمودار خطوط تراز و

نمودار چندک-چندک آن در شکل ۱ ارائه شده است.

۵ الگوریتم بیشینه سازی امید ریاضی دوه‌دویی مربع بندی

برای به دست آوردن برآوردهای ماکسیمم درستنمایی مدل SGLM و در راستای افزایش سرعت محاسبات، می توان رهیافت ماکسیمم درستنمایی دوه‌دویی را به جای درستنمایی معمولی به کار برد. تابع درستنمایی دوه‌دویی به صورت تابعی دو متغیره و به شکل

$$\begin{aligned} PL(\beta, \theta | y) &= \prod_{(\ell, \ell') \in \mathcal{K}} L(\beta, \theta | y_\ell, y_{\ell'}) \\ &= \prod_{(\ell, \ell') \in \mathcal{K}} \int \int f(y_\ell | x_\ell) f(y_{\ell'} | x_{\ell'}) f(x_\ell, x_{\ell'} | \beta, \theta) dx_\ell dx_{\ell'} \end{aligned}$$

است، که در آن \mathcal{K} یک زیرمجموعه از همسایگی هاست. [۱۶] با استفاده از این رهیافت و الگوریتم EM، الگوریتم QPEM، را که به شرح الگوریتم زیر است، پیشنهاد نمودند. - یک مقدار اولیه برای $\eta^{(0)} = (\beta', \theta')$ انتخاب کنید، به طوری که $PL(\eta^{(0)} | y) > 0$ و $m = 0$ قرار دهید.

- مجموع امید ریاضی های شرطی زیر محاسبه شوند.

$$\begin{aligned} Q(\eta | \eta^{(m)}) &= \sum_{(\ell, \ell') \in \mathcal{K}} E(\log \{f(x_\ell, x_{\ell'}, y_\ell, y_{\ell'} | \eta)\} | y_\ell, y_{\ell'}, \eta^{(m)}) \\ &= \sum_{(\ell, \ell') \in \mathcal{K}} \int \int \log \{f(x_\ell, x_{\ell'}, y_\ell, y_{\ell'} | \eta)\} \\ &\quad \times f(x_\ell, x_{\ell'} | y_\ell, y_{\ell'}, \eta^{(m)}) dx_\ell dx_{\ell'}. \end{aligned} \quad (7)$$

- انتخاب کنید $\eta^{(m+1)}$ به طوری که

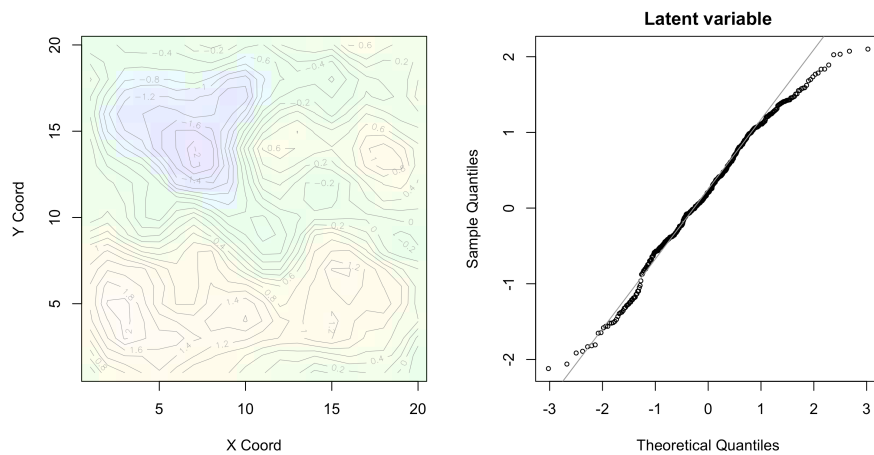
$$\eta^{(m+1)} = \text{argmax}_\eta Q(\eta | \eta^{(m)})$$

- قرار دهید $m = m + 1$ به مرحله ۲ برگردید و تا رسیدن به همگرایی،

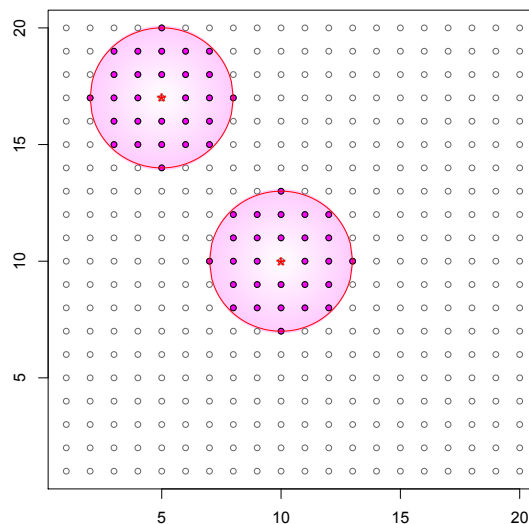
الگوریتم تکرار شود.

برای محاسبه انتگرال های دو گانه (۷)، [۱۶] از روش مربع بندی ارمیت گاوسی

استفاده کردند.



شکل ۱: نمودار چندک-چندک نرمال و نمودار تراز متغیرهای پنهان تولیدشده.



شکل ۲: نمایش دو موقعیت دلخواه با همسایگی‌ها به شعاع ۳

الگوریتم QPEM و APEM همه جفت همسایه‌ها به شعاع ۳ استفاده شد. در شکل ۲ دو موقعیت دلخواه با همسایگی‌ها به شعاع ۳ نشان داده شده است.

محاسبات طولانی تر می‌شود.

[۱۳] نشان داد که بهتر است پارامتر ν در بازه $0.5/5$ تا $2/5$ فرض شود چون به ازای مقادیر بزرگ‌تر محاسبات و به دست آوردن توابع اصلاح شده بسمل (K_V) بسیار پیچیده تر خواهد شد.

با رایانه (2.4 GHz intel core i5 -4GB RAM) زمان اجرای الگوریتم AEMG, MCCEM, QPEM و APEM برای یک مجموعه داده و پارامتر هموارسازی $1/5$ به ترتیب حدود 4500 ثانیه، 220 ثانیه، 270 ثانیه و 115 ثانیه

هر چهار الگوریتم معرفی شده بر روی داده‌ها اجرا شدند، به طوری که برای اجرای الگوریتم MCCEM از 10000 نمونه مونت کارلویی و برای اجرای

نتایج متوسط برآورد پارامترها و مقدار MSE برای 200 مجموعه داده در جدول ۱ آورده شده است. با مقایسه نتایج چهار الگوریتم مشاهده می‌شود که تفاوت ناچیزی بین متوسط مقادیر برآورد شده وجود دارد و با تکرارهای مختلف شبیه‌سازی و انجام آزمون‌های تی تست به این نتیجه رسیدیم که بین نتایج چهار الگوریتم تفاوت معنی‌داری وجود ندارد. به ازای دو مقدار مختلف پارامتر هموارسازی تابع کوواریانس ماترن تفاوت ناچیزی در نتایج مشاهده وجود داشت که البته با افزایش مقدار پارامتر هموارسازی زمان اجرای

به طول انجامید. بنابراین زمان اجرای الگوریتم APEM از سایر الگوریتم‌ها کمتر است و با مقایسه نتایج این الگوریتم می‌توان مشاهده کرد که گاهی اوقات بهتر از سایر الگوریتم‌ها عمل کرده است و البته با تکرار شبیه‌سازی و انجام آزمون‌های معنی‌داری وجود تفاوت معنی‌دار بین نتایج هر چهار الگوریتم رد شد. همچنین شبیه‌سازی به ازای مقادیر مختلف $u = 10, 50, 100$ و تغییر مقادیر پارامترهای σ^2 و ϕ تکرار شد که در نتایج به دست آمده تفاوتی زیادی حاصل نشد.

جدول ۱: متوسط برآورد و مقادیر میانگین مربع خطا برای ۲۰۰ مجموعه داده شبیه‌سازی شده

		v					
		$2/5$		$1/5$			
الگوریتم	پارامتر	مقدار	م. برآورد	MSE	م. برآورد	MSE	
σ^2		۵/۰	۴۸۷۵/۰	۱۰۳۱/۰	۴۳۹۱/۰	۱۱۲۰/۰	
MCEMG	ϕ	۱	۸۵۷۷/۰	۱۵۶۰/۰	۲۱۲۰/۱	۱۷۲۰/۰	
σ^2		۵/۰	۴۹۱۷/۰	۰۹۰۹/۰	۵۱۲۹/۰	۰۹۸۶/۰	
AEMG	ϕ	۱	۸۷۰۴/۰	۱۴۶۲/۰	۹۷۶۵/۰	۱۱۰۸/۰	
σ^2		۵/۰	۵۴۴۷/۰	۱۱۹۰/۰	۴۶۷۵/۰	۱۳۱۴/۰	
QPEM	ϕ	۱	۹۱۸۶/۰	۱۴۴۵/۰	۱۴۱۲/۱	۱۶۴۰/۰	
σ^2		۵/۰	۵۰۳۴/۰	۰۸۲۱/۰	۵۱۰۹/۰	۰۹۷۷/۰	
APEM	ϕ	۱	۰۳۵۰/۱	۱۰۸۴/۰	۹۶۴۰/۰	۱۲۱۲/۰	

بحث و نتیجه‌گیری

APEM نسبت به سایر الگوریتم‌ها کمتر است، که به دلیل عدم استفاده از نمونه‌های مونت کارلویی و استفاده از همسایگی‌ها به جای کل موقعیت‌ها است. زمان اجرای الگوریتم AEMG کمتر از الگوریتم QPEM بود که این نتایج نشان می‌دهند که استفاده از رهیافت تقریبی تأثیر بسیار زیادی در بهبود زمان انجام محاسبات در این مدل‌ها دارد. زمان اجرای الگوریتم MCEMG بسیار بیشتر از الگوریتم‌های دیگر است که دلیل آن استفاده از نمونه‌های مونت کارلویی است. به عنوان پیشنهاد می‌توان برای متغیرهای پنهان توزیع‌های انعطاف‌پذیرتر و بزرگ‌تر از نرمال در مدل‌های تعمیم‌یافته فضایی در نظر گرفت و الگوریتم‌های معرفی شده را به این نوع از مدل‌ها تعمیم داد.

یکی از اهداف اصلی در مطالعات پیرامون مدل‌های فضایی با پاسخ‌های گسسته به دست آوردن برآوردهای پارامترها است که تاکنون روش‌های مختلف بیزی و درستنمایی معرفی شده‌اند. در این مقاله چهار الگوریتم برای به دست آوردن برآورد ماکسیمم درستنمایی این نوع از مدل‌ها مورد بررسی قرار گرفت و در یک مطالعه شبیه‌سازی مقایسه شدند. با توجه به نتایج به دست آمده در مطالعه شبیه‌سازی چهار الگوریتم از نظر دقت تفاوت معنی‌داری ندارند اما با توجه به زمان محاسبات نتایج جالبی به دست آمد. زمان اجرای الگوریتم

مراجع

- [1] Baghishani, H., Rue, H. and Mohammadzadeh, M. (2011), A Data Cloning Algorithm for Computing Maximum Likelihood Estimates in Spatial Generalized Linear Mixed Models, *Computational Statistics and Data Analysis*, **55**, 1748-1759.
- [2] Baghishani, H., Rue, H. and Mohammadzadeh, M. (2012). On a Hybrid Data Cloning Method and Its Application in Generalized Linear Mixed Models, *Statistics and Computing*, **22**, 613-597.

- [3] Breslow, N. E. and Clayton, D. G. (1993). Approximate Inference in Generalized Linear Mixed Models, *Journal of the American Statistical Association*, **88**, 9-25.
- [4] Diggle, P., Tawn, J.A. and Moyeed, R. A. (1998). Model-based geostatistic, *Journal of the Royal Statistical Society, Series C. Applied Statistics*, **47**, 299-350.
- [5] Eidsvik, J., Martino, S. and Rue, H. (2009), Approximate Bayesian Inference in Spatial Generalized Linear Mixed Models, *Scandinavian Journal of Statistics*, **36**, 1-22.
- [6] Hosseini, F. (2016), A New Algorithm for Estimating the Parameters of the Spatial Generalized Linear Mixed Models, *Environmental and Ecological Statistics*, **23**, 205-217.
- [7] Hosseini, F., Eidsvik, J. and Mohammadzadeh, M. (2011). Approximate Bayesian Inference in Spatial GLMM with Skew Normal Latent Variables, *Computational Statistics and Data Analysis*, **55**, 1791-1806.
- [8] Hosseini, F. and Karimi, O. (2020). Approximate likelihood Inference in Spatial Generalized Linear Mixed Models with Closed Skew Normal latent Variables, *Communication in Statistics- Simulation and Computation*, **49(1)**, 121-134.
- [9] Hosseini, F. and Karimi, O. (2019). Approximate Composite Marginal Likelihood Inference in Spatial Generalized Linear Mixed Models, *Journal of Applied Statistics*, **46(3)**, 542-558.
- [10] Hosseini, F. and Mohammadzadeh, M. (2012). Bayesian Prediction for Spatial GLMM's with Closed Skew Normal Latent Variables, *Australian & New Zealand Journal of Statistics*, **54**, 43-62.
- [11] Hosseini, F., Mohammadzadeh, M. and Karimi, O. (2014). Pseudo-likelihood Inference for Discrete Spatial Response (A Case Study of the Semnan rainfall data), *Journal of Science Kharazmi University*, **13**, 797-808.
- [12] McCullagh, P. and Nelder, J. A. (1989). *Generalized linear models*, Chapman and Hall, London.
- [13] Rasmussen, C. E. and Williams, C. K. I., (2006). *Gaussian Processes for Machine Learning*, the MIT Press.
- [14] Torabi, M. (2013). Likelihood Inference in Generalized Linear Mixed Measurement Error Models, *Computational Statistics & Data Analysis*, **57**, 549-557.
- [15] Torabi, M. (2015). Likelihood Inference for Spatial Generalized Linear Mixed Models. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, **44**, 1692-1701.
- [16] Varin, C., Høst, G. and Skare, Ø. (2005). Pairwise Likelihood Inference in Spatial Generalized Linear Mixed Models, *Computational Statistics and Data Analysis*, **49**, 1173-1191.
- [17] Zhang, H. (2002). On Estimation and Prediction for Spatial Generalized Linear Mixed Models, *Biometrics*, **58**, 129-136.