عناصر تصادفی مشبکه‌ای وابسته

مهدی جعفری [۱]،حمیدرضا نیلی ثانی [۲]

تاریخ دریافت: ۹۹/۶/۷
تاریخ پذیرش: ۹۹/۱۲/۲۷

چکیده:

در مطالعات صورت گرفته جهت تبیین وابستگی در عناصر تصادفی، امکان وجود ترتیب بین آن‌ها کمتر موردتوجه قرارگرفته است. این مسئله مشکلاتی را در مسیر گسترش و کاربردی شدن عناصر تصادفی وابسته ایجاد نموده که استفاده از فضاهای مشبکه‌ای می‌تواند برخی از آن‌ها را کاهش دهد. به همین دلیل در مطالعه پیش رو ابتدا عناصر تصادفی مشبکه‌ای باناخ و برخی ویژگی‌های آن‌ها را معرفی کرده و سپس با استفاده از ترتیب تعریف‌شده در فضای مشبکه‌ای باناخ به معرفی و مشخصه سازی وابستگی منفی ترتیبی پرداخته‌ایم. در پایان برخی قواعد حدی را برای دنباله‌ای از عناصر تصادفی مشبکه‌ای باناخ مقدار وابسته منفی ترتیبی موردبررسی قرار داده و نتایج را با استفاده از عناصر تصادفی مشبکه‌ای شبیه‌سازی‌شده نشان داده‌ایم.

واژه‌های کلیدی: مجموعه مرتب، مشبکه‌ای برداری، نرم مشبکه‌ای، مشبکه‌ای باناخ، وابستگی منفی ترتیبی.

۱ مقدمه

با پیشرفت علم و فناوری، سرمایه‌گذاری‌های کلانی برای جمع‌آوری و ذخیره اطلاعات انجام و به‌واسطه آن، مخازن مختلفی برای داده‌ها طراحی‌شده است (صفحه گسترده، پایگاه داده، انبار داده و ...). با پیشرفت در علوم کامپیوتر، جمع‌آوری و سازمان‌دهی داده‌ها دیگر مسئله اصلی نبوده و با گذشت زمان، سازمان‌ها با سونامی داده‌هایی روبرو می‌شوند که باید آن‌ها را تجزیه‌وتحلیل کرده و به علوم سازنده تبدیل کنند. تحلیل اطلاعات شعب مختلف فروشگاه‌های زنجیره‌ای، بانک، معاملات مالی در بورس‌های اوراق بهادار، اطلاعات ردوبدل شده در شبکه‌های اجتماعی، فضاهای مخابراتی یا اینترنتی، اطلاعات روزانه دریافتی از تلسکوپ‌های فضایی و... تنها نمونه‌های از این قبیل مسائل هستند. به گفته [۷] " ما داریم در اطلاعات غرق می‌شویم اما همچنان تشنه علم هستیم ". در مطالعه این‌گونه داده‌ها که اخیراً موردتوجه محققین بسیاری قرارگرفته، سه مؤلفه مؤثر وجود دارد که عبارت‌اند از:

الف- حجم داده؛ داده‌ها ممکن است در یک یا چند ماتریس،تنسور، پایگاه داده، انبار داده با ابعاد بالا و ... ذخیره شوند، در این شرایط تجزیه‌وتحلیل زیرمجموعه‌های مختلف فضای موردبررسی ممکن است بسیار وقت‌گیر باشد.

ب- پراکندگی (تنوع) ویژگی‌ها در انبار داده؛ به‌طورکلی ویژگی‌ها در یک انبار داده می‌تواند ساختارهای مختلفی داشته باشد مانند بردار، شکل هندسی، تصویر، جمله، پیام ایمیل، سری زمانی، شکل مولکولی، نمودار و غیره.

ج- برخی از ویژگی‌های موردبررسی ممکن است دارای بعد نامتناهی باشند مانند یک فرآیند تصادفی، سری زمانی یا داده‌های جریانی. در این حالت، شرایط اندازه‌پذیری ممکن است معتبر نباشد.

مطالعه ویژگی‌های یک مخزن داده، فرآیند تصادفی، داده جریانی، پایگاه داده، انبار داده و ... به‌عنوان عناصر تصادفی در فضاهای تابعی (که ممکن است وابسته نیز باشند) می‌تواند به تجزیه‌وتحلیل چنین داده‌هایی کمک کند. بر اساس موارد ذکرشده، گسترش متغیرهای تصادفی به عناصر تصادفی که مقادیر خود را در یک فضای متریک به‌ویژه فضای باناخ می‌گیرند (عناصر تصادفی باناخ مقدار) و بررسی قوانین حدی برای آن‌ها که در مطالعات زیادی از جمله [۴، ۱۴، ۱] موردتوجه بوده است، یکی از مهم‌ترین شاخه‌ها در مسیر رشد علوم احتمال و آمار می‌باشد. معمولاً محققین با استفاده از نرم یا تابعک‌های خطی، عناصر تصادفی را به متغیرهای تصادفی تبدیل کرده و سپس در این فضای توپولوژیک ضعیف ایجادشده، به تعریف و بررسی برخی ویژگی‌های عناصر تصادفی می‌پردازند

در فضاهای برداری از جمله فضاهای باناخ، به‌جای اعداد، بردارها موضوع مطالعه می‌باشند. به این دلیل عناصر تصادفی در فضاهای متریک دارای اهمیت فراوان بوده و گسترش آن‌ها از جمله مطالبات سایر رشته‌ها از متخصصین آمار

[۱] گروه آمار دانشگاه بیرجند
[۲] گروه آمار دانشگاه بیرجند (نویسنده مسئول)، hnilisani@birjand.ac.ir

و احتمال می‌باشد. با این وجود ساختار فضاهای باناخ و پیچیدگی محاسبات در این فضا موجب گردید که گسترش مفاهیم و نتایج مرتبط با عناصر تصادفی (مخصوصاً عناصر تصادفی وابسته) در این فضاها به‌کندی صورت پذیرد و تعداد محدودی مطالعه مانند [۹] و [۱۲] در این زمینه موجود باشد. به همین دلیل در پاره‌ای موارد محققین به‌منظور بسط نتایج، برخی شرایط اضافی را برای این فضاها در نظر می‌گیرند.

بنابراین با در نظر گرفتن یک ترتیب در فضاهای متریک و استفاده از فضاهای مشبکه‌ای به‌جای آن‌ها امید است با کاهش دشواری و پیچیدگی‌های محاسبات، امکان استفاده از مفاهیم مرتبط با عناصر تصادفی در مسائل کاربردی نیز بیش‌ازپیش فراهم شود.

در ادامه پس از بیان تعاریف مقدماتی در خصوص فضاهای متریک مرتب و مفاهیم مرتبط با آن، ضمن معرفی عناصر تصادفی مشبکه‌ای باناخ و عناصر تصادفی مشبکه‌ای باناخ وابسته منفی ترتیبی، به مشخصه سازی آن‌ها خواهیم پرداخت.

۲ کلیات

تعریف ۱.۲. یک فضای برداری (یا فضای خطی) روی میدان F (F می‌تواند مجموعه اعداد حقیقی یا مختلط باشد و به عناصرش اسکالر می‌گویند)، عبارت است از یک مجموعه ناتهی X (که به عناصرش بردار می‌گویند) همراه با دو نگاشت $+$ (موسوم به جمع برداری) : $\begin{cases} X\times X\to X \\ (x,y)\to x+y \end{cases}$ و $.$ (موسوم به ضرب اسکالر) : $\begin{cases} F\times X\to X \\ (\alpha,x)\to \alpha.x \end{cases}$ که برای مقادیر اسکالر $a,b,c\in F$ و بردارهای $x,y,z\in X$ در شرایط زیر صدق کنند:

- $x+y=y+x$، $x+(y+z)=(x+y)+z$.
- عضوی مانند 0 در X وجود دارد به‌گونه‌ای که برای هر مقدار $x\in X$، $x+0=x$. این عضو را صفر برداری می‌نامیم. همچنین برای هر بردار $x\in X$، بردار منحصربه‌فرد $-x\in X$ موجوداست به‌گونه‌ای که $x+(-x)=0$. به این عنصر قرینه بردار x میگوییم.
- $a.(x+y)=a.x+a.y$، $(a+b).x=a.x+b.y$، $a.(b.X)=(ab).x$.
- عضوی مانند ۱ در X وجود دارد به‌گونه‌ای که برای هر مقدار $x\in X$، $1.x=x$.

تعریف ۲.۲. فرض کنید X یک فضای برداری روی میدان F باشد، نگاشت $\|.\|:\begin{cases} X\to F \\ x\to \|x\| \end{cases}$ را نرم روی X می‌نامیم هرگاه برای هر $x,y\in X$ و $a\in F$ داشته باشیم:

- $\|x\|\geq 0$، $\|x\|=0\Leftrightarrow x=0$، $\|\alpha x\|=|\alpha|\,\|x\|$،
- $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$.

فضای برداری X همراه با نگاشت $\|.\|$ را یک فضای نرم دار نامیده و آن را با نماد $(X,\|.\|)$ یا به‌اختصار همان X نشان می‌دهیم.

دنباله $\{x_n, n\geq 1\}$ در فضای برداری نرمدار X را کوشی نامیم هرگاه برای هر مقدار دلخواه $\varepsilon>0$، یک عدد طبیعی مانند N موجود باشد به‌گونه‌ای که برای هر $n,m\geq N$، $\|x_m-x_n\|<\varepsilon$.

تعریف ۳.۲. فضای برداری نرم دار $(X,\|.\|)$ را کامل گوییم هرگاه هر دنباله کوشی در این فضا به عنصری در همان فضا همگرا باشد.

تعریف ۴.۲. هر فضای برداری نرم دار کامل را فضای باناخ می‌نامیم. فضای باناخ را تفکیک‌پذیر[3] گوییم اگر شامل حداقل یک زیرمجموعه شمارش پذیر چگال باشد.

تعریف ۵.۲. اگر (Ω,Λ,P) یک فضای احتمال و $(X,\|.\|)$ یک فضای باناخ باشد، هر تابع اندازه‌پذیر برل $V:\Omega\to X$ را یک عنصر تصادفی[4] می‌نامیم.

تعریف ۶.۲. مجموعه ناتهی M با رابطه $\preccurlyeq$ را یک مجموعه مرتب[5] گوییم هرگاه برای هر $x,y,z\in M$ داشته باشیم:

- $x\leq x$،
- اگر $x\leq y$ و $y\leq x$ آنگاه $x=y$،
- اگر $x\leq y$ و $y\leq z$ آنگاه $x\leq z$.

تعریف ۷.۲. فضای برداری E روی میدان اعداد حقیقی (R) با رابطه ترتیب $\leq$ را یک فضای مشبکه‌ای برداری[6] نامیم هرگاه برای هر دو عنصر $x,y\in E$، مقادیر $x\vee y=\sup(x,y)$ و $x\wedge y=\inf(x,y)$ در E موجود بوده و برای $x,y,z\in E$ و $t\in R^{+}$ داشته باشیم:

- اگر $x\leq y$ آنگاه $x+z\leq y+z$،
- اگر $x\leq 0$ آنگاه $0\leq tx$.

تذکر ۸.۲. برای هر دو عنصر $x,y\in E$، $x<y$ اگر و تنها اگر $x\leq y$ اما $x\not\leq y$.

[3] Separable
[4] element Random
[5] interval Order
[6] lattice Vector

اگر E یک مشبکه‌ای برداری باشد آنگاه $E^+=\{x\in E; \circ\leq x\}$ را مخروط مثبت E می‌گوییم و برای هر $x\in E$ تعریف می‌کنیم $|x|=x^+\vee x^-$، $x^+=x\vee\circ$ و $x^-=(-x)\vee\circ$

برای مشبکه‌ای برداری E، ویژگی‌های زیر قابل‌اثبات می‌باشند که برای جزئیات بیشتر می‌توان به نتایج II.۱.۱و II.۲.۱ از [۱۱] یا قضیه ۱.۱.۱ از [۶] مراجعه نمود.

لم ۹.۲. اگر E یک مشبکه‌ای برداری باشد، برای هر $x,y,z\in E$ و $a\in R$ داریم:

۱- $x+y=(x\vee y)+(x\wedge y)$,$x\vee y=-((-x)\wedge(-y))$،

۲- $(x\vee y)+z=(x+z)\vee(y+z)$,

$(x\wedge y)+z=(x+z)\wedge(y+z)$،

۳- $x=x^+-x^-$،

۴- $|x|=x^++x^-,\ |ax|=|a|\,|x|\,,||x||=||x||$،

۵- $|x-y|=(x\vee y)-(x\wedge y), |x+y|\leq|x|+|y|$،

۶- اگر $x\leq y$ آنگاه $x^+\leq y^+$ و $y^-\leq x^-$.

تعریف ۱۰.۲. نرم $||.||$ روی مشبکه‌ای برداری E را نرم مشبکه‌ای می‌گویند هرگاه برای هر $x,y\in E$، $|x|\leq|y|$ نتیجه دهد $||x||\leq||y||$.

تعریف ۱۱.۲. اگر $(E,||.||)$ یک فضای باناخ حقیقی (یک فضای برداری کامل نرم دار) و $\leq$ یک رابطه ترتیب روی آن باشد، به $(E,\leq)$ یک مشبکه‌ای باناخ می‌گوییم. در این حالت $||.||$، نرم مشبکه‌ای می‌باشد.

تعریف ۱۲.۲. تابع h از مشبکه‌ای باناخ $(E,\leq)$ به مشبکه‌ای باناخ $(G,\leq)$ را صعودی (<u>نزولی</u>) نامیم هرگاه، برای هر دو مقدار $x,y\in E$ که $x\leq y$، داشته باشیم $h(x)\leq h(y)$ ($\underline{h(y)\leq h(x)}$).

در روابط فوق اگر به‌جای $\leq$ از $<$ استفاده شود تابع اکیداً صعودی و اکیداً نزولی حاصل می‌شوند.

مثال ۱۳.۲. در این قسمت به بیان چند نمونه از مشبکه‌ای‌های برداری می‌پردازیم تا ضمن به دست آوردن یک دیدگاه شهودی، کاربرد گسترده آن‌ها را نیز یادآور شویم:

الف- می‌دانیم $(R,\leq)$ (مجموعه اعداد حقیقی به همراه عمل کوچک‌تری) یک مشبکه‌ای باناخ می‌باشد. برای یک مقدار متناهی و مثبت m، R^m را در نظر گرفته و ترتیب متعارف $\leq$ را برای هر دو مقدار $x,y\in R^m$ به این‌گونه تعریف می‌کنیم که $x\leq y$ اگر و تنها اگر برای هر مقدار $i=1,\dots,m$، $x(i)\leq y(i)$ که در آن $x(i)$ نشان‌دهنده عنصر درایه iام x می‌باشد. با در نظر گرفتن این نوع ترتیب واضح است که $(R^m,\leq)$ یک مشبکه‌ای باناخ می‌باشد.

ب- فرض کنید f^m، مجموعه تمام توابع $f:R^m\rightarrow R$ باشد و مجدد ترتیب متعارف $\leq$ را برای توابع $f,g\in f^m$ به این صورت تعریف کنیم که $f\leq g$، اگر و تنها اگر برای هر مقدار $t\in R^m$ $f(t)\leq g(t)$. در این حالت نیز واضح است که $(f^m,\leq)$ یک مشبکه‌ای برداری می‌باشد.

مثال‌های بیان‌شده، که ظاهری تئوری دارند در واقع حالت کلی تعداد زیادی از پدیده‌های طبیعی می‌باشند که ممکن است به‌دفعات مورداستفاده ما بوده‌اند. به‌عنوان‌مثال اگر ما با یک پرسشنامه پنج سؤالی بخواهیم دیدگاه افراد در خصوص موضوعی را بسنجیم، پاسخ‌ها در حالت اولیه مقادیری در R^5 می‌باشند و حال اگر از میانگین وزنی پاسخ‌ها استفاده کنیم در واقع با یک تابع، مقادیر را از R^5 به R منتقل کرده‌ایم. از این دست مثال‌ها به فراوانی در زندگی روزمره افراد یافت می‌شود. در ادامه یک نمونه دیگر از مشبکه‌ای‌های باناخ را که داری ابعاد بیشتر و متنوع‌تری می‌باشد، بیان می‌کنیم.

مثال ۱۴.۲. شعب مختلف یک بانک اطلاعات مشتریان خود را (آخرین موجودی حساب‌های مختلف، میزان گردش مالی روزانه، مکان و زمان انجام گردش‌ها، جنسیت مشتری، مدرک تحصیلی و ...) در یک آرایه m بعدی ذخیره می‌نمایند. کاملاً مشخص است که این آرایه دارای ابعاد با طول‌های نابرابر بوده و اطلاعات درون هر بعد، دارای مقیاس‌های اندازه‌گیری گوناگون (از مقیاس اسمی تا نسبتی) می‌باشد. می‌دانیم آخرین موجودی حساب‌های مختلف در بعد اول آرایه ذخیره می‌شود و بر اساس تعداد حساب‌های مشتری می‌تواند دارای طولی بزرگ‌تر مساوی یک باشد. برای مدیریت بانک، مجموع آخرین موجودی مشتری بسیار مهم بوده و لذا مجموع عناصر روی بعد اول، ملاک مقایسه این آرایه‌ها خواهد بود.

در ادامه مثال، فرض می‌کنیم E فضای برداری شامل تمام آرایه‌های متناهی بعد و نامتناهی بعد بوده که جمع برداری و ضرب اسکالر به‌صورت مناسبی برای آن‌ها تعریف شود (مثلاً جمع و ضرب معمولی به همراه نرم اقلیدسی). اگر $A,B\in E$ و $S_i(A)$ نشان‌دهنده مجموع عناصر بعد i'ام A باشد، رابطه $\leq$ روی این فضا را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$A\leq B\Leftrightarrow S_1(A)\leq S_1(B).$$

با توجه به موارد ذکرشده، $(E,\leq)$ را می‌توان به‌عنوان یک نمونه از مشبکه‌ای برداری در نظر گرفت.

۳ عناصر تصادفی مشبکه‌ای

تعریف ۱.۳. اگر (Ω,Λ,P) یک فضای احتمال و $(E,\leq)$ یک مشبکه‌ای باناخ باشد، هر تابع اندازه‌پذیر برل $V:\Omega\to E$ را یک عنصر تصادفی مشبکه‌ای می‌نامیم.

لم ۲.۳. اگر V یک عنصر تصادفی مشبکه‌ای و T یک تابع اندازه‌پذیر برل از $(E,\leq)$ به مشبکه‌ای باناخ $(G,\leq)$ باشد، آنگاه $T(V)\equiv ToV$، یک عنصر تصادفی مشبکه‌ای روی $(G,\leq)$ می‌باشد.

اثبات. فرض کنید سیگما فیلدهای برل E و G به ترتیب با $B(E)$ و $B(G)$ نمایش داده شود و $\beta\in B(G)$. چون T یک تابع اندازه‌پذیر برل می‌باشد پس $T^{-1}(\beta)\in B(E)$. حال داریم،

$$(ToV)^{-1}(\beta)=V^{-1}\left(T^{-1}(\beta)\right)\in\Lambda.$$

پس $T(V)\equiv ToV$ یک تابع اندازه‌پذیر از Ω به G می‌باشد و اثبات کامل می‌شود. □

نتیجه ۳.۳. اگر V یک عنصر تصادفی مشبکه‌ای و $\|.\|$ نرم فضای باناخ E باشد آنگاه $\|V\|$، یک متغیر تصادفی می‌باشد.

گزارهٔ ۴.۳. اگر تابع h یک تابع صعودی (نزولی) از مشبکه‌ای باناخ $(E,\leq)$ به مشبکه‌ای باناخ $(G,\leq)$ و V یک عنصر تصادفی مشبکه‌ای روی مشبکه‌ای باناخ $(E,\leq)$، $y\in G$ و $h^{-1}(y)=\sup\{v\in E;h(v)\leq y\}$ ($h^{-1}(y)=\inf\{v\in E;h(v)\leq y\}$) باشد، آنگاه $P(h(V)\leq y)=P(V\leq h^{-1}(y))$.

اثبات.

$$P(h(V)\leq y)=P\{\omega\in\Omega;h(V(\omega))\leq y\}=$$
$$P\left\{\omega\in\Omega;V(\omega)\leq h^{-1}(y)\right\}=P(V\leq h^{-1}(y)).$$

□

لم ۵.۳. اگر $\{V_n,n\geq 1\}$ یک دنباله از عناصر تصادفی مشبکه‌ای روی مشبکه‌ای باناخ $(E,\leq)$ باشد به گونه‌ای که برای هر $\omega\in\Omega$، $V_n(\omega)\to V(\omega)$ ($\|V_n(\omega)-V(\omega)\|\to 0$) آنگاه V یک عنصر تصادفی مشبکه‌ای روی مشبکه‌ای باناخ $(E,\leq)$ می‌باشد.

اثبات. کافی است نشان دهیم برای هر مجموعه بسته $C\in E$، $V^{-1}(C)\in\Lambda$. برای هر عدد صحیح و مثبت k، $C_k=\bigcup_{x\in C}\left\{y\in E;\|x-y\|<\frac{1}{k}\right\}$ را در نظر می‌گیریم. واضح است که C_k یک مجموعه باز است و داریم

$$V^{-1}(C)=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty}V_m^{1}(C_k). \qquad (۱)$$

ازآنجاکه برای هر m، V_m یک عنصر تصادفی مشبکه‌ای روی مشبکه‌ای باناخ $(E,\leq)$ می‌باشد و C_k نیز مجموعه‌ای باز، بنابراین $V_m^{-1}(C_k)\in\Lambda$ و در نتیجه با توجه به (۱)، $V^{-1}(C)\in\Lambda$. □

لم ۶.۳. اگر V یک عنصر تصادفی مشبکه‌ای روی مشبکه‌ای باناخ $(E,\leq)$ و A یک متغیر تصادفی باشد آنگاه AV یک عنصر تصادفی مشبکه‌ای روی مشبکه‌ای باناخ $(E,\leq)$ می‌باشد.

اثبات. فرض کنید $\{A_n,n\geq 1\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی شمارا مقدار می‌باشد که به‌صورت نقطه‌به‌نقطه به A همگرا هستند یعنی برای هر $\omega\in\Omega$، $A_n(\omega)\to A(\omega)$ با توجه به پیوسته بودن ضرب اسکالر در فضای باناخ، برای هر مقدار $n\geq 1$، A_nV یک عنصر تصادفی مشبکه‌ای روی مشبکه‌ای باناخ $(E,\leq)$ می‌باشد. بنابراین A_nV به‌صورت نقطه‌به‌نقطه به AV همگرا می‌باشد و طبق لم ۵.۳، AV یک عنصر تصادفی مشبکه‌ای روی مشبکه‌ای باناخ $(E,\leq)$ می‌باشد. □

۴ عناصر تصادفی مشبکه‌ای وابسته

در این بخش به دنبال تعریف عناصر تصادفی مشبکه‌ای وابسته هستیم. همان‌طور که می‌دانیم، دو متغیر تصادفی X,Y را وابسته منفی می‌گوییم هرگاه برای هر دو مقدار دلخواه $x,y\in R$ داشته باشیم:

$$P(X\leq x,Y\leq y)\leq P(X\leq x)P(Y\leq y).$$

تعریف وابستگی منفی با الگوی فوق نیازمند وجود ترتیب در فضای موردبررسی است، بنابراین، در خانواده عناصر تصادفی باناخ مقدار کارایی نداشته و می‌بایست به شیوه دیگری عمل کنیم. [۱۲، ۹، ۲] از وابستگی منفی ضعیف برای عناصر تصادفی باناخ مقدار استفاده کردند که به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

تعریف ۱.۴. دو عنصر تصادفی باناخ مقدار V_1 و V_2 روی فضای باناخ $(B,\|.\|)$ را (بدون در نظر گرفتن ترتیب) وابسته منفی ضعیف گوییم و با نماد WND نمایش می‌دهیم هرگاه برای هر تابعک خطی $f\in B^*$ (B^* دوگان فضای باناخ B می‌باشد)، دو متغیر تصادفی $f(V_1)$ و $f(V_2)$ وابسته منفی باشند یعنی برای هر دو مقدار دلخواه $x,y\in R$ داشته باشیم:

$$P(f(V_1)\leq x,f(V_2)\leq y)\leq P(f(V_1)\leq x)P(f(V_2)\leq y).$$

اما ازآنجاکه در مشبکه‌ای باناخ، ترتیب تعریف می‌شود، می‌توان برای عناصر تصادفی مشبکه‌ای تعریف وابستگی منفی ترتیبی را به‌صورت زیر بیان نمود.

تعریف ۲.۴. دو عنصر تصادفی مشبکه‌ای V_1 و V_2 روی مشبکه‌ای باناخ $(E,\le)$ را وابسته منفی ترتیبی گوییم و با نماد OND نمایش می‌دهیم هرگاه برای هر دو مقدار $v_1,v_2\in E$ داشته باشیم:

$$P(V_1\le v_1,V_2\le v_2)\le P(V_1\le v_1)P(V_2\le v_2).$$

همچنین دو عنصر تصادفی مشبکه‌ای V_1 و V_2 روی مشبکه‌ای باناخ $(E,\le)$ را وابسته مثبت ترتیبی گوییم و با نماد OPD نمایش می‌دهیم هرگاه برای هر دو مقدار $v_1,v_2\in E$ داشته باشیم:

$$P(V_1\le v_1,V_2\le v_2)\ge P(V_1\le v_1)P(V_2\le v_2).$$

تذکر ۳.۴. با استفاده از این نوع تعریف برای وابستگی در مشبکه‌ای‌های باناخ، قادر خواهیم بود انواع دیگر وابستگی‌ها (مانند عناصر تصادفی مشبکه‌ای به‌طور مجانبی دوبه‌دو وابسته منفی $OAPND$ بر پایه [۸]) را نیز تعریف نماییم.

قضیهٔ ۴.۴. فرض کنید فضای باناخ $(B,\|.\|)$ به همراه ترتیب $\le$ تشکیل یک مشبکه‌ای باناخ بدهد. اگر دو عنصر تصادفی مشبکه‌ای V_1 و V_2 در این فضا WND باشند آنگاه OND نیز می‌باشند.

اثبات. دو مقدار دلخواه $v_1,v_2\in E$ و تابعک اکیداً صعودی $f\in B^*$ را در نظر می‌گیریم. داریم:

$$\begin{aligned}P(V_1\le v_1,V_2\le v_2)&=P(f(V_1)\le f(v_1),f(V_2)\le f(v_2))\\&\le P(f(V_1)\le f(v_1))P(f(V_2)\le f(v_2))\\&\le P(V_1\le v_1)P(V_2\le v_2).\end{aligned}$$

□

لم ۵.۴. اگر V_1 و V_2 دو عنصر تصادفی مشبکه‌ای OND روی مشبکه‌ای باناخ $(E,\le)$ و r و s دو تابع صعودی (نزولی) از $(E,\le)$ به مشبکه‌ای باناخ $(G,\le)$ باشند، آنگاه $r(V_1)$ و $s(V_2)$ دو عنصر تصادفی مشبکه‌ای OND روی G می‌باشند.

اثبات. بر اساس لم ۲.۳، $r(V_1)$ و $s(V_2)$ دو عنصر تصادفی مشبکه‌ای روی $(G,\le)$ می‌باشند. دو مقدار دلخواه $y_1,y_2\in G$ را در نظر می‌گیریم. بر اساس گزاره ۴.۳ داریم:

$$\begin{aligned}P(r(V_1)\le y_1,s(V_2)\le y_2)&=P(V_1\le r^{-1}(y_1),V_2\le s^{-1}(y_2))\\&\le P(V_1\le r^{-1}(y_1)P(V_2\le s^{-1}(y_2))\\&=P(r(V_1)\le y_1)P(s(V_2)\le y_2).\end{aligned}$$

□

لم ۶.۴. در تعریف ۲.۴، می‌توان یک یا هر دو نامساوی $V_1\le v_1$، $V_2\le v_2$ را با $V_1<v_1$، $V_2<v_2$ جایگزین نمود.

اثبات. فرض کنید α_n یک دنباله نزولی در مشبکه‌ای باناخ E باشد به‌گونه‌ای که $\alpha_n\downarrow 0$. حال با عبور حد از احتمال داریم

$$\begin{aligned}P(V_1\le v_1)&=\lim_{n\to\infty}P(V_1<v_1+\alpha_n)\\&=\lim_{n\to\infty}P(\lim_{n\to\infty}\{V_1<v_1+\alpha_n\})\\&=P(V_1<v_1)\end{aligned}$$

□

لم ۷.۴. نامساوی مورداستفاده در تعریف ۲.۴ را می‌توان با هرکدام از نامساوی‌های زیر جایگزین نمود:

۱- $P(V_1\le v_1,v_2\le V_2)\ge P(V_1\le v_1)P(v_2\le V_2)$،

۲- $P(v_1\le V_1,V_2\le v_2)\ge P(v_1\le V_1)P(V_2\le v_2)$،

۳- $P(v_1\le V_1,v_2\le V_2)\le P(v_1\le V_1)P(v_2\le V_2)$.

اثبات. با توجه به شباهت اثبات با تکنیک به‌کاررفته در لم۱ از [۵] از آوردن اثبات خودداری می‌کنیم □

لم ۸.۴. اگر V_1 و V_2 دو عنصر تصادفی مشبکه‌ای OND روی مشبکه‌ای باناخ $(E,\le)$ باشند آنگاه:

الف- V_1 و $-V_1$ دو عنصر تصادفی مشبکه‌ای OND روی مشبکه‌ای باناخ $(E,\le)$ می‌باشند.

ب- V_1 و $-V_2$ دو عنصر تصادفی مشبکه‌ای OPD روی مشبکه‌ای باناخ $(E,\le)$ می‌باشند.

اثبات. برای هر دو مقدار دلخواه $v_1,v_2\in E$ داریم:

$$\begin{aligned}P(V_1\le v_1,-V_1\le v_2)&=P(V_1\le v_1,-v_2\le V_1)\\&=P(-v_2\le V_1\le v_1)\\&\le P(V_1\le v_1)P(-V_1\le v_2)\end{aligned}$$

همچنین بر اساس لم ۷.۴ داریم:

$$\begin{aligned}P(V_1\le v_1,-V_2\le v_2)&=P(V_1\le v_1,-v_2\le V_2)\\&\ge P(V_1\le v_1)P(-v_2\le V_2)\\&=P(V_1\le v_1)P(-V_2\le v_2).\end{aligned}$$

□

لم ۹.۴. اگر $\|.\|$، نرم مشبکه‌ای روی مشبکه‌ای برداری E و E^+ و E^- مخروط‌های مثبت و منفی باشند، آنگاه $\|.\|:E^+\to R^+$ و $\|.\|:E^-\to R^+$ توابعی صعودی می‌باشند.

اثبات. با توجه به یکسان بودن اثبات به بررسی یک مورد اکتفا می‌کنیم. فرض کنید $v_1^+,v_2^+\in E^+$ به‌گونه‌ای که $v_1^+\le v_2^+$، لذا $|v_1^+|\le|v_2^+|$ و با توجه به تعریف نرم مشبکه‌ای $\|v_1^+\|\le\|v_2^+\|$. □

نتیجه ۱۰.۴. با توجه به لم‌های ۷.۴ و۸.۴ اگر V_1 و V_2 دو عنصر تصادفی مشبکه‌ای OND روی مشبکه‌ای باناخ $(E,\le)$ باشند آنگاه،

الف- ($V_۱^+$ و $V_۲^+$) و ($V_۱^-$ و $V_۲^-$)، دو عنصر تصادفی مشبکه‌ای OND روی E^+ می‌باشند.

ب- ($\|V_۱^+\|$ و $\|V_۲^+\|$) و ($\|V_۱^-\|$ و $\|V_۲^-\|$)، دو عنصر تصادفی مشبکه‌ای OND روی R^+ (دو متغیر تصادفی مثبت مقدار وابسته منفی) می‌باشند.

لم ۱۱.۴. اگر $V_۱$ و $V_۲$ دو عنصر تصادفی مشبکه‌ای OND روی مشبکه‌ای باناخ $(E,\leq)$ باشند آنگاه $V_۱^+$ و $V_۲^-$ دو عنصر تصادفی مشبکه‌ای OPD روی E^+ می‌باشند.

اثبات. برای هر دو مقدار دلخواه $v_۱,v_۲ \in E^+$ و با توجه به لم ۷.۴ داریم:

$$\begin{aligned} P(V_۱^+ \leq v_۱, V_۲^- \leq v_۲) &= P(V_۱ \leq v_۱, -v_۲ \leq V_۲) \\ &\geq P(V_۱ \leq v_۱)P(-v_۲ \leq V_۲) \\ &= P(V_۱ \leq v_۱)P(-V_۲ \leq v_۲) \\ &= P(V_۱^+ \leq v_۱)P(V_۲^- \leq v_۲). \end{aligned}$$

□

نتیجه ۱۲.۴. با استفاده از لم‌های ۸.۴ و ۱۱.۴، اگر $V_۱$ و $V_۲$ دو عنصر تصادفی مشبکه‌ای OND روی مشبکه‌ای باناخ $(E,\leq)$ باشند آنگاه $V_۱^+$ و $-V_۲^-$ دو عنصر تصادفی مشبکه‌ای OND روی مشبکه‌ای باناخ $(E,\leq)$ می‌باشند.

قضیهٔ ۱۳.۴. اگر $V_۱$ و $V_۲$ دو عنصر تصادفی مشبکه‌ای OND روی مشبکه‌ای باناخ $(E,\leq)$ باشند آنگاه

الف- $E\|V_۱^+\|\|V_۲^+\| \leq E\|V_۱^+\|E\|V_۲^+\|$ و $E\|V_۱^-\|\|V_۲^-\| \leq E\|V_۱^-\|E\|V_۲^-\|$

ب- $E\|V_۱^+\|\|V_۲^-\| \geq E\|V_۱^+\|E\|V_۲^-\|$.

اثبات. با توجه به یکسان بودن شیوه اثبات، به بررسی یک مورد اکتفا می‌کنیم. ازآنجاکه برای متغیرهای تصادفی مثبت داریم: $EXY = \int_۰^\infty\int_۰^\infty P(X \geq x, Y \geq y)dxdy,$ و با توجه به نتیجه۴.۱۰ داریم

$$\begin{aligned} E\|V_۱^+\|\|V_۲^-\| &= \int_۰^\infty\int_۰^\infty P(\|V_۱^+\| \geq x, \|V_۲^-\| \geq y)dxdy \\ &\leq \int_۰^\infty\int_۰^\infty P(\|V_۱^+\| \geq x)P(\|V_۲^-\| \geq y)dxdy \\ &= E\|V_۱^+\|E\|V_۲^-\|. \end{aligned}$$

□

نتیجه ۱۴.۴. اگر $V_۱$ و $V_۲$ دو عنصر تصادفی مشبکه‌ای OND روی مشبکه‌ای باناخ $(E,\leq)$ باشند آنگاه $(\|V_۱^+\|,\|V_۲^+\|)$ و $(\|V_۱^-\|,\|V_۲^-\|)$ دو متغیر تصادفی دارای همبستگی خطی منفی می‌باشند.

نتیجه ۱۵.۴. نتایج مشابهی برای عناصر تصادفی مشبکه‌ای OPD روی مشبکه‌ای باناخ $(E,\leq)$ برقرار می‌باشد.

۵ قوانین حدی

تعریف ۱.۵. دنباله $\{x_n; n \geq ۱\}$ در مشبکه‌ای باناخ $(E,\leq)$ را به عنصر $x \in E$ همگرا در ترتیب نامیم و با نماد $x_n \overset{o}{\to} x$ نمایش می‌دهیم هرگاه دنباله‌ای نزولی مانند $\{\alpha_n; n \geq ۱\}$ در $(E,\leq)$ و یک مقدار $N_۰ \in N$ وجود داشته باشد به‌گونه‌ای که $\alpha_n \downarrow ۰$ و برای $n \geq N_۰$ داشته باشیم $|x_n - x| \leq \alpha_n$.

تعریف ۲.۵. دنباله $\{x_n; n \geq ۱\}$ در فضای باناخ $(B,\|.\|)$ را به عنصر $x \in B$ همگرای قوی (ضعیف) گوییم هرگاه $\|x_n - x\| \overset{n\to\infty}{\to} ۰$ (برای هر تابعک خطی $f \in B^*$، $|f(x_n - x)| \overset{n\to\infty}{\to} ۰$).

لم ۳.۵. فرض کنید $\{x_n\}$ یک دنباله روی مشبکه‌ای باناخ $(E,\leq)$ و $x \in E$ باشد. اگر $x_n \overset{o}{\to} x$، آنگاه $\|x_n - x\| \overset{n\to\infty}{\to} ۰$ و برای هر تابعک خطی $f \in B^*$، $|f(x_n - x)| \overset{n\to\infty}{\to} ۰$.

اثبات. بنا به تعریف ۱.۵ دنباله مناسب $\{\alpha_n; n \geq ۱\}$ در $(E,\leq)$ و یک مقدار $N_۰ \in N$ وجود دارد به‌گونه‌ای که $|x_n - x| \leq \alpha_n$. لذا بنا به ویژگی‌های نرم مشبکه‌ای $\|x_n - x\| \leq \|\alpha_n\| \overset{n\to\infty}{\to} ۰$. حال بر اساس [۱۰] می‌دانیم در فضای باناخ همگرایی قوی، همگرایی ضعیف را نتیجه می‌دهد و لذا اثبات کامل می‌شود. □

تعریف ۴.۵. دنباله $\{V_n; n \geq ۱\}$ از عناصر تصادفی مشبکه‌ای در مشبکه‌ای باناخ $(E,\leq)$ را وابسته منفی ترتیبی نامیم هرگاه برای هر تعداد متناهی $V_۱,\dots,V_k$ و عناصر دلخواه $v_۱,\dots,v_k \in E$ داشته باشیم

- $P(V_۱ \leq v_۱,\dots,V_k \leq v_k) \leq \prod_{i=۱}^{k} P(V_i \leq v_i)$

و

- $P(v_۱ \leq V_۱,\dots,v_k \leq V_k) \leq \prod_{i=۱}^{k} P(v_i \leq V_i)$.

تذکر ۵.۵. [۱۳] در مثالی نشان داده که ممکن است مجموع دو عنصر تصادفی باناخ مقدار، خود یک عنصر تصادفی باناخ مقدار نباشد مگر اینکه از فضای باناخ تفکیک‌پذیر استفاده کنیم. ازآنجاکه عناصر تصادفی مشبکه‌ای، حالت خاصی از عناصر تصادفی باناخ مقدار می‌باشند لذا هر زمان که بخواهیم در خصوص مجموع آن‌ها بحث کنیم، بهتر است از فضای باناخ تفکیک‌پذیر استفاده نماییم تا مطمئن باشیم که مجموع آن‌ها خود یک عنصر تصادفی مشبکه‌ای است.

گزارهٔ ۶.۵. فرض کنید $(E,\leq)$ یک مشبکه‌ای باناخ تفکیک‌پذیر، V یک عنصر تصادفی مشبکه‌ای روی آن و مجموعه شمارش پذیر $\{\dots,x_{-۲},x_{-۱},x_۰,x_۱,x_۲,\dots\}$ در آن چگال باشد به‌گونه‌ای که برای هر مقدار i، $x_i \leq x_{i+۱}$ برای هر مقدار دلخواه $\lambda \geq ۰$، $N_\lambda(x_i) = \{y \in E; y \leq$

$x_i, \|x_i-y\|\le\lambda\}$ و $B_\lambda(x_i)=N_\lambda(x_i)-\bigcup_{j=-\infty}^{i-1}N_\lambda(x_j)$ را در نظر بگیریم.
فرض کنید $V_\lambda(V)=\sum_{j=1}^{\infty}x_jI\{V\in B_\lambda(x_j)\}$. داریم:

۱- $\|V_\lambda(V)-V\|\le\lambda$،

۲- $E\|V_\lambda(V)\|-\lambda\le E\|V\|\le E\|V_\lambda(V)\|+\lambda$،

۳- برای هر مقدار j، $\{V\in B_\lambda(x_j)\}\subseteq\{V\le x_j\}$.

۴-
$$EV_\lambda(V)=\sum_{j=-\infty}^{\infty}x_jE(I\{V\in B_\lambda(x_j)\}) = \sum_{j=-\infty}^{\infty}x_jP\{V\in B_\lambda(x_j)\}$$

۵- $\|V-E(V)\|\le\|V_\lambda(V)-EV_\lambda(V)\|+2\lambda$

اثبات. ازآنجاکه برای هر مقدار λ، $B_\lambda(x_i)$ مجموعه‌های مجزایی می‌باشند، لذا با توجه به چگال بودن مجموعه $\{\ldots,x_{-2},x_{-1},x_0,x_1,x_2,\ldots\}$ در E، V حداکثر عضو یکی از آن‌ها (به‌عنوان‌مثال $B_\lambda(x_a)$) می‌باشد، بنابراین $V_\lambda(V)=\sum_{j=-\infty}^{\infty}x_jI\{V\in B_\lambda(x_j)\}=x_a$. از طرفی $V\in B_\lambda(x_a)$ و $\|x_a-V\|\le\lambda$ در نتیجه

$$\begin{aligned}\|V_\lambda(V)-V\|&=\left\|\sum_{j=-\infty}^{\infty}x_jI\{V\in B_\lambda(x_j)\}-V\right\|\\&=\|x_a-V\|\le\lambda\end{aligned}$$

بدین ترتیب (۱) اثبات شد و بر اساس آن داریم

$$\begin{aligned}\|V\|&=\|V-V_\lambda(V)+V_\lambda(V)\|\\&\le\|V-V_\lambda(V)\|+\|V_\lambda(V)\|\\&\le\|V_\lambda(V)\|+\lambda\end{aligned}$$

با روشی مشابه می‌توان نشان داد که $\|V_\lambda(V)\|-\lambda\le\|V\|$، و با امید ریاضی گرفتن از طرفین، (۲) نیز اثبات می‌شود.
برای اثبات (۳) داریم

$$\begin{aligned}\{V\in B_\lambda(x_j)\}&=\{\omega\in\Omega;x_{j-1}\le V(\omega)\le x_j,\left\|x_j-V(\omega)\right\|\le\lambda\}\\&\subseteq\{\omega\in\Omega;V(\omega)\le x_j\}=\{V\le x_{j+1}\}.\end{aligned}$$

اثبات رابطه (۴)بدیهی می‌باشد و در نهایت برای اثبات (۵) داریم

$$\begin{aligned}\|V-E(V)\|&=\|V-E(V)-V_\lambda(V)+EV_\lambda(V)+(V_\lambda(V)-EV_\lambda(V))\|\\&\le\|V_\lambda(V)-EV_\lambda(V)\|+\|V_\lambda(V)-V\|+\|E(V_\lambda(V)-V)\|\\&\le\|V_\lambda(V)-EV_\lambda(V)\|+2\lambda.\end{aligned}$$

بدین ترتیب اثبات کامل می‌شود.

□

قضیهٔ ۷.۵. دنباله $\{V_n;n\ge1\}$ از عناصر تصادفی مشبکه‌ای وابسته منفی ترتیبی در مشبکه‌ای باناخ تفکیک‌پذیر $(E,\le)$ را در نظر می‌گیریم. اگر مجموعه شمارش پذیر $\{\ldots,x_{-2},x_{-1},x_0,x_1,x_2,\ldots\}$ در آن چگال باشد به‌گونه‌ای که برای هر مقدار i، $x_i\le x_{i+1}$ و $\sum_{j=-\infty}^{\infty}\|x_j\|^2P(V\le x_j)<M<\infty$، آنگاه با احتمال یک $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(V_k-EV_k)\to0$ ($\left\|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(V_k-EV_k)\right\|\overset{n\to\infty}{\to}0$).

اثبات. با تکنیک ارائه‌شده در صفحه ۹۷ [۳] اثبات را انجام می‌دهیم. برای هر مقدار k داریم،

$$\begin{aligned}E\|V_\lambda(V_k)\|&=\sum_{j=-\infty}^{\infty}\|x_j\|E(I\{V\in B_\lambda(x_j)\})\\&=\sum_{j=-\infty}^{\infty}\|x_j\|P\{V\in B_\lambda(x_j)\}\\&\le\sum_{j=-\infty}^{\infty}\|x_j\|P\{V\le x_j\}\le M.\end{aligned}$$

بدون کاستن از کلیت مسئله فرض می‌کنیم برای هر مقدار $k\ge1$، $EV_k=0$. با توجه به قسمت (۱) گزاره ۶.۵، چون

$$\begin{aligned}\left\|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}V_k\right\|&\le\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\|V_k\|=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\|V_k-V_\lambda(V_k)+V_\lambda(V_k)\|\\&\le\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\|V_k-V_\lambda(V_k)\|+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\|V_\lambda(V_k)\|\\&\le\lambda+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\|V_\lambda(V_k)\|.\end{aligned}$$

مقدار λ می‌تواند هر مقدار مثبتی باشد، کافی است نشان دهیم $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}V_\lambda(V_k)\to0$. داریم

$$\begin{aligned}E\left\|\sum_{k=1}^{n}V_\lambda(V_k)\right\|^2&\le\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\|x_j\|^2E(I\{V_k\in B_\lambda(x_j)\})\\&+\sum_{k\ne l=1}^{n}\left(\sum_{j,i=-\infty}^{\infty}\|x_j\|\|x_i\|E\left(I\{V_k\in B_\lambda(x_j)\}I\{V_l\in B_\lambda(x_i)\}\right)\right)\\&\le\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\|x_j\|^2P(V_k\le x_j)\\&+2\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{l=k}^{n}\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{i=-\infty}^{\infty}\|x_j\|\|x_i\|P\left(V_k\le x_j,V_l\le x_i\right)\right)\\&\le\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\|x_j\|^2P(V_k\le x_j)\\&+2\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{l=k}^{n}\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{i=-\infty}^{\infty}\|x_j\|\|x_i\|P(V_k\le x_j)P(V_l\le x_i)\right)\\&\le nM+2n(n-1)M^2\end{aligned}$$

اگر $S_n=\sum_{k=1}^{n}V_\lambda(V_k)$ را در نظر بگیریم، آنگاه برای هر مقدار دلخواه $\varepsilon\ge0$ داریم:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}P\left(\|S_{n^2}\|\ge n^2\varepsilon\right)&\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{E\|S_{n^2}\|^2}{n^4\varepsilon^2}\\&\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nM+n(n-1)M^2}{n^4\varepsilon^2}<\infty.\end{aligned}$$

در نتیجه با استفاده از لم برل-کانتلی $P\left(\|S_{n^2}\|\ge n^2\varepsilon\ i.o.\right)=0$ و لذا $\frac{S_{n^2}}{n^2}\overset{a.s.}{\to}0$. حال کافی است نشان دهیم که برای مقادیر بزرگ n، S_n و S_{n^2} با احتمال یک به هم همگرا هستند. برای هر $n\ge1$، D_n را به‌صورت

$D_n = \max\limits_{n^2 \le k \le (n+1)^2} \|S_k - S_{n^2}\|$ تعریف می‌کنیم. داریم

$$E(D_n^2) \le 2nE\left\|S_{(n+1)^2} - S_{n^2}\right\|^2 = 2nE\left\|\sum_{k=n^2+1}^{(n+1)^2} V_\lambda(V_k)\right\|^2$$
$$\le 2n\left(2nM + 2n(2n-1)M^2\right).$$

مجدداً با استفاده از نامساوی چبیشهف داریم $P(D_n \ge n^2\varepsilon) \le \frac{8M^2}{n\varepsilon} + \frac{4M(1-M)}{n^2}$، و با استفاده مجدد از لم برل-کانتلی $\frac{D_n}{n^2} \xrightarrow{a.s.} 0$. حال با توجه به اینکه $\frac{\|S_k\|}{k} \le \frac{\|S_{n^2}\|+D_n}{n^2}$، اثبات کامل می‌گردد. $\square$

در پایان با شبیه‌سازی داده‌هایی از مثال ۱۴.۲، نحوه همگرایی در قضیه ۷.۵ را نشان می‌دهیم.

مثال ۸.۵. فرض می‌کنیم اطلاعات مشتریان یک بانک در یک لیست به شکل زیر ذخیره می‌شود.

در قسمت اول جنسیت مشتری به‌صورت یک متغیر رشته‌ای دوسطحی (زن و مرد) ثبت می‌گردد. . قسمت دوم یک بردار با بعد دو جهت ثبت سطح و گرایش تحصیلات مشتری است که عنصر اول آن یک متغیر رشته‌ای در پنج سطح (زیردیپلم، دیپلم، لیسانس، فوق‌لیسانس و دکتری) و عنصر دوم نیز یک متغیر رشته‌ای پنج سطحی (ریاضی، تجربی، انسانی، فنی و هنر) می‌باشد. در قسمت سوم موجودی حساب‌جاری مشتری قرار می‌گیرد. در قسمت چهارم موجودی حساب‌های پس‌انداز مشتری ثبت می‌شود. ازآنجاکه هر مشتری می‌تواند تا دو حساب پس‌انداز داشته باشد و یا همچنین حسابی نداشته باشد، بعد این قسمت از ۰ تا ۲ متغیر است.

نرم این لیست‌ها را به‌صورت مجموع وزنی موجودی حساب‌ها با در نظر گرفتن اوزان ۱=زن و ۲=مرد برای موجودی حساب‌جاری و ۱=زیر دیپلم، ۲=دیپلم و ... و ۵=دکتری برای مجموع موجودی حساب‌های پس‌انداز تعریف می‌شود. می‌دانیم که فضای شامل این لیست‌ها با نرم تعریف‌شده تشکیل یک فضای باناخ با بعد متناهی می‌دهد.

از طرفی اگر رابطه $\preceq$ را بر اساس مجموع موجودی در نظر بگیریم (یعنی بین مشخصات دو مشتری هرکدام مجموع موجودی بیشتری داشته باشد، بزرگ‌تر است)، می‌توان نشان داد که فضای باناخ شامل لیست مشخصات مشتری‌ها با رابطه $\preceq$، تشکیل یک مشبکه‌ای باناخ می‌دهد.

حال با استفاده از اطلاعات جداول زیر به شبیه‌سازی عناصر تصادفی مشبکه‌ای از این فضا می‌پردازیم. نکته قابل‌توجه وجود وابستگی بین عناصر درونی لیست می‌باشد که امکان تفکیک مقادیر درون لیست و بررسی جداگانه آن‌ها را از بین می‌برد.

جدول ۱. توزیع توأم جنسیت و گرایش تحصیلی

	ریاضی	تجربی	انسانی	هنر	فنی
زن	۰۵/۰	۱۲/۰	۱۳/۰	۰۸/۰	۰۲/۰
مرد	۰۵/۰	۰۸/۰	۱۷/۰	۰۲/۰	۲۸/۰

جدول ۲. توزیع احتمال سطح تحصیلات

زیر دیپلم	دیپلم	لیسانس	فوق‌لیسانس	دکتری
۰۵/۰	۲/۰	۴/۰	۲۵/۰	۱/۰

موجودی حساب‌جاری دارای توزیع یکنواخت است و پارامترهای آن به جنسیت و سطح تحصیلات بستگی دارد.

جدول ۳. توزیع موجودی حساب‌جاری برحسب جنسیت و سطح تحصیلات

	زیر دیپلم	دیپلم	لیسانس	فوق‌لیسانس	دکتری
زن	U(۴۰۰،۰)	U(۵۰۰،۱۰۰)	U(۶۰۰،۲۰۰)	U(۹۰۰،۴۰۰)	U(۱۳۰۰،۷۰۰۰)
مرد	U(۶۰۰،۲۰۰)	U(۷۰۰،۳۰۰)	U(۸۰۰،۴۰۰)	U(۱۱۰۰،۶۰۰)	U(۱۵۰۰،۹۰۰)

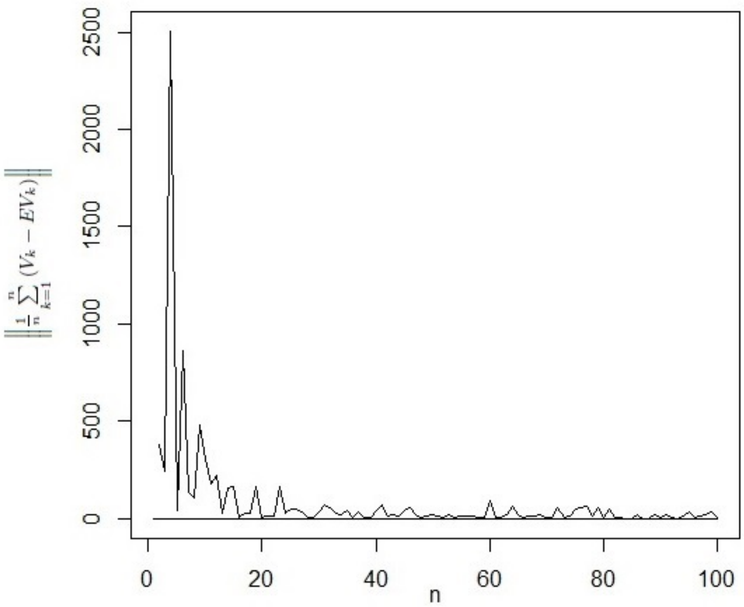
برای شبیه‌سازی موجودی حساب‌های پس‌انداز، ابتدا تعداد حساب‌ها را (۰، ۱ و ۲) را با احتمال‌های ۲/۰، ۵/۰ و ۳/۰ شبیه‌سازی می‌کنیم. سپس بر اساس تعداد حساب‌های پس‌انداز، موجودی این حساب‌ها را از توزیع یکنواخت تولید می‌کنیم. این توزیع‌های یکنواخت مقداری بین موجودی حساب‌جاری فرد تا ضریبی تصادفی از آن را می‌گیرند.

نمونه‌ای از عناصر تصادفی مشبکه‌ای باناخ شبیه‌سازی‌شده را در جدول زیر آورده‌ایم.

جدول ۴. عناصر تصادفی مشبکه‌ای باناخ شبیه‌سازی‌شده

شماره نمونه	جنسیت	سطح و گرایش تحصیلی	موجودی حساب‌جاری	موجودی حساب‌های پس‌انداز
۱	مرد	لیسانس، فنی	۱/۴۶۴۲۳۱	۹/۶۴۳۲۳۱۸/۵۴۷۳۱۲
۲	زن	فوق‌لیسانس، تجربی	۲/۷۷۱۲۶۹	−−
۳	مرد	زیر دیپلم، −−	۹/۲۴۵۴۸۹	۳/۳۸۶۹۰۲

حال بر اساس داده‌های شبیه‌سازی‌شده، همگرایی مطرح‌شده در قضیه ۷.۵ را نشان می‌دهیم. نمودار زیر مقادیر $\left\|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(V_k-EV_k)\right\|$ را در مقابل n نشان می‌دهد. برای رسم این نمودار تکرار شبیه‌سازی برابر ۳۰ و EV برابر لیست (۵۰۵۰۰۰، ۶۱۲۵۰۰۰، ۱۵/۳، ۶/۱) در نظر گرفته‌شده است.



شکل ۱. $\left\|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(V_k-EV_k)\right\|$ در مقابل n

بررسی این نمودار نشان می‌دهد که با افزایش حجم نمونه، مقدار $\left\|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(V_k-EV_k)\right\|$ به صفر میل می‌کند.

نتیجه‌گیری

با گسترش فزاینده حجم، انواع و کیفیت داده‌ها و تنوع شیوه‌های گردآوری و نگهداری آن‌ها ضرورت معرفی ابزارهای مناسب برای توصیف و مدل‌سازی داده‌ها از اهمیت ویژه‌ای برخوردار می‌باشد. مشبکه‌ای باناخ و عناصر تصادفی مشبکه‌ای، ابزارهای مناسبی برای این منظور هستند، که تعریف گردیدند.
از سوی دیگر می‌دانیم که برقراری شرط استقلال بین متغیرها(یا عناصر) تصادفی همواره ممکن نیست (هرچند معمولاً در بررسی‌ها این شرط را مفروض می‌گیرند)، بنابراین در این تحقیق یک نوع وابستگی منفی را تحت عنوان وابستگی منفی ترتیبی، برای عناصر تصادفی مشبکه‌ای تعریف کرده و برخی ویژگی‌های آن را بررسی نمودیم. این تعریف بسیار ساده‌تر و کاربردی‌تر از برخی انواع وابستگی‌ها برای عناصر تصادفی هستند که تاکنون معرفی‌شده‌اند، و به سهولت می‌توان آن را برای رده‌های بزرگ‌تری از عناصر تصادفی گسترش داد. در انتها و جهت فراهم شدن شرایط استفاده از عناصر تصادفی مشبکه‌ای وابسته منفی ترتیبی در مسائل کاربردی، صحت برخی قوانین حدی را برای آن‌ها نشان دادیم.

مراجع

[1] Bozorgnia, A., Patterson, R. F., Taylor, R. L. (1997). Chung type strong laws for arrays of random elements and bootstrapping. *Stochastic analysis and applications*, **15(5)**, 651-669.

[2] Bozorgnia, A., Patterson, R. F., Taylor, R. L. (1997). Weak law of large numbers for negatively dependent random variables in Banach spaces. *Madan Puri festschrift (Edited by E. Bruner and M. Denker) VSP international ScincePubl*, Vilnius, Lithuania, 11-22.

[3] Chung, K. L. (1968). *A Course in Probability*. Harcourt, Brace and World, New York.

[4] Jain, N. C. (1975). Tail probabilities for sums of independent Banach space valued random variables. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*, **33(3)**, 155-166.

[5] Lehmann, E. L. (1966). Some concepts of dependence. *The Annals of Mathematical Statistics*, 1137-1153.

[6] Meyer-Nieberg, P. (1991). *Banach lattices* . Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York.

[7] Naisbitt, J. (1984). *Megatrends: 10 Perspektiven, die unser Leben verändern werden* . Hestia-Verlag.

[8] Nili-Sani, H. R., Amini, M., Bozorgnia, A. (2018). Complete convergence for weighted sums of arrays of APND random variables. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **47(10)**, 2425-2431.

[9] Patterson, R. F., Taylor, R. L. (1997).Strong laws of large numbers for negatively dependent random elements.*In Proceedings of second world congress on Nonlinear analysts*, 4229-4235.

[10] Rudin, W. (1991). *Functional analysis*. Inc, New York.

[11] Schaefer, H. H. (1974). *Banach lattices and positive operators*. Berlin Heidelberg, New York.

[12] Taylor, R. L., Patterson, R. F. (1997). Negative dependence in Banach spaces and laws of large numbers.*Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, **30(7)**, 4249-4256.

[13] Taylor, R. L. (2006). *Stochastic convergence of weighted sums of random elements in linear spaces*. Lecture Notes in Mathematics(vol 672), Springer..

[14] Woyczynski, W. A. (1980). On Marcinkiewicz–Zygmund Laws of Large Numbers in Banach spaces and related rates of convergence. *Probability and Mathematical Statistics*, **2**, 117-131.