برآوردهای بیز تجربی انواع همبستگی برای داده‌های طولی-دینامیکی در مدل‌های سلسله مراتبی ناهمگن

سید کامران قریشی[۱]، غزال سادات قریشی[۲]

تاریخ دریافت: ۹۹/۱۱/۱۳
تاریخ پذیرش: ۹۹/۱۲/۲۷

چکیده:

در این مقاله ابتدا مدل‌های سلسله مراتبی طولی-دینامیکی دوسطحی را تعریف خواهیم کرد. این مدل‌ها برای برازش مجموعه داده‌های طولی که ساختار وابستگی نه از طریق مشاهده‌ها بلکه از طریق مدل سطح دوم، که یک مدل دینامیکی برای پارامترهای مدل سلسله مراتبی است، ایجاد می‌شود. ابتدا روش‌های مختلف برآورد ابر پارامترهای مدل‌های سلسله مراتبی دوسطحی طولی-دینامیکی بحث خواهد شد سپس انواع برآورد متناظر برای ابر پارامتری که عامل ایجاد همبستگی در این مدل است ارائه خواهد شد. در ادامه یک مطالعه شبیه‌سازی به همراه تحلیل یک مجموعه داده واقعی خواهد آمد.

واژه‌های کلیدی: برآورد نااریب اشتاین، برآوردهای انقباضی ، داده‌های طولی، مدل‌های سلسله مراتبی، مدل‌های دینامیکی، ناهمگنی واریانس.

۱ مقدمه

مدل‌های سلسله مراتبی رده‌ای بزرگ از مدل‌های آماری هستند که کاربرد وسیعی در زمینه‌های گوناگون کاربردی دارند. در واقع یک مدل سلسله مراتبی یک مدل چند سطحی است که هر سطح آن شامل اطلاعات در خصوص کمیت‌های مجهول جامعه آماری موردمطالعه است. در این مدل‌ها عموماً برآوردهای پارامترها دارای ساختار انقباضی هستند. در آمار مفهوم انقباضی به معنی کاهش اثر تغییرات نمونه در استنباط آماری است. در واقع یک برآورد انقباضی برآوردی است که در آن اثر یک برآوردگر خام با استفاده از سایر اطلاعات بهبود می‌یابد. اولین مطالعات مربوط به برآوردهای انقباضی به کارهای اشتاین [۱۱] برمی‌گردد. او از برآوردهای انقباضی برای برآورد هم‌زمان میانگین چند جامعه نرمال استفاده کرد. به‌این‌ترتیب برآوردهای انقباضی مبنایی برای گسترش مدل‌های سلسله مراتبی با توزیع نرمال شد. پس از معرفی برآوردهای چروکیده، مطالعه خواص آن‌ها همواره موردتوجه دانشمندان بوده است. تاکنون دانشمندان مختلفی سعی کرده‌اند تا خواص بیزی، خواص بیز تجربی، و خواص تابع مخاطره برآوردهای انقباضی را در مدل‌های سلسله مراتبی همگن نرمال دوسطحی که به‌صورت زیر تعریف می‌شود، بررسی کنند [۱، ۲، ۳، ۴]

$$Y_i \sim N(\theta_i, A) \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$
$$\theta_i \sim N(\mu, \lambda). \qquad (1)$$

منظور از همگن بودن در مدل ۱ به معنی آن است که واریانس مشاهده‌های Y_i برابر ثابت Aاست. برآورد انقباضی θ_i در مدل (۱)، که در واقع همان میانگین چگالی پسین است، به‌صورت زیر داده می‌شود

$$\hat{\theta}_i = \frac{\lambda}{\lambda+A}Y_i + \frac{A}{\lambda+A}\mu = \frac{\lambda}{\lambda+A}Y_i + (1-\frac{\lambda}{\lambda+A})\mu \qquad (2)$$

برآوردگر (۲) دارای خواص زیر است [۹]

الف. این برآوردگر دارای خاصیت بهینه ریسک است چراکه میانگین چگالی پسین مینیمم کننده تابع ریسک با تابع ضرر درجه دوم است.

ب. همان‌طور که می‌بینیم برآوردگر (۲) ترکیب محدبی از Y_i و μ است. در اینجا دقت داریم که μ میانگین چگالی پیشین θ_i و Y_i برآورد ماکسیمم درستنمایی θ_i است. به عبارتی در رابطه (۲)، میانگین چگالی پیشین، μ، توسط مشاهده Y_i بهبودیافته است. این حقیقت در واقع همان جوهره رهیافت بیزی است که باور اولیه محقق(چگالی پیشین) توسط تابع درستنمایی روزآمد شده و توزیع پسین را به وجود می‌آورد.

[۱]گروه آمار، دانشگاه قم (نویسنده مسئول) atty_ghoreishi@yahoo.com
[۲]دبیرستان فرزانگان ۲، تهران

ج. برآوردگر (۲) یک برآوردگر انقباضی است چراکه میانگین چگالی پیشین با ضریب کمتر از ۱، $(1-\frac{\lambda}{\lambda+A})$، تعدیل‌شده و در عوض توسط اثر مشاهده Y_i با ضریب $\frac{\lambda}{\lambda+A}$ جبران می‌شود. درصورتی‌که میانگین توزیع پیشین را صفر در نظر بگیریم برآوردگر (۲) به‌صورت زیر خواهد بود

$$\hat{\theta}_i=\frac{\lambda}{\lambda+A}Y_i. \tag{۳}$$

مدل‌های سلسله مراتبی دوسطحی ناهمگن، که در آن‌ها واریانس مشاهده‌ها ثابت نبوده، نیز موردتوجه آمارشناسان بوده است، [۶، ۱۲]. این مدل‌ها به‌صورت زیر داده می‌شوند

$$\begin{aligned} &Y_i\sim N(\theta_i,A_i) \qquad i=1,2,\cdots,n\\ &\theta_i\sim N(\mu,\lambda). \end{aligned} \tag{۴}$$

البته توجه داریم که در مدل (۴) لازم نیست که همه A_iها با یکدیگر متفاوت باشند، همین‌که بعضی از آن‌ها متفاوت با بقیه باشند کفایت می‌کند تا ما آن را یک مدل سلسله مراتبی ناهمگن بنامیم. اگر به‌جای مدل سلسله مراتبی همگن (۱)، مدل سلسله مراتبی ناهمگن (۴) را مبنای کار قرار دهیم در این صورت برآوردگر انقباضی متناظر با اندکی تغییر به‌صورت زیر به دست می‌آید

$$\hat{\theta}_i=\frac{\lambda}{\lambda+A_i}Y_i+\frac{A_i}{\lambda+A_i}\mu=\frac{\lambda}{\lambda+A_i}Y_i+(1-\frac{\lambda}{\lambda+A_i})\mu \tag{۵}$$

بعلاوه همه نکات (الف)-(ج) گفته‌شده در بالا در خصوص این برآوردگر نیز صدق می‌کند. تنها تفاوت برآوردگر انقباضی ناهمگن (۵) در مقایسه با برآورد انقباضی همگن (۲) در این است که ضرایب چروک کننده در (۵) از زیر جامعه‌ای به زیر جامعه دیگر (با تغییر i) تغییر می‌کند.

مدل سلسله مراتبی دوسطحی ناهمگن (۴) را می‌توان به‌صورت

$$\begin{aligned} &Y_i\sim N(\theta_i,A_i) \qquad i=1,2,\cdots,n\\ &\theta_i\sim N(\mu_i,\lambda) \end{aligned} \tag{۶}$$

توسعه داد به‌طوری‌که میانگین سطح دوم مدل نیز ثابت نباشد. در این صورت مدل حاصل از دو مدل (۴) و (۶) ازاین‌جهت بسیار متفاوت است که مدل اخیر در قالب مدل‌های با ابعاد بزرگ، از لحاظ تعداد ابرپارامترها μ_i قرار می‌گیرد چراکه با افزایش تعداد نمونه‌ها تعداد ابرپارامترها نیز افزایش می‌یابد. لذا لازم است تا از ابزاری غیر از ابزار مرسوم برای تحلیل مدل (۶)، استفاده نماییم، [۵، ۱۰].

در حالت کلی مدل‌های سلسله مراتبی را می‌توان در سه قالب کلی مدل سلسله مراتبی همگن، ۱، مدل سلسله مراتبی ناهمگن، ۴ ،و در نهایت به مدل سلسله مراتبی ناهمگن کامل یا ناهمگن دوگانه، ۶، تقسیم نمود.

در عمل اغلب مدل‌های سلسله مراتبی مذکور دارای برازش مناسب به انواع داده‌ها حاصل از این مدل‌ها هستند. با این وجود ممکن است گاهی با داده‌هایی روبرو شویم که از مدل‌های دوسطحی تولیدشده باشند که دارای ساختار وابستگی ویژه‌ای هستند. در این صورت به‌طور طبیعی مدل‌های سلسله مراتبی موجود از کارایی لازم برای تحلیل این‌گونه داده‌ها برخوردار نخواهند بود. به‌عنوان‌مثال ممکن است وضعیت رشد تومور، Y، در تعدادی بیمار، n، در زمان‌های مختلف $t=1,\cdots,T$ موجود باشند. در واقع در اینجا ما با آرایه‌ای از داده‌ها به‌صورت زیر روبرو هستیم

$$\begin{array}{cccc} Y_{11} & Y_{12} & \cdots & Y_{1T}\\ Y_{21} & Y_{22} & \cdots & Y_{2T}\\ & \vdots & & \\ Y_{n1} & Y_{n2} & \cdots & Y_{nT}. \end{array} \tag{۷}$$

در آرایه فوق ردیف‌ها به افراد یا آزمودنی‌ها و ستون‌ها به زمان جمع‌آوری داده‌ها اشاره دارند. هرچند برای این داده‌ها اطلاعات آزمودنی‌ها از یکدیگر مستقل فرض می‌شود ولی طبیعی است که برای هر آزمودنی (فرد)، مشاهده‌ها در طول زمان به یکدیگر وابسته‌اند. به‌عنوان‌مثال می‌توان به وضعیت بهبود زخم در n فرد دیابتی اشاره کرد که این مراحل شامل چهار فاز انعقاد خون، التهاب، تکثیر و بازسازی است که در چهار مقطع زمانی متفاوت رخ می‌دهند، [۸]. واضح است که در هر مرحله از موارد فوق وضعیت بهبود زخم در بیماران دیابتی متفاوت خواهد بود، اگرچه می‌توان فرض کرد که این وضعیت تقریباً برای همه افراد دیابتی یکسان می‌باشد.

ما برای تحلیل این نوع داده‌ها مدل سلسله مراتبی طولی-دینامیکی را پیشنهاد می‌کنیم که در بخش ۲ به معرفی آن خواهیم پرداخت. بخش ۳ شامل برآوردهای گشتاوری، ماکسیمم درستنمایی و ناااریب اشتاین برای ابر پارامترها در مدل سلسله مراتبی طولی-دینامیکی است. در بخش ۴ انواع برآوردها برای ابر پارامتر ایجادکننده وابستگی در مدل‌های سلسله مراتبی طولی-دینامیکی ارائه خواهد شد. بخش ۵ شامل یک مطالعه شبیه‌سازی و کاربرد برای یک مجموعه داده واقعی است.

۲ مدل‌های سلسله مراتبی طولی-دینامیکی

برای تحلیل داده‌های آرایه ۷، در این بخش مدل‌های سلسله مراتبی طولی-دینامیکی زیر پیشنهاد می‌شود

$$\begin{aligned} &Y_{it}|\theta_{it} \sim N(\theta_{it}, A_{it}) \\ &\theta_{it}|z_1,\cdots z_{t-1} \sim N(\mu+\psi z_{t-1}, \lambda) \\ &z_t \overset{iid}{\sim} N(0,\sigma^2) \qquad i=1,\ldots,n,\ t=1,\ldots T, \end{aligned} \tag{8}$$

که در آن μ، λ، σ^2 و ψ ابر پارامترهای مدل هستند. مدل (۸) دارای دو ویژگی مهم زیر است

الف. دارای ساختار طولی است چراکه وابستگی مشاهده‌ها (Y_{it}) در طول زمان ($t=1,\ldots T$) ظاهر می‌شود و در آن نمونه‌ها (آزمودنی‌ها) از یکدیگر مستقل فرض می‌شوند.

ب. ویژگی جذاب و منحصربه‌فرد این مدل در آن است که برخلاف مدل‌های مرسوم برای تحلیل داده‌های طولی، که ساختار وابستگی در آن‌ها به‌طور مستقیم از طریق مشاهده‌های Y_{it} ارزیابی می‌شود، در این مدل بر اساس ساختار دینامیکی θ_{it} تولید می‌شود. به همین دلیل ما مدل (۸) را مدل سلسله مراتبی با ساختار وابستگی طولی-دینامیکی نام‌گذاری می‌کنیم.

نمودار زیر نحوه وابستگی در مدل مذکور را نمایش می‌دهد

برای مطالعه بیشتر در خصوص تحلیل مدل‌های دینامیکی ساختار مدل‌های پیوند، به [7] ارجاع می‌دهیم.

به‌راحتی می‌توان تحقیق کرد که تحت مدل انتقال (۸) کوواریانس بین θ_{it} و مشاهده‌های Y_{it} به‌صورت زیر به دست می‌آید

$$Cov(\theta_{it},\theta_{js}) = \begin{cases} \psi\sigma^2 & s=t-1, i=j \\ (1+\psi^2)\sigma^2 & s=t, i=j \\ 0 & o.w. \end{cases} \tag{9}$$

و نیز داریم

$$Cov(Y_{it},Y_{js}) = \begin{cases} \psi\sigma^2 & s=t-1, i=j \\ (1+\psi^2)\sigma^2 + A_{it} & s=t, i=j \\ 0 & o.w. \end{cases} \tag{10}$$

با توجه به رابطه (۹)، ضریب همبستگی بین θ_{it} و $\theta_{i,t-1}$ به‌صورت زیر به دست می‌آید

$$Corr(\theta_{it},\theta_{i,t-1}) = \frac{\psi}{1+\psi^2} \tag{11}$$

و چون تابع $\frac{\psi}{1+\psi^2}$ به ازای $|\psi| \leq 1$ یک تابع یکنوای صعودی است، در نتیجه با موجود بودن برآورد ضریب همبستگی بین θ_{it} و $\theta_{i,t-1}$، برآورد ψ به‌صورت یکتا به دست می‌آید. علاوه بر این از رابطه (۸) به‌راحتی می‌توان نتیجه گرفت که رابطه زیر برقرار است

$$\lambda = (1+\psi^2)\sigma^2 \Rightarrow \lambda+\sigma^2 = (2+\psi^2)\sigma^2 \Rightarrow \hat{\sigma}^2 = \frac{\widehat{\lambda+\sigma^2}}{1+\hat{\psi}^2}.$$

به عبارتی رابطه فوق نشان می‌دهد که با موجود بودن برآوردهای $\widehat{\lambda+\sigma^2}$ و $\hat{\psi}$ می‌توان برآورد σ^2 را به دست آورد.

۳ انواع برآورد برای ابر پارامترها در مدل طولی-دینامیکی

در این بخش با استفاده از مدل (۸)، مدل حاشیه متناظر به‌صورت زیر به دست می‌آید

$$\begin{aligned} &Y_{it}|\theta_{it} \sim N(\theta_{it}, A_{it}) \\ &\theta_{it} \sim N(\mu, \lambda+\sigma^2) \\ &Cov(\theta_{it},\theta_{js}) = \psi\sigma^2, i=j, s=t-1 \end{aligned} \tag{12}$$

به عبارتی در مدل‌های سلسله مراتبی طولی-دینامیکی (۱۲)، ماتریس کواریانس بردار $\theta_i = (\theta_{i1},\theta_{i2},\cdots,\theta_{iT})^T$ به‌صورت زیر خواهد بود

$$\Sigma = \sigma^2 \begin{pmatrix} 2+\psi^2 & \psi & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \psi & 2+\psi^2 & \psi & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \psi & 2+\psi^2 & \psi & \cdots & 0 \\ & & \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \psi & 2+\psi^2 \end{pmatrix}.$$

به‌راحتی می‌توان تحقیق کرد که توزیع حاشیه بردار $\mathbf{Y}_i = (Y_{i1},Y_{i2},\cdots,Y_{iT})^T$ نرمال T-متغیره با میانگین

$$\mu = (\mu,\mu,\cdots,\mu)^T$$

و ماتریس کواریانس

$$\Sigma_i=[\sigma_{jk}]=\begin{cases}\psi\sigma^۲ & |k-j|=۱\\ (۱+\psi^۲)\sigma^۲+A_{it} & k=j\\ ۰ & o.w.\end{cases}$$

است. بنابراین از روش‌های بیز تجربی زیر برای برآورد ابر پارامترهای μ و $\gamma:=(۱+\psi^۲)\sigma^۲$ استفاده خواهیم کرد. البته دقت داریم که برآوردهای مذکور در مقاطع زمانی متفاوت $t=۱,\cdots,T$ به دست می‌آیند.

۱. برآوردهای گشتاوری γ و μ که به‌صورت زیر داده می‌شوند

$$\hat{\gamma}^{(t)}_{MM}=\left(\frac{\sum_{i=۱}^{n}\left((Y_{it}-\hat{\mu}^{(t)})^۲-A_{it}\right)}{n}\right)_+, t=۱,\ldots,T,$$

$$\hat{\mu}^{(t)}=\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}Y_{it}.$$

و در نتیجه برآورد انقباضی گشتاوری حاصل برابر خواهد بود با

$$\hat{\theta}^{MM}_{it}=\frac{\hat{\gamma}^{(t)}_{MM}}{\hat{\gamma}^{(t)}_{MM}+A_{it}}Y_{it}+\frac{A_{it}}{\hat{\gamma}^{(t)}_{MM}+A_{it}}\hat{\mu}^{(t)}. \quad (۱۳)$$

۲. برآوردهای ماکسیمم درستنمایی γ و μ که از حل رابطه زیر به دست می‌آیند

$$\min_{\gamma,\mu}\sum_{i=۱}^{n}\left\{\ln\Sigma_i+(\mathbf{Y}_i-\mu)^T\Sigma_i^{-۱}(\mathbf{Y}'_i-\mu)\right\},$$

و در نتیجه برآورد انقباضی ماکسیمم درستنمایی متناظر برابر خواهد بود با

$$\hat{\theta}^{ML}_{it}=\frac{\hat{\gamma}^{(t)}_{ML}}{\hat{\gamma}^{(t)}_{ML}+A_{it}}Y_{it}+\frac{A_{it}}{\hat{\gamma}^{(t)}_{ML}+A_{it}}\hat{\mu}^{(t)}. \quad (۱۴)$$

۳. برآورد نااریب اشتاین، $SURE$ مربوط به γ و μ، تحت تابع ضرر توان دوم

$$l_t(\theta_t,\hat{\theta}_t)=\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}(\theta_{it}-\hat{\theta}_{it})^۲,$$

که در آن $\theta_t=(\theta_{۱t},\theta_{۲t},\ldots,\theta_{nt})^\top$، و تابع مخاطره متناظر برابر است با

$$R_t(\theta_t,\hat{\theta}_t)=E(l_t(\theta_t,\hat{\theta}_t)).$$

می‌توان به‌راحتی تحقیق کرد که برآورد نااریب تابع مخاطره فوق برابر است با

$$SURE_t(\gamma,\mu)=\sum_{t=۱}^{T}\left(\frac{A_{it}^۲}{(\gamma+A_{it})^۳}(Y_{it}-\mu)^۲-\frac{A_{it}^۲}{(\gamma+A_{it})^۲}\right).$$

برآورد $SURE$ مربوط γ و μ، با مینیمم کردن تابع فوق نسبت به ابر پارامترهای مذکور به‌صورت زیر به دست خواهند آمد، [۶، ۱۲]

$$\arg\min_{\gamma>۰,\mu}SURE_t(\gamma,\mu).$$

در نتیجه برآورد کننده انقباضی متناظر برابر خواهد بود با

$$\hat{\theta}^{SURE}_{it}=\frac{\hat{\gamma}^{(t)}_{SURE}}{\hat{\gamma}^{(t)}_{SURE}+A_{it}}Y_{it}+\frac{A_{it}}{\hat{\gamma}^{(t)}_{SURE}+A_{it}}\hat{\mu}^{(t)}_{SURE}. \quad (۱۵)$$

دقت داریم که در روابط (۱۳-۱۵) برآوردهای مکانی(در زمان‌های مختلف) ابر پارامترها محاسبه و جایگزین شده‌اند. البته می‌توان در روابط مذکور از برآوردهای سراسر ابر پارامترها که به‌صورت زیر تعریف می‌شوند نیز استفاده نمود

$$\hat{\gamma}=\frac{۱}{T}\sum_{t=۱}^{T}\hat{\gamma}^{(t)},\quad \hat{\mu}=\frac{۱}{T}\sum_{t=۱}^{T}\hat{\mu}^{(t)}.$$

۴ برآورد پارامتر وابستگی ψ در مدل طولی-دینامیکی

با توجه به ساختار همبستگی بین داده‌ها، انواع برآورد پارامترهای همبستگی ψ با توجه به روابط (۹) و (۱۰) به‌صورت زیر پیشنهاد می‌گردد

۱. برآورد همبستگی گشتاوری مبتنی بر داده‌ها

$$R_۱=\frac{\sum_{t=۱}^{T}\sum_{i=۱}^{n}(Y_{it}-\hat{\mu}_t^{(MM)})(Y_{i,t-۱}-\hat{\mu}_{t-۱}^{(MM)})}{\sum_{t=۱}^{T}\left[\sum_{i=۱}^{n}(Y_{it}-\hat{\mu}_t^{(MM)})^۲-A_{it}\right]_+}.$$

۲. برآورد همبستگی گشتاوری مبتنی بر برآوردهای انقباضی

$$R_۲=\frac{\sum_{t=۱}^{T}\sum_{i=۱}^{n}(\hat{\theta}_{it}-\hat{\mu}_t^{(MM)})(\hat{\theta}_{i,t-۱}-\hat{\mu}_{t-۱}^{(MM)})}{\sum_{t=۱}^{T}\sum_{i=۱}^{n}(\hat{\theta}_{it}-\hat{\mu}_t^{(MM)})^۲}.$$

۳. برآورد همبستگی ماکسیمم درستنمایی مبتنی بر داده‌ها

$$R_۳=\frac{\sum_{t=۱}^{T}\sum_{i=۱}^{n}(Y_{it}-\hat{\mu}_t^{(ML)})(Y_{i,t-۱}-\hat{\mu}_{t-۱}^{(ML)})}{\sum_{t=۱}^{T}\left[\sum_{i=۱}^{n}(Y_{it}-\hat{\mu}_t^{(ML)})^۲-A_{it}\right]_+}.$$

۴. برآورد همبستگی ماکسیمم درستنمایی مبتنی بر برآوردهای انقباضی

$$R_۴=\frac{\sum_{t=۱}^{T}\sum_{i=۱}^{n}(\hat{\theta}_{it}-\hat{\mu}_t^{(ML)})(\hat{\theta}_{i,t-۱}-\hat{\mu}_{t-۱}^{(ML)})}{\sum_{t=۱}^{T}\sum_{i=۱}^{n}(\hat{\theta}_{it}-\hat{\mu}_t^{(ML)})^۲}.$$

۵. برآورد همبستگی $SURE$ مبتنی بر داده‌ها

$$R_۵=\frac{\sum_{t=۱}^{T}\sum_{i=۱}^{n}(Y_{it}-\hat{\mu}_t^{(SURE)})(Y_{i,t-۱}-\hat{\mu}_{t-۱}^{(SURE)})}{\sum_{t=۱}^{T}\left[\sum_{i=۱}^{n}(Y_{it}-\hat{\mu}_t^{(SURE)})^۲-A_{it}\right]_+}.$$

۶. برآورد همبستگی $SURE$ مبتنی بر برآوردهای انقباضی

$$R_6=\frac{\sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{n}(\hat{\theta}_{it}-\hat{\mu}_t^{(SURE)})(\hat{\theta}_{i,t-1}-\hat{\mu}_{t-1}^{(SURE)})}{\sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{n}(\hat{\theta}_{it}-\hat{\mu}_t^{(SURE)})^2}.$$

برای همبستگی‌های داده‌شده R_1، R_2، R_3، R_4، R_5 و R_6، و با استفاده از رابطه (۱۱) برآورد پارامتر همبستگی ψ متناظر برابر خواهد بود با

$$\hat{\psi}_j=\begin{cases}\frac{1-\sqrt{1-R_j^2}}{2R_j} & R_j\neq 0\\ 0 & R_j=0.\end{cases} \qquad (16)$$

۵ شبیه‌سازی و کاربرد

۱.۵ شبیه‌سازی

در این زیر بخش با یک مطالعه شبیه‌سازی‌شده عملکرد برآورد نااریب اشتاین را نسبت برآوردهای گشتاوری و ماکسیمم درستنمایی موردمطالعه قرار می‌دهیم. برای این منظور از ریسک متناظر هر برآورد کننده، $\lim_{n\to\infty}R(\theta,\hat{\theta})$ استفاده خواهیم کرد. در اینجا تعداد تکرار را برابر $M=10000$ و مطالعه شبیه‌سازی را برای دو حجم نمونه ۳۰ و ۱۵۰ تحت دو حالت زیر در نظر می‌گیریم

۱. حالت اول:

$$A_{it}\sim U(0.1,1),\quad z_{it}\sim N(0,0.5).$$

۲. حالت دوم:

$$A_{it}\sim U(0.1,1),$$
$$z_{it}\sim\frac{1}{2}I_{\{-0.5\}}(z_{it})+\frac{1}{2}I_{\{0.5\}}(z_{it}),$$

که در آن‌ها $I_A(x)$ تابع نشانگر است. همچنین مدل طولی-دینامیکی را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$Y_{it}\sim N(\theta_{it},A_{it}),$$
$$\theta_{it}\sim N(0,0.5),\qquad i=1,\cdots,n,\ t=1,2,3.$$
$$\theta_{it}=\psi z_{i,t-1}+z_{it},$$

شبیه‌سازی را با فرض دو مقدار ۰/۵ و ۰/۵− برای ψ انجام می‌دهیم. نتایج در جدول (۱) آمده است. به‌وضوح می‌توان مشاهده کرد که برآوردهای نااریب اشتاین نسبت به برآوردهای گشتاوری و ماکسیمم درستنمایی عملکرد بهتری دارند.

۲.۵ داده‌های عملکرد دانشجویان

داده‌های جدول (۲) لگاریتم نسبت بخت‌های دانشجویان ممتاز دختر به پسر است که همراه واریانس‌های آن‌ها در دو نیم سال تحصیلی متوالی در دانشگاه قم به‌دست‌آمده است. فرمول محاسباتی این اعداد به‌صورت زیر بود

$$Y_{it}=\log\frac{(n_{11}+0.5)(n_{22}+0.5)}{(n_{12}+0.5)(n_{21}+0.5)}$$
$$A_{it}=\frac{1}{n_{11}+0.5}+\frac{1}{n_{22}+0.5}+\frac{1}{n_{12}+0.5}+\frac{1}{n_{21}+0.5}$$

که برای $n=24$ رشته تحصیلی متفاوت و در دو نیمسال تحصیلی $T=2$ متوالی به‌دست‌آمده است. در اینجا هدف یافتن میزان همبستگی بین عملکرد دانشجویان دختر در مقایسه با دانشجویان پسر در دو نیمسال متوالی بود. با برازش مدل سلسله مراتبی طولی-دینامیکی ناهمگن (۸) نتایج تحلیل شامل برآورد ψ و انحراف استاندارد متناظر و همچنین برآورد ضریب همبستگی، □، در جدول زیر آمده است

روش	$\hat{\psi}$	$S.E.$	R
گشتاوری	۰/۸۱۷	۰/۰۹	۰/۴۹
ماکسیمم درستنمایی	۰/۷۲۳	۰/۰۷	۰/۴۷
$SURE$	۰/۶۶۷	۰/۰۵	۰/۴۶

نتایج به‌وضوح نشان می‌دهد که با در نظیر گرفتن این‌که برآوردهای اشتاین نااریب دارای برازش بهتری نسبت به روش گشتاوری و ماکسیمم درستنمایی هستند در نتیجه بین داده‌های دو نیمسال تحصیلی همبستگی به‌اندازه ۰/۶۶۷ وجود دارد.

مراجع

[1] Berger, J. and Strawderman, W. E. (1996). Choice of Hierarchical Priors:Admissibility in Estimation of Normal Means. *Ann. Statist.*, **24**, 931-951.

[2] Brown, L. D. and Greenshtein, E. (2009). Nonparametric Empirical Bayes and Compound Decision Approaches to Estimation of a High-Dimensional Vector of Means. *Ann. Statist.*, **37**, 1685-1704.

[3] Efron, B. and Morris, C. (1973). Stein's Estimation Rule and Its Competitors: An Empirical Bayes Approach. *J. Amer. Statist. Assoc.*, **68**, 117-130.

[4] Gelman, A. (2006). Prior distributions for variance parameters in hierarchical models. *Bayesian Analysis*, **1**, 515-533.

[5] Ghoreishi, S.K. (2017). Bayesian analysis of hierarchical heteroscedastic linear models using Dirichlet-Laplace priors. *Journal of Statistical Theory and Applications*, **16(1)**, 53-64.

[6] Ghoreishi, S.K. and Meshkani, M.R. (2014). On SURE estimators in hierarchical models assuming heteroscedasticity for both levels of a two-level normal hierarchical model. *J. of Multivariate Analysis*, **132**, 129-137.

[7] Ghoreishi, S.K. and Meshkani, M.R. (2015). Dynamic Bayesian analysis of generalized odds ratios assuming multivariate skew-normal distribution for the error terms in the system equation. *Statistical Methodology*, **27**, 1-11.

[8] Grish,K. and Chien, S. (2017). *Macrophage differentiation in normal and accelerated wound healing in Macrophages*, Springer Cham., 353-364.

[9] James, W. and Stein, C.M. (1961). Estimation With Quadratic Loss. *Proceedings of the 4th Berkeley Symposium on Probability and Statistics*, **I**, 367-379.

[10] Santia, V. and Ghoreishi, S.K. (2020). Empirical estimation for sparse double-heteroscedastic hierarchical normal models. *J. of Statistical Theory and Applications*, **19**, **2**, 148-161.

[11] Stein, C.M. (1962). Confidence Sets for the Mean of a Multivariate Normal Distribution (with discussion). *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B*, **24**, 265-296.

[12] Xie, X. , Kou, S. C., and Brown, L.D. (2012). SURE Estimates for a Heteroscedastic Hierarchical Model. *J. Amer. Statist. Assoc.*, **107**, 1465-1479.

جدول ۱: تابع مخاطره و برآورد ψ برای حالت‌های مختلف در شبیه‌سازی

			$\psi = -۰٫۵۰$		$\psi = ۰٫۵۰$	
تعداد	حالت	روش	$R(\theta,\hat{\theta})$	$\hat{\psi}$	$R(\theta,\hat{\theta})$	$\hat{\psi}$
$n=۳۰$	I	$R_۱$	۳٫۵۸۹۳	−۰٫۴۸۳۷	۳٫۵۸۶۱	۰٫۴۷۸۸
		$R_۲$	۳٫۵۰۵۲	−۰٫۵۱۴۴	۳٫۵۹۵۱	۰٫۵۲۱۰
		$R_۳$	۳٫۵۹۹۲	−۰٫۵۱۴۴	۳٫۶۰۲۶	۰٫۵۱۲۱
		$R_۴$	۳٫۶۰۳۵	−۰٫۵۱۹۴	۳٫۶۰۲۷	۰٫۵۱۴۶
		$R_۵$	۲٫۵۹۱۲	−۰٫۵۰۴۴	۲٫۶۰۲۶	۰٫۵۰۵۸
		$R_۶$	۲٫۶۴۳۰	−۰٫۵۰۶۴	۲٫۶۰۲۷	۰٫۵۰۴۶
	II	$R_۱$	۴٫۵۹۸۴	−۰٫۴۸۸۴	۴٫۶۱۲۰	۰٫۴۷۸۷
		$R_۲$	۴٫۶۰۲۳	−۰٫۵۲۳۸	۴٫۶۱۷۷	۰٫۴۸۸۳
		$R_۳$	۳٫۶۳۶۱	−۰٫۵۱۸۸	۳٫۶۱۹۷	۰٫۵۲۸۰
		$R_۴$	۳٫۶۲۹۲	−۰٫۵۲۳۳	۳٫۶۱۶۱	۰٫۵۲۵۲
		$R_۵$	۳٫۶۱۱۱	−۰٫۵۰۵۸	۳٫۶۱۹۷	۰٫۴۹۸۰
		$R_۶$	۳٫۶۰۹۲	−۰٫۵۰۵۳	۳٫۶۱۶۱	۰٫۴۹۵۲
$n=۱۵۰$	I	$R_۱$	۱٫۵۸۹۳	−۰٫۴۹۱۷	۱٫۶۲۶۱	۰٫۵۰۸۸
		$R_۲$	۱٫۵۹۵۲	−۰٫۴۹۰۴	۱٫۶۳۵۱	۰٫۵۰۹۰
		$R_۳$	۱٫۵۹۹۲	−۰٫۵۰۷۴	۱٫۶۱۲۶	۰٫۴۹۲۱
		$R_۴$	۱٫۶۱۱۵	−۰٫۵۰۸۴	۱٫۶۰۹۷	۰٫۴۹۴۶
		$R_۵$	۱٫۵۹۹۲	−۰٫۵۰۱۴	۱۶۰۲۶	۰٫۵۰۲۱
		$R_۶$	۱٫۶۰۵۵	−۰٫۵۰۱۷	۱٫۶۰۲۲	۱٫۵۰۱۶
	II	$R_۱$	۱٫۵۹۸۴	−۰٫۴۹۸۴	۱٫۷۱۲۰	۰٫۵۰۴۱
		$R_۲$	۱٫۵۹۲۳	−۰٫۵۰۳۸	۱٫۷۱۷۷	۰٫۵۰۵۰
		$R_۳$	۱٫۶۲۶۱	−۰٫۵۰۲۸	۱٫۷۱۹۷	۰٫۴۹۸۰
		$R_۴$	۱٫۶۳۹۲	−۰٫۵۰۳۳	۱٫۷۱۶۱	۰٫۴۹۸۵
		$R_۵$	۱٫۳۱۷۱	−۰٫۵۰۰۸	۱٫۵۱۹۷	۰٫۴۹۹۲
		$R_۶$	۱٫۳۱۹۲	−۰٫۵۰۱۳	۱٫۵۱۶۱	۰٫۴۹۹۱

جدول ۲: لگاریتم نسبت بخت‌های دانشجویان ممتاز دختر به پسر همراه با واریانس آن‌ها

	نیمسال اول		نیمسال دوم	
رشته تحصیلی	$Y_{i۱}$	$A_{i۱}$	$Y_{i۲}$	$A_{i۲}$
آمار	۰/۰۷۴	۰/۰۶۹	−۰/۲۲	۰/۰۵۳
حقوق	۱/۲۳۱	۰/۰۴۱	۰/۱۵۵	۰/۰۳۷
ریاضی	۱/۰۷۷	۰/۰۵۴	۰/۸۷۵	۰/۰۴۴
انگلیسی	−۰/۸۶۴	۰/۰۶۲	−۰/۱۹۲	۰/۰۳۱
عربی	−۰/۶۹۵	۰/۰۳۲	−۱/۶۲۲	۰/۰۴۸
فارسی	۰/۷۶۱	۰/۰۶	۰/۳۸۴	۰/۰۴۹
زیست‌شناسی	۰/۴۰۳	۰/۰۳۷	−۰/۰۸۸	۰/۰۶۶
شیمی	۰/۰۳	۰/۰۴۴	−۰/۱۷۳	۰/۰۵۴
علم اطلاعات و دانش شناسی	۰/۲۹۳	۰/۰۶۲	−۰/۱۰۴	۰/۰۶۳
علوم اقتصادی	−۰/۷۹۸	۰/۰۳۴	−۰/۲۷۵	۰/۰۴۸
علوم تربیتی	−۰/۸۶۹	۰/۰۴	−۰/۵۵۳	۰/۰۳۴
علوم قرآن	۰/۵۲۹	۰/۰۶۱	۰/۷۲۴	۰/۰۴۴
علوم کامپیوتر	۰/۰۸۸	۰/۰۵۸	−۰/۵۵۲	۰/۰۵۳
فقه	۰/۴۷۸	۰/۰۵۹	۰/۰۸۳	۰/۰۳۲
فلسفه	۰/۶۲۳	۰/۰۶۵	۰/۶۸۷	۰/۰۴۹
فیزیک	−۰/۵۰۱	۰/۰۴۶	−۰/۲۰۲	۰/۰۶۳
مدیریت بازرگانی	۱/۱۴۹	۰/۰۵۸	۱/۱۸۵	۰/۰۳۶
مدیریت صنعتی	−۰/۷۰۲	۰/۰۶۲	−۰/۰۵۱	۰/۰۴۷
معماری	−۰/۱۲۴	۰/۰۴۶	−۰/۶۰۲	۰/۰۵۳
برق	۲/۱۸۵	۰/۰۴۳	۱/۹۱۸	۰/۰۵۷
صنایع	۱/۵۸۴	۰/۰۳۶	۰/۵۸۴	۰/۰۴۷
عمران	−۰/۸۷۱	۰/۰۴۲	−۰/۳۹۳	۰/۰۴۷۴
کامپیوتر	۰/۱۵۳	۰/۰۶۱	−۰/۲۲۹	۰/۰۵۵
مکانیک	−۰/۵۸۲	۰/۰۵	۰/۲۷۷	۰/۰۶۵