مطالعه‌ای بر ترتیب‌های اولویت امید ریاضی، مطلوبیت مورد انتظار و امید ریاضی تحریف‌شده

سیروس فتحی‌منش[۱]، محی‌الدین ایزدی[۲]، بهاءالدین خالدی[۳]

تاریخ دریافت: ۹۹/۱۰/۲۲
تاریخ پذیرش: ۹۹/۱۲/۲۷

چکیده:
یکی از چالش‌های پیش روی تصمیم‌گیرندگان در حوزه‌های بیمه و مالی انتخاب یک معیار مناسب جهت اتخاذ تصمیم است. امید ریاضی، مطلوبیت مورد انتظار و امید ریاضی تحریف‌شده، سه معیار رایج در این زمینه می‌باشند. در این مقاله، به مطالعه این سه معیار پرداخته و با ارائه مثال‌هایی، تصمیم‌های اتخاذشده بر اساس هر معیار بررسی و مورد مقایسه قرار می‌گیرد.

واژه‌های کلیدی: پارادوکس الایس، پارادوکس سن‌پترزبورگ، تابع تحریف، تابع مطلوبیت

۱ مقدمه

در مسائل پیش‌رو در مباحث مالی و بیمه‌ای با رخدادهای غیرقطعی و احتمالی که اتخاذ یک تصمیم مناسب را دشوار می‌سازند مواجه هستیم. یک تصمیم مناسب در مباحث مالی انتخاب یک سرمایه‌گذاری بهتر و در نتیجه سود مطمئن‌تر یا بیشتر است. اما در بیمه این تصمیم انتخاب بیمه‌نامه‌ای است که به ایمن شدن سرمایه ما در مقابل خطرات مالی بالقوه منجر شود. بنابراین، انتخاب یک معیار مناسب جهت تصمیم‌گیری که با خواسته‌ها و اهداف شخص تصمیم‌گیرنده منطبق باشد بسیار اساسی و مهم است. با توجه به ماهیت تصادفی بودن مسئله، معیارهای مختلفی جهت اتخاذ تصمیم مناسب تعریف‌شده‌اند. اما انتخاب این معیارها همواره در بین محققان یک مبحث چالشی بوده و اجماع نظر بر روی آن‌ها در حالت کلی وجود ندارد. جهت فرمول‌بندی و ورود به مسئله، فرض کنید X نشان‌دهنده تبعات مالی ناشی از اتخاذ یک تصمیم است که در ادامه آن را تصمیم X می‌نامیم و χ نشان‌دهنده مجموعه تمام تصمیم‌های ممکن است. در مباحث بیمه X مقدار زیان بالقوه‌ای است که سرمایه‌ی شخص یا شرکت را تهدید می‌کند و اصطلاحاً آن را یک مخاطره می‌نامند. اما در مسائل مالی X سود حاصل از یک سرمایه‌گذاری است که می‌تواند مقداری مثبت یا منفی باشد. جهت مقایسه‌ی تصمیم‌های مختلف لازم است یک ترتیب اولویت ($\prec$) را به‌عنوان یک قاعده ترتیبی کامل بر روی χ چنان تعریف نماییم که بر اساس آن هر دو تصمیم ممکن یا معادل‌اند و یا یکی بر دیگری ترجیح داده شود. به‌عبارت‌دیگر، برای هر $X,Y \in \chi$ یکی از سه حالت زیر را داشته باشیم.

$$X \prec Y, \quad Y \prec X, \quad X \equiv Y$$

در این مقاله به معرفی، بررسی و مقایسه سه معیار امید ریاضی، مطلوبیت مورد انتظار[۴] و امید ریاضی تحریف‌شده[5] که معمولاً به‌عنوان ترتیب‌های اولویت جهت تعیین تصمیم مناسب استفاده می‌شوند می‌پردازیم . برای توضیحات بیشتر در مورد این معیارها و معیارهای دیگر می‌توان به مراجع [۲]، [۴]، [۹] و [۱۰] مراجعه نمود.

۲ امید ریاضی

امید ریاضی تصمیم X با تابع توزیع F_X در صورت وجود برابر است با

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x dF_X(x).$$

در این حالت اگر ترتیب اولویت امید ریاضی را بر روی χ اعمال نماییم آنگاه رابطه ترتیبی به‌صورت زیر است.

$$X \prec Y \Longleftrightarrow E(X) < E(Y)$$

$$X \equiv Y \Longleftrightarrow E(X) = E(Y).$$

[۱] گروه آمار، دانشگاه کردستان (نویسنده مسئول) sirus_60@yahoo.com
[۲] گروه آمار، دانشگاه رازی
[۳] گروه ریاضی و آمار، دانشگاه بین‌المللی فلوریدا

[4] expected utility
[5] distorted expectation

با توجه به قانون قوی اعداد بزرگ انتظار داریم که میانگین بلندمدت مقادیر محقق شده X به $E(X)$ نزدیک باشد. باوجوداینکه تصمیم‌گیرندگان در تصمیم‌های خود بسیار بر روی میانگین تأکید دارند اما در عمل، امید ریاضی یک ترتیب اولویت مناسب نیست و دارای نقاط ضعفی است که اتخاذ اولویت بر اساس آن حتی ممکن است به تصمیم‌های غیرمنطقی منجر شود. برخی از این نقاط ضعف و اشکال به شرح زیر است.

- قانون قوی اعداد بزرگ استفاده از امید ریاضی را به‌عنوان یک شاخص مرکزی مناسب در زمینه‌های مختلف آمار توجیه می‌کند. در مسائل مربوط به شرکت‌های بزرگ که در آن به‌جای تصمیم X با دنباله $X_1,\dots,X_n$ مواجه هستند، با در نظر گرفتن ملاحظاتی، این قانون می‌تواند مفید واقع شود؛ اما در تصمیم‌گیری‌های فردی که فقط با تک مقدار X مواجه هستیم، تصمیم بر اساس $E(X)$ می‌تواند به‌شدت نامطمئن باشد.
- در مسائل مالی و بیمه‌ای بسیاری از مدل‌های مورداستفاده دم‌سنگین هستند و ممکن است واریانس آن‌ها متناهی نباشد. در این موارد حتی با بزرگ بودن اندازه نمونه‌ای، میانگین X_iها به کندی به سمت $E(X)$ میل می‌کند و این سبب اتخاذ تصمیم نامطمئن می‌گردد. مثال ۱.۲ با مقایسه‌ی دو مدل با واریانس متناهی و نامتناهی به‌خوبی این مسئله را روشن می‌کند.

مثال ۱.۲. فرض کنید $X_1,\dots,X_{1000}$ یک نمونه تصادفی از تی غیرمرکزی با پارامتر غیرمرکزی ۱۰ و درجه آزادی ۱٫۵ باشد. این توزیع دارای امیدریاضی ۲۵٫۵۳ و واریانس بی‌نهایت است. به‌منظور بررسی قانون قوی اعداد بزرگ برای این نمونه و سرعت همگرایی آن این نمونه را ۱۰۰۰۰۰ مرتبه شبیه‌سازی کرده‌ایم. خلاصه نتایج حاصل از میانگین نمونه‌های شبیه‌سازی‌شده به‌صورت زیر است.

میانگین	میانه	چارک اول	کمینه
۲۵٫۶۱	۲۵٫۰۵	۲۴٫۳۶	۲۲٫۱۰

بیشینه	صدک ۹۵	چارک سوم
۱۹۵۵٫۳۴	۲۸٫۶۲	۲۵٫۹۷

با دقت در این نتایج به‌ویژه فاصله بین صدک ۹۵ تا بیشینه مقدار میانگین‌ها، درمی‌یابیم که باوجود حجم نمونه‌ی ۱۰۰۰۰ تایی، همگرایی کند است و تصمیم‌گیری بر مبنای امیدریاضی در این حالت اگرچه با احتمالی کوچک اما می‌تواند منجر به مقدار زیان خیلی بزرگی نسبت به میانگین شود. جهت مقایسه این حالت با واریانس متناهی، درجه آزادی توزیع را به مقدار ۵ تغییر می‌دهیم. در این حالت امیدریاضی برابر ۱۱٫۸۹ و واریانس توزیع برابر ۲۶٫۸۶ است. نتایج حاصل از میانگین نمونه‌های شبیه‌سازی‌شده به‌صورت زیر است.

میانگین	میانه	چارک اول	کمینه
۱۱٫۸۹	۱۱٫۸۹	۱۱٫۸۶	۱۱٫۶۸

بیشینه	صدک ۹۵	چارک سوم
۱۲٫۱۷	۱۱٫۹۸	۱۱٫۹۳

مقایسه این دو مدل به‌خوبی تأثیر واریانس مخاطره بر اطمینان بخشی تصمیم‌گیری بر مبنای امیدریاضی را نشان می‌دهد.

- در مدل‌های دم‌سنگین مورداستفاده ممکن است امید ریاضی نامتناهی باشد. در این صورت طبق معیار امید ریاضی، سرمایه‌گذاری و یا بیمه کردن با هر حق بیمه‌ای به‌صرفه خواهد بود که با واقعیت عملی ناسازگار است.
- سرمایه اولیه و قدرت مخاطره‌پذیری دو عامل بسیار مهم در اتخاذ تصمیم‌های مالی و بیمه‌ای می‌باشند که ترتیب اولویت بر اساس امید ریاضی هیچ‌کدام را لحاظ نمی‌کند.

برای بررسی این نقاط ضعف به ذکر چند مثال می‌پردازیم. مثال زیر نحوه تصمیم‌گیری افراد بر اساس سود را نشان می‌دهد.

مثال ۲.۲. فرض کنید در قبال مبلغ پرداختی P به شخص اجازه داده شود که یک سکه سالم را پرتاب نماید. در صورت ظاهر شدن شیر ۲۰ دلار جایزه می‌گیرد و در غیر این صورت مبلغی به وی پرداخت نمی‌شود. به ازای چه مقادیری از P شخص حاضر به انجام این بازی است؟

فرض کنید متغیر تصادفی X میزان جایزه‌ی دریافتی با توزیع احتمال

x	۰	۲۰
$P(X=x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

. در این صورت

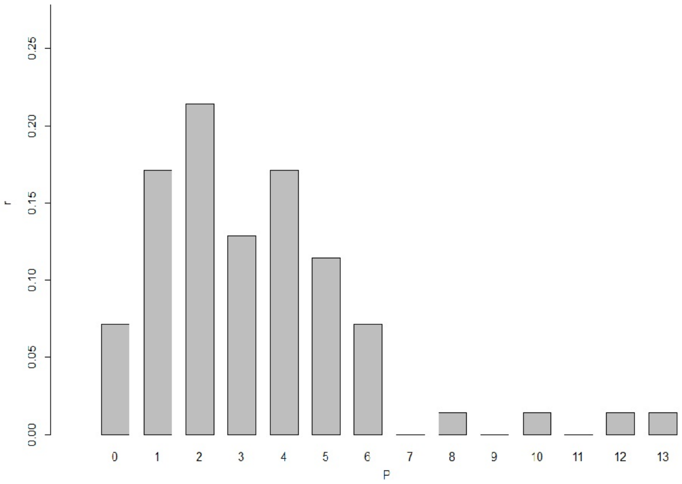
$$\chi=\{X-P;P\geq 0\}\cup\{Y\}$$

مجموعه‌ی تمام تصمیم‌های ممکن است که در آن $Y\equiv 0$ تصمیم عدم شرکت در بازی را نشان می‌دهد.

طبق معیار امیدریاضی، افراد باید به ازای مبلغ $P=E(X)=10$ تمایل به شرکت در بازی داشته باشند. در تحقیقات میدانی که صورت گرفته است معمولاً افراد مبالغ کمتر از ۱۰ را برای شرکت در بازی پیشنهاد داده‌اند. در یکی از این تحقیقات که در دانشگاه لاوال کانادا[6] صورت گرفته است، این بازی به ۷۰ دانشجو پیشنهادشده است ([۸]). شکل ۱ نمودار میله‌ای

[6] Laval

توزیع مبالغ پیشنهادی دانشجویان برای شرکت در این بازی را نشان می‌دهد. همان‌گونه که از این نمودار پیداست اکثریت افراد تمایل به پرداخت مبلغ بسیار کمتری از میزان امیدریاضی برای شرکت در این بازی را دارند درحالی‌که اگر معیار تصمیم‌گیری امیدریاضی باشد باید تصمیم‌های یکسانی بر اساس معیار امیدریاضی اتخاذ شود. متفاوت بودن تصمیم‌ها می‌تواند به دلیل یکسان نبودن میزان مخاطره‌پذیری افراد باشد که در معیار امید ریاضی در نظر گرفته نمی‌شود.



شکل ۱ نمودار میله‌ای مربوط به مثال ۱

مثال بعد شیوه تصمیم‌گیری افراد را در مواجهه با مخاطره پیش‌رو نشان می‌دهد.

مثال ۳.۲. فرض کنید شخصی با مقدار سرمایه W با احتمال ۰/۰۱ در معرض مخاطره b قرار دارد. برای بیمه کردن این مخاطره، شخص حاضر به پرداخت چه مبلغی است؟

فرض کنید X میزان مخاطره سرمایه با توزیع احتمال

X	۰	b
$P_X(x)$	۰/۹۹	۰/۰۱

باشد. اگر P میزان حق بیمه باشد، در این صورت مجموعه‌ی تمام تصمیم‌های به شکل

$$\chi = \{W-P; P \geq ۰\} \cup \{W-X\}$$

خواهد بود که در آن $W-X$ تصمیم عدم انتخاب بیمه و $W-P$ تصمیم انتخاب بیمه به ازای حق بیمه‌ی P است. حال فرض کنید شخص ۱۰۰۰۰ دلار سرمایه دارد و $P=E(X)=۰/۰۱b$ مقدار حق بیمه بر اساس معیار امید ریاضی باشد. جدول ۱ تبعات تصمیم‌ها و رخدادهای مختلف را برای مقادیر مختلف b نشان می‌دهد.

جدول ۱

رخدادها	□		
	۱۰	۱۰۰۰	۱۰۰۰۰
$W-P^*$	۹۹۹۹/۹	۹۹۹۰	۹۹۰۰
$W-X\|X=۰$	۱۰۰۰۰	۱۰۰۰۰	۱۰۰۰۰
$W-X\|X=b$	۹۹۹۰	۹۰۰۰	۰

با توجه به مقادیر جدول ۱، با افزایش مقدار b در صورت رخ دادن آن، تبعات مالی بسیار ناگواری خواهد شد و منجر به ورشکستگی می‌شود. به‌طور مثال، برای $b=۱۰۰۰۰$، با احتمال ۰/۰۱ سرمایه شخص از ۱۰۰۰۰ به ۰ کاهش می‌یابد. به همین دلیل، عموم افراد حاضر به پرداخت مبلغی بیش از مقدار امیدریاضی می‌باشند. به‌طور مشابه، می‌توان ملاحظه نمود که میزان سرمایه در تمایل شخص نسبت به بیمه نمودن تأثیرگذار است که در ترتیب اولویت امید ریاضی موردتوجه قرار نمی‌گیرد.

مثال ۴.۲ (پارادوکس سن‌پترزبورگ). فرض کنید به شخصی اجازه داده شود که یک سکه نااریب را آن‌قدر پرتاب کند تا اولین شیر ظاهر شود. اگر N تعداد پرتاب‌ها باشد مبلغ $X=۲^N$ به وی تعلق می‌گیرد. برای شرکت در این بازی، شخص حاضر به پرداخت چه مبلغی می‌باشد؟

واضح است

$$E(X)=E(۲^N)=\sum_{n=۱}^{\infty} ۲^n(\frac{۱}{۲})^n=\infty.$$

طبق معیار امیدریاضی، با پرداخت هر مقدار P شخص تمایل به شرکت در بازی را دارد. اما در عمل عده کمی حتی با مقادیر کوچکی از P حاضر به انجام این بازی می‌باشند؛ زیرا به‌طور مثال در صورت شرکت در بازی، با احتمال کوچک ۰٫۰۳ جایزه‌ای بیشتر از $32 = 2^5$ را دریافت می‌کند. بنابراین در مسائلی که امید ریاضی سود نامتناهی است، این معیار جهت اتخاذ تصمیم ورود به سرمایه‌گذاری کاربردی نخواهد داشت.

این پارادوکس در سال ۱۷۱۳ میلادی به‌وسیله‌ی نیکولاس برنولی [7] مطرح گردید. طرح این مسئله سبب به وجود آمدن یک بحث ۳۰۰ ساله در میان ریاضیدان‌ها و نظریه‌پردازان اقتصاد شده است و راه‌حل‌های مختلف از دیدگاه‌های مختلف ارائه‌شده است. حل پارادوکس سن‌پترزبورگ به شیوه‌ی دانیل برنولی منجر به شکل‌گیری مفهوم تابع مطلوبیت گردید که در بخش بعد به معرفی و مطالعه آن می‌پردازیم. برای توضیحات بیشتر در مورد تاریخچه، راه‌حل‌های مختلف و مباحث صورت گرفته در مورد این پارادوکس می‌توان به مراجع [۶] و [۱۰] مراجعه نمود.

۳ مطلوبیت مورد انتظار

دانیل برنولی [8] در سال ۱۷۳۸ برای حل پارادوکس سن‌پترزبورگ این موضوع را مطرح نمود که مطلوبیت سرمایه‌ی افراد با افزایش سرمایه، با نرخ کاهنده‌ای افزایش می‌یابد. بنابراین تصمیم‌گیری افراد نه بر مبنای x (میزان سرمایه) بلکه بر مبنای مطلوبیت سرمایه ($u(x)$) صورت می‌گیرد. وی فرض نمود که $\frac{d}{dx}u(x) = \frac{1}{x}$ و تابع $u(x) = \ln x$ را پیشنهاد نمود و فردی که چنین مطلوبیتی برای سرمایه‌اش قائل باشد فقط تا سطح محدودی از سرمایه به بازی می‌پردازد. همچنین کرامر [9] به‌طور مستقل، برای حل این پارادوکس $u(x) = \sqrt{x}$ را پیشنهاد نمود. ایده تابع مطلوبیت مطرح‌شده توسط برنولی، به‌وسیله‌ی وُن نیومن [10] و مورگنسترن [11] [۱۲] توسعه یافت و پس از آن توابع مطلوبیت مختلفی برای توصیف مطلوبیت سرمایه از نگاه تصمیم‌گیرندگان معرفی‌شده است. از جمله رایج‌ترین آن‌ها در حوزه‌های بیمه و مالی می‌توان به خانواده‌ی زیر اشاره نمود ([۳]):

□ خانواده نمایی

$$u(x) = \frac{1 - e^{-kx}}{k} \qquad x \in \mathbb{R},\ k > 0.$$

□ خانواده توانی نوع اول

$$u(x) = \begin{cases} \frac{s^{c+1} - (s-x)^{c+1}}{(c+1)s^c} & x < s \\ & ,s > 0,\ c > 0 \\ \frac{s}{c+1} & x \geq s \end{cases}$$

□ خانواده توانی نوع دوم

$$u(x) = \begin{cases} \frac{x^{1-c} - 1}{1-c} & x > 0, c \neq 1 \\ \\ \ln x & x > 0, c = 1. \end{cases}$$

در ادامه، به بیان تعریف مطلوبیت مورد انتظار به‌عنوان یکی از ترتیب‌های اولویت، فواید و اشکال آن می‌پردازیم.

تعریف ۱.۳ (معیار مطلوبیت مورد انتظار)**.** فرض کنید تصمیم‌گیرنده دارای تابع مطلوبیت $u(x)$ که همواره تابعی صعودی است باشد و X و Y دو تصمیم پیش‌روی وی باشند در این صورت معیار ترجیح بر اساس مطلوبیت مورد انتظار به شکل زیر تعریف می‌شود.

$$X \prec Y \Longleftrightarrow E(u(X)) < E(u(Y)),$$

$$X \equiv Y \Longleftrightarrow E(u(X)) = E(u(Y)).$$

در این معیار تصمیم‌گیرنده به دنبال اتخاذ تصمیمی است که مطلوبیت مورد انتظارش بیشینه شود. برخلاف معیار امیدریاضی، در معیار مطلوبیت مورد انتظار تأثیر دو عامل میزان سرمایه و شدت محافظه‌کاری در تصمیم‌گیری در نظر گرفته می‌شود. تابع مطلوبیت برای هر شخص یک ویژگی فردی است و مشخصه‌های فردی در تعیین آن مؤثر است و این سبب می‌شود تعیین دقیق تابع مطلوبیت امری پیچیده و دشوار باشد. به همین منظور، برای تبیین میزان مطلوبیت سرمایه از دیدگاه افراد مختلف، خانواده‌هایی از توابع مطلوبیت با برخی خواص مشترک تعریف‌شده‌اند. مثال زیر که از رُتار [۹] اقتباس‌شده است کاربرد تابع مطلوبیت را در شیوه‌ی اتخاذ تصمیم به‌خوبی نشان می‌دهد.

مثال ۲.۳. فرض کنید X میزان سود حاصل از یک بازی شانس با توزیع احتمال زیر باشد.

X	$-a$	a
$P_X(x)$	$1-p$	p

دو شخص در این بازی شرکت می‌کنند. شخص اول به‌شدت مخاطره پذیر و دارای تابع مطلوبیت $u_1(x) = e^x$ است. شخص دوم برای سرمایه مثبت مخاطره پذیر اما از ورشکستگی هراس دارد و برای سرمایه‌ی منفی به‌شدت

[7] Nicolaus Bernoulli
[8] Daniel Bernoulli
[9] Gabriel Cramer
[10] Von Nuemann
[11] Morgenstern

مخاطره‌گریز است و رسیدن سرمایه‌اش به مقدار ۱− برایش یک فاجعه خواهد بود. تابع مطلوبیت وی به شکل زیر است.

$$u_2(x) = \begin{cases} 3x^2 & x \geq 0 \\ \\ \ln(1-x^2) & -1 \leq x \leq 0. \end{cases}$$

بر اساس معیار مطلوبیت مورد انتظار، شرط ورود به بازی برای فرد اول به‌صورت

$$E[u_1(X)] > u_1(0) \Longleftrightarrow a > \ln \frac{1-p}{p}$$

است. واضح است برای $p \geq \frac{1}{2}$، شخص برای هر مقدار $a > 0$ همواره تمایل به بازی دارد. اما به‌عنوان‌مثال برای $p = 0/3$ او فقط برای $a > 0/37$ تمایل به بازی دارد.

به همین ترتیب، می‌توان نشان داد شخص دوم وارد بازی می‌شود اگر

$$3pa^2 + (1-p)\ln(1-a^2) > 0.$$

برای هر $p \leq \frac{1}{4}$ و $0 < a < 1$ نامساوی بالا برقرار نیست و بنابراین شخص در بازی شرکت نمی‌کند. برای $p > \frac{1}{4}$، شخص در بازی شرکت خواهد کرد اگر

$$-\frac{\ln(1-a^2)}{a^2} \leq \frac{3p}{1-p}.$$

به‌عنوان‌مثال برای $p = \frac{1}{2}$، برای هر $a < 0/97$ شخص تمایل به شرکت در بازی را دارد و در $a_0 = 0/82$ تابع مطلوبیت شخص بیشینه می‌شود.

مقدار a_0 برابر ۰/۸۱ خواهد بود که این مقدار با توجه به فاجعه‌بار بودن رسیدن به مقدار ۱− یک استراتژی منطقی است.

۱.۳ مخاطره‌گریزی

یکی از ویژگی‌های مفید تابع مطلوبیت، توصیف شدت محافظه‌کاری تصمیم‌گیرنده است. در این بخش برآنیم که این مفهوم را در یک چهارچوب ریاضی بیان کنیم. به این منظور، در یک دیدگاه کلی شیوه مواجهه افراد با مخاطره را می‌توان در سه دسته مخاطره‌گریزی[12]، مخاطره‌پذیری[13] و مخاطره خنثی بودن[14] در نظر گرفت.

تعریف ۳.۳. فرض کنید Z_ε متغیری تصادفی با توزیع احتمال

Z_ε	$-\varepsilon$	ε
$P_{Z_\varepsilon}(x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

و X یک متغیر تصادفی (تصمیم) دلخواه مستقل از Z_ε باشد. گوییم تصمیم‌گیرنده

- مخاطره‌گریز است اگر

$$X \succ X + Z_\varepsilon$$

- مخاطره پذیر است اگر

$$X \prec X + Z_\varepsilon$$

- و مخاطره‌خنثی است اگر

$$X \equiv X + Z_\varepsilon.$$

تابع مطلوبیت می‌تواند این شیوه‌ی مواجه‌ی تصمیم‌گیرندگان مختلف با مخاطره را به‌خوبی توصیف نماید و برای هر دسته از این تصمیم‌گیرندگان یک کلاس خاص از توابع مطلوبیت اختصاص یابد. می‌توان ثابت کرد که [۹]

تصمیم‌گیرنده مخاطره‌گریز است $\Longleftrightarrow$ تابع مطلوبیت مقعر است ،

تصمیم‌گیرنده مخاطره پذیر است $\Longleftrightarrow$ تابع مطلوبیت محدب است،

تصمیم‌گیرنده مخاطره‌خنثی است $\Longleftrightarrow$ تابع مطلوبیت خطی است.

در حالت کلی یک شخص از جهت مواجه با مخاطره همواره وضعیت یکسانی ندارد بلکه ممکن است به ازای برخی از مقادیر سرمایه به‌شدت مخاطره پذیر و به ازای برخی دیگر از مقادیر سرمایه به‌شدت مخاطره‌گریز باشد. بنابراین ممکن است با تغییر میزان سرمایه نوع تابع مطلوبیت فرد تغییر کند؛ به‌عبارت‌دیگر تابع مطلوبیت وی در بازه‌های مختلف ممکن است محدب، مقعر و یا خطی باشد. علاوه بر دسته‌بندی تصمیم‌گیرندگان به سه گروه ذکرشده، نیازمند تعریف یک شاخص جهت مقایسه‌ی شدت مخاطره‌گریزی نیز می‌باشیم. ضریب مخاطره‌گریزی که به‌طور جداگانه به‌وسیله پرات[15] [۷] و اَرو[16] [۱] معرفی گردید به این مسئله می‌پردازد. همچنین مرجع [۱۱] با نقد و بررسی این مفهوم پرداخته است.

تعریف ۴.۳. برای یک تصمیم‌گیرنده به تابع مطلوبیت $u(x)$، ضریب مخاطره‌گریزی که با $r(x)$ نشان داده می‌شود به‌صورت

$$r(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)} = -\frac{d}{dx}\ln u'(x)$$

تعریف می‌شود.

[12]risk averse
[13]risk taker
[14]risk neutral
[15]Pratt
[16]Arrow

بر اساس ضریب مخاطره‌گریزی، اگر $r_1(x)$ و $r_2(x)$، به ترتیب، ضریب‌های مخاطره تصمیم‌گیرندگان ۱ و ۲ باشند و برای x،

$$r_1(x) \leq r_2(x)$$

آنگاه تصمیم‌گیرنده ۲ مخاطره‌گریزتر از تصمیم‌گیرنده ۱ به ازای سرمایه x است.

در بخش قبل، خانواده‌های تابع‌های مطلوبیت نمایی، توانی نوع اول و دوم معرفی شدند. اگر تصمیم‌گیرنده‌ای دارای تابع مطلوبیت نمایی با پارامتر k باشد، آنگاه $r(x) = k$. در این خانواده k را پارامتر شدت مخاطره‌گریزی گویند. بنابراین مخاطره‌گریزی یک تصمیم‌گیرنده با تابع مطلوبیت نمایی نسبت به سرمایه ثابت است.

برای خانواده توانی نوع اول با پارامترهای c و s، ضریب مخاطره‌گریزی برابر است با:

$$r(x) = \frac{c}{s-x} \quad x < s.$$

در این خانواده s را پارامتر اشباع می‌نامند. با افزایش سرمایه، مخاطره‌گریزی تصمیم‌گیرنده افزایش می‌یابد به‌گونه‌ای که در مقادیر نزدیک پارامتر اشباع به‌شدت محافظه‌کار خواهد شد. به‌عبارت‌دیگر، رسیدن به سرمایه s برای وی بسیار حائز اهمیت است.

اگر تصمیم‌گیرنده‌ای دارای تابع مطلوبیتی از خانواده توانی نوع دوم با پارامتر c باشد، آنگاه ضریب مخاطره‌گریزی او برابر

$$r(x) = \frac{c}{x} \quad x > 0$$

است. در این خانواده با افزایش سرمایه از شدت مخاطره‌گریزی کاسته می‌شود. همچنین با افزایش پارامتر c شدت مخاطره‌گریزی افزایش می‌یابد.

۲.۳ محاسبه‌ی حق بیمه بر اساس تابع مطلوبیت

در این بخش، به محاسبه حق بیمه (P) بر مبنای تابع مطلوبیت و کاربرد آن در این زمینه بپردازیم. ازآنجایی‌که این تابع میزان سرمایه و ویژگی‌های فردی شخص را در تصمیم‌های لحاظ می‌کند، بنابراین این دو عامل در میزان حق بیمه مؤثر خواهند بود. فرض کنید شخصی با سرمایه‌ی W و تابع مطلوبیت $u(.)$ مخاطره X را پیش‌رو دارد و او تمایل دارد با پرداخت مبلغی به‌عنوان حق بیمه، مخاطره پیش‌رو یا بخشی از آن را به یک شرکت بیمه انتقال دهد. اکنون، پرسشی که مطرح است این است حداکثر مقدار حق بیمه (P^+) که بیمه‌گذار بپردازد چه مقداری است. پیش از پاسخ به این پرسش، لازم به ذکر است که با توجه به اینکه در صورت پوشش کل مخاطره توسط شرکت بیمه، به‌صورت منطقی، میزان حق بیمه نیز افزایش خواهد یافت و همچنین برای ایجاد کنش‌های پیشگیرانه از طرف بیمه‌گذار برای جلوگیری از رخداد زیان، معمولاً بخشی از یک مخاطره تحت پوشش بیمه قرار می‌گیرد. بر این اساس، فرض کنید

$$X = X_C + X_R$$

که در آن X_C مخاطره پوشش داده‌شده به‌وسیله شرکت بیمه و X_R مخاطره باقی‌مانده است. در این صورت، حق‌بیمه P از دیدگاه بیمه‌گذار پذیرفتنی است هرگاه

$$E\left[u(W - X_R - P)\right] \geq E\left[u(W - X)\right]. \qquad (۱)$$

در حالت خاص اگر $X_R = 0$، آنگاه رابطه (۱) به‌صورت زیر است.

$$E\left[u(W - P)\right] \geq E\left[u(W - X)\right].$$

اگر P^+ حداکثر حق‌بیمه پذیرفتنی توسط بیمه‌گذار باشد، آنگاه رابطه (۱) به برابری تبدیل می‌شود. در این حالت می‌توان نشان داد که به‌صورت تقریبی رابطه‌ی زیر برقرار است ([۲]).

$$P^+ \simeq E(X) + \frac{1}{2} var(X) r(W - E(X)).$$

به بیان ساده‌تر بر اساس معیار تابع مطلوبیت سه عامل امیدریاضی، واریانس و ضریب مخاطره‌گریزی در تعیین حق بیمه مؤثرند و شخص مخاطره‌گریز همواره حاضر به پرداخت حق بیمه‌ی بیشتر از مقدار امیدریاضی است. بدون شک، مسئله حق بیمه از دیدگاه شرکت بیمه که طرف دیگر قرارداد است نیز حائز اهمیت است. فرض کنید W' و تابع مطلوبیت $u_2(.)$ به ترتیب سرمایه اولیه و تابع مطلوبیت بیمه‌گر باشد. در این صورت، مقدار حق بیمه P از نظر بیمه‌گر پذیرفتنی است اگر

$$u_2(W') \leq E\left[u_2(W' - X_c + P)\right]$$

اگر P^- حداقل مقدار حق بیمه پذیرفتنی از دیدگاه بیمه‌گر باشد، آنگاه با توجه به حداکثر حق‌بیمه پذیرفتنی از دیدگاه بیمه‌گزار، مخاطره تحت پوشش بیمه قرار می‌گیرد اگر

$$P^- \leq P \leq P^+.$$

در غیر این صورت قرارداد از نظر بیمه‌گزار و یا بیمه‌گر منصفانه نبوده و منجر به منعقد نشدن آن می‌شود.

همان‌گونه که در مثال‌های ۲.۲ و ۳.۲ دیدیم معیار امیدریاضی در عمل قادر به توضیح تصمیم‌های تصمیم‌گیرندگان نبود. در دو مثال پیش‌رو برآنیم که این دو مسئله را از دیدگاه معیار مطلوبیت مورد انتظار نیز موردبررسی قرار داده و تطابق نتایج حاصل از این معیار را با تصمیم‌های واقعی بسنجیم.

مثال ۵.۳. در مثال ۲.۲، فرض کنید افراد شرکت‌کننده در بازی دارای تابع مطلوبیت نمایی باشند. حداکثر مقدار پرداختی جهت شرکت در بازی (P^+)

برای تابع مطلوبیت $u(.)$ از معادله

$$E\left(u[W+X-P^{+}]\right)=u(W)$$

به دست می‌آید. مقدار P^{+} برای تابع مطلوبیت نمایی با مقادیر مختلف پارامتر k در جدول ۲ محاسبه‌شده است. همان‌گونه که انتظار می‌رود مقادیر P^{+} نسبت به پارامتر مخاطره‌گریزی k نزولی است. بنابراین چوله به راست بودن توزیع مقدار حق شرکت نشان‌دهنده مخاطره‌گریزی اکثریت افراد است که می‌توان این رفتار را با تابع مطلوبیت مناسب توصیف کرد.

جدول ۲. مقادیر P^{+} برای تابع مطلوبیت نمایی با مقادیر مختلف پارامتر k

$u(x)$	$1-e^{-x}$	$\frac{1-e^{-0/2x}}{/2}$	$\frac{1-e^{-0/1x}}{/1}$	$e^{0/05x}$
P^{+}	۰/۶۹	۳/۳۷	۵/۶۶	۱۲/۴۰

لازم به ذکر است، برای تابع مطلوبیت نمایی، مقدار P^{+} مستقل از W است.

مثال ۶.۳. همان‌گونه که در مثال ۳.۲ مطرح گردید با افزایش میزان زیان احتمالی b تمایل افراد به پرداخت حق‌بیمه حتی بیش از مقدار امیدریاضی افزایش می‌یابد و معیار امیدریاضی قادر به در نظرگرفتن تأثیر این تمایل نیست. اکنون، می‌خواهیم این مثال را از دیدگاه معیار مطلوبیت مورد انتظار نیز بررسی نماییم. در جدول ۳، حداکثر حق بیمه P^{+} یک شخص با سرمایه $W=10000$ تحت توابع مطلوبیت مختلف و به ازای مقادیر مختلف b که از معادله

$$u(W-p^{+})=E\left(u(W-X)\right)$$

به دست می‌آید محاسبه‌شده است. در بررسی جدول ۳ نتیجه می‌شود که تفاوت مقدار P^{+} و امید ریاضی نسبت به b افزایشی است. به‌عنوان‌مثال، برای تابع مطلوبیت لگاریتمی و مقدار $b=10000$، شخص حاضر به پرداخت حق‌بیمه ۸۸۰ است، درصورتی‌که این مقدار برای معیار امید ریاضی برابر ۱۰۰ است. بنابراین، تمایل افراد نسبت به پرداخت حق‌بیمه نسبت به هر دو عامل مخاطره‌گریزی و مقدار زیان افزایشی است.

جدول ۳. مقادیر P^{+} به ازای توابع مطلوبیت و زیان‌های متفاوت

	b		
$u(x)$	۱۰	۱۰۰۰	۱۰۰۰۰
x	۰/۱	۱۰	۱۰۰
$\sqrt{x}$	۰/۱	۱۰/۲۶	۱۹۹
$\log(x+1)$	۰/۱	۱۰/۵۳	۸۸۰
$1000(1-e^{-0/001x})$	۰/۱	۱۷	۵۳۹۹

در مثال بعد، به حل پارادوکس سن‌پترزبورگ از دیدگاه معیار مطلوبیت مورد انتظار می‌پردازیم.

مثال ۷.۳. پارادوکس سن‌پترزبورگ در مثال ۴.۲ را در نظر بگیرید و فرض کنید $u(.)$ تابع مطلوبیت فرد شرکت‌کننده در بازی باشد. با توجه به معیار مطلوبیت مورد انتظار، حداکثر مقدار پذیرفتنی حق شرکت در بازی از رابطه

$$\begin{aligned} u(W) &= E(u(W+X-P^{+})) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} u(W+2^{i}-P^{+})(\tfrac{1}{2})^{i} \end{aligned}$$

به دست می‌آید. در جدول ۴، مقادیر محاسبه‌شده P^{+} برای مقادیر مختلف سرمایه W و توابع مختلف مطلوبیت آورده شده است. توابع مطلوبیت مورداستفاده در این جدول توصیف‌کننده رفتار طیف وسیعی از تصمیم‌گیرندگان مخاطره‌گریز است. بر اساس مقادیر به‌دست‌آمده در این جدول مشخص است که باوجود بی‌نهایت بودن مقدار امید ریاضی سود، شرکت‌کنندگان تا مبلغ مشخصی تمایل به شرکت در این بازی را دارند که این با خاصیت مخاطره‌گریزی افراد سازگار است. بنابراین استفاده از ترتیب اولویت مطلوبیت مورد انتظار رهیافتی برای حل پارادوکس سن‌پترزبورگ می‌تواند باشد.

جدول ۴. مقدار P^{+} برای سرمایه‌ها و توابع مختلف مطلوبیت

W	۵۰	۲۰۰	۱۰۰۰	۱۰۰۰۰۰
$\sqrt{x}$	۸/۷۴	۱۰/۶۶	۱۲/۳۳	۱۹/۵۵
$\log(x)$	۶/۸۹	۸/۷۲	۱۰/۹۵	۱۷/۵۵
$10(1-e^{-0/1x})$	۴/۳۵	۴/۳۵	۴/۳۵	۴/۳۵
$(1-e^{-x})$	۲/۶۳	۲/۶۳	۲/۶۳	۲/۶۳

۳.۳ اصول موضوعه مطلوبیت مورد انتظار

وُن نیومن و مورگسترن [۱۲] با توسعه‌ی ایده‌ی برنولی در مورد معیار مطلوبیت مورد انتظار ثابت نمودند که شرط لازم و کافی برای پذیرفتن ترتیب اولویت بر اساس مطلوبیت مورد انتظار تبعیت از اصول پنج‌گانه‌ی زیر است.

- اصل اول:

$$X \overset{d}{=} Y \Longrightarrow X \equiv Y$$

- اصل دوم: ترتیب اولویت کامل و دارای خاصیت انعکاسی و تعدی باشد.

- اصل سوم: اگر $X \prec Y$ و به ازای هر $\varepsilon > ۰$ دلخواه داشته باشیم

$$\max\{d(X,\tilde{X}), d(Y,\tilde{Y})\} < \varepsilon,$$

که در آن

$$d(X,\tilde{X}) = \int_{-\infty}^{\infty} |F_X(t) - F_{\tilde{X}}(t)| dt,$$

آنگاه

$$\tilde{X} \prec \tilde{Y}.$$

- اصل چهارم:

$$\forall t \quad F_X(t) \geq F_Y(t) \implies X \prec Y.$$

- اصل پنجم (اصل استقلال): فرض کنید $X \prec Y$، Z مستقل از X و Y، و $I \sim Ber(p)$ و مستقل از X، Y و Z باشد. اگر تعریف کنیم

$$\begin{aligned} \tilde{X} &= IX + (۱-I)Z \\ \tilde{Y} &= IY + (۱-I)Z, \end{aligned}$$

آنگاه

$$\tilde{X} \prec \tilde{Y}.$$

اصل پنجم به‌وسیله‌ی تحقیقات میدانی به چالش کشیده شده است و این تحقیقات عدم توجه تصمیم‌گیرنده به این اصل را در عمل نشان می‌دهد. مشهورترین مثال در این زمینه پارادوکس الایس[۱۷] است. برای توضیحات بیشتر در مورد تاریخچه و مباحث مربوط به این پارادوکس می‌توان به [۵] مراجعه نمود.

مثال ۸.۳ (پارادوکس الایس). تصمیم‌های $X_۱$، $X_۲$، $X_۳$ و $X_۴$ با توزیع‌های احتمال زیر را در نظر بگیرید.

$$P(X_۱ = ۱{,}۰۰۰{,}۰۰۰) = ۱$$

$X_۲$	۵,۰۰۰,۰۰۰	۱,۰۰۰,۰۰۰	۰
$P_{X_۲}(x_۲)$	۰٫۱	۰٫۸۹	۰٫۰۱

$X_۳$	۱,۰۰۰,۰۰۰	۰
$P_{X_۳}(x_۳)$	۰٫۱۱	۰٫۸۹

$X_۴$	۵,۰۰۰,۰۰۰	۰
$P_{X_۴}(x_۴)$	۰٫۱	۰٫۹

در پاسخ به این پرسش که از بین دو تصمیم $X_۱$ و $X_۲$ همچنین از بین دو تصمیم $X_۳$ و $X_۴$ کدام‌یک را ترجیح می‌دهید، بر اساس تحقیقات میدانی الایس، معمولاً افراد $X_۱$ را بر $X_۲$ ($X_۲ \prec X_۱$) و $X_۴$ را بر $X_۳$ ($X_۳ \prec X_۴$) ترجیح می‌دهند. اکنون فرض کنید $u()$ تابع مطلوبیت یک شخص باشد. از $X_۲ \prec X_۱$ نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} &۰٫۸۹u(۱۰۰۰۰۰۰) + ۰٫۱u(۵۰۰۰۰۰۰) + ۰٫۰۱u(۰) \\ &\quad < u(۱۰۰۰۰۰۰) \end{aligned}$$

که معادل است با

$$\begin{aligned} &۰٫۹u(۰) + ۰٫۱u(۵۰۰۰۰۰۰) \\ &\quad < ۰٫۱۱u(۱۰۰۰۰۰۰) + ۰٫۸۹u(۰) \end{aligned}$$

و این یعنی

$$E(U(X_۴)) < E(U(X_۳)) \Longleftrightarrow X_۴ \prec X_۳.$$

بنابراین تابع مطلوبیتی وجود ندارد که بر اساس مطلوبیت مورد انتظار $X_۲ \prec X_۱$ و $X_۳ \prec X_۴$. در واقع، این تناقض به دلیل وجود اصل استقلال ترتیب اولویت مطلوبیت مورد انتظار است. می‌توان نشان داد

$$\begin{aligned} X_۱ &= IX + (۱-I)Z_۱, \\ X_۲ &= IY + (۱-I)Z_۱, \\ X_۳ &= IX + (۱-I)Z_۲, \\ X_۴ &= IY + (۱-I)Z_۲ \end{aligned}$$

که در آن $I \sim Ber(۰٫۸۹)$،

$$P(X = ۱) = P(Z_۱ = ۱) = P(Z_۲ = ۰) = ۱,$$

Y	۵,۰۰۰,۰۰۰	۰
$P_Y(y)$	$\frac{۰٫۱}{۰٫۱۱}$	$\frac{۰٫۰۱}{۰٫۱۱}$

بر اساس اصل استقلال اگر $X \prec Y$، آنگاه $X_۲ \prec X_۱$ و $X_۴ \prec X_۳$ که با نتیجه به‌دست‌آمده در تناقض است.

برای رفع این تناقض، یاری[۱۸] [۱۴] با تغییر اصل استقلال در اصول موضوعه مطلوبیت موردانتظار، ترتیب اولویت امید ریاضی تحریف‌شده را معرفی کرد که در بخش بعد به مطالعه آن می‌پردازیم.

[17] Allais
[18] Yaari

۴ امیدریاضی تحریف‌شده

تلاش‌ها برای اصلاح اصل استقلال از اصول مطلوبیت مورد انتظار، منجر به شکل‌گیری نظریه‌ی جدیدی تحت عنوان امید ریاضی تحریف‌شده گردید. یاری استدلال نمود که به‌جای نیاز به‌شرط استقلال نسبت به آمیخته‌ای از احتمال وضعیت‌های غیرقطعی پیش‌رو، باید شرط استقلال بر روی آمیخته‌ای از میزان سود (سرمایه) غیرقطعی وضعیت‌های پیش‌رو قرار داد ([۲]).

□ اصل پنجم یاری: فرض کنید $X \prec Y$ و Z مستقل از X و Y باشند. همچنین برای $\circ \leq p \leq ۱$، فرض کنید $\tilde{X}_p$ و $\tilde{Y}_p$ چنان تعریف شوند که

$$\begin{aligned}\bar{F}^{-۱}_{\tilde{X}_p}(q) &= p\bar{F}^{-۱}_X(q)+(۱-p)\bar{F}^{-۱}_Z(q)\\ \bar{F}^{-۱}_{\tilde{Y}_p}(q) &= p\bar{F}^{-۱}_Y(q)+(۱-p)\bar{F}^{-۱}_Z(q),\end{aligned}$$

آنگاه باید

$$\tilde{X} \prec \tilde{Y}.$$

یاری ثابت کرد که اگر ترتیب اولویت بر روی چهار اصل اول تابع مطلوبیت و اصل بالا بنانهاده شود، آنگاه این اصول منجر به ترتیب اولویت بر اساس معیار امید ریاضی کج شده می‌گردند که در ادامه به تعریف آن می‌پردازیم.

تابع غیر نزولی

$$g:[\circ,۱]\longrightarrow[\circ,۱],$$

که در آن $g(\circ)=\circ$ و $g(۱)=۱$ را تابع تحریف[19] گویند.

تعریف ۱.۴ (امید ریاضی تحریف‌شده). برای تابع تحریف g و متغیر تصادفی X، امید ریاضی تحریف‌شده که با $H_g[X]$ نشان داده می‌شود به‌صورت

$$H_g[X]=-\int_{-\infty}^{\circ}(۱-g(\bar{F}_X(x)))\,dx+\int_{\circ}^{\infty}g(\bar{F}_X(x))dx$$

تعریف می‌شود.

بدیهی است در حالت خاص امید ریاضی تحریف‌شده یک متغیر تصادفی نامنفی (مانند یک مخاطره) به‌صورت زیر است.

$$H_g[X]=\int_{\circ}^{\infty}g(\bar{F}_X(x))dx.$$

با در نظر گرفتن پنج اصل یاری، یک ترتیب اولویت با استفاده از معیار امیدریاضی تحریف‌شده به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

تعریف ۲.۴. برای یک تصمیم‌گیرنده با تابع تحریف g ترتیب اولویت بر اساس امیدریاضی تحریف‌شده به‌صورت زیر است.

$$X\prec Y \Longleftrightarrow H_g[X]<H_g[Y],$$

$$X\equiv Y \Longleftrightarrow H_g[X]=H_g[Y].$$

اگر تابع تحریف g یک تابع از راست پیوسته باشد، بدیهی است که $g(\bar{F})$ در شرایط تابع بقا صدق می‌کند و در نتیجه یک متغیر تصادفی مانند X^* وجود دارد که $g(\bar{F})$ تابع بقای آن باشد. بنابراین

$$H_g[X]=E(X^*).$$

برای متغیر تصادفی نامنفی X، معکوس تعمیم‌یافته تابع توزیع تجمعی آن را به‌صورت زیر در نظر بگیرید.

$$F_X^{-۱}(p)=\inf\{x,\ \ F_X(x)\geq p\}.$$

در این صورت می‌توان نشان داد

$$E(u(X))=\int_{\circ}^{۱}u(F_X^{-۱}(p)dp \tag{۲}$$

و

$$\begin{aligned}H_g[X] &= \int_{\circ}^{\infty}g(\bar{F}_X(x))dx\\ &= \int_{\circ}^{\infty}\int_{\circ}^{\bar{F}_X(x)}dg(p)dx\\ &= \int_{\circ}^{۱}F_X^{-۱}(۱-p)dg(p)\\ &= \int_{\circ}^{۱}F_X^{-۱}(p)dg(۱-p).\end{aligned} \tag{۳}$$

جهت مقایسه معیارهای مطلوبیت مورد انتظار و امیدریاضی تحریف‌شده اگر به دو رابطه‌ی (۲) و (۳) دقت کنیم، واضح است که در معیار مطلوبیت موردانتظار تبدیل بر روی مقادیر سرمایه $(F^{-۱}(p))$ و در معیار امیدریاضی تحریف‌شده تبدیل بر روی مقادیر احتمال (p) صورت می‌گیرد. ازآنجایی‌که یک شخص محافظه‌کار احتمال وقوع سود یا افزایش زیاد سرمایه را کمتر از مقدار واقعی آن و بالعکس احتمال زیان و یا کاهش بالای سرمایه را بیش از مقدار واقعی آن در نظر می‌گیرد، می‌توان مانند معیار مطلوبیت مورد انتظار مفاهیم مخاطره‌گریزی، مخاطره‌پذیری و مخاطره خنثی بودن تصمیم‌گیرنده را به‌صورت زیر بیان نمود ([۲]).

تصمیم‌گیرنده مخاطره‌گریز است $\Longleftrightarrow$ g یک تابع کوژ باشد،

تصمیم‌گیرنده مخاطره پذیر است $\Longleftrightarrow$ g یک تابع کاو باشد،

تصمیم‌گیرنده مخاطره‌خنثی است $\Longleftrightarrow$ $g(x)=x$

در نظریه‌ی مخاطره، شاخص‌های دیگری برای اتخاذ یک تصمیم مناسب مورداستفاده قرار می‌گیرد که برخی از رایج‌ترین آن‌ها را می‌توان به‌صورت امید ریاضی تحریف‌شده با انتخاب تابع تحریف مناسب نوشت. در زیر به بیان برخی از آن‌ها می‌پردازیم.

[19] distortion function

□ اگر برای $0 \leq p \leq 1$ تعریف کنیم

$$g(x)=\begin{cases}1 & x\leq 1-p\\ 0 & x>1-p.\end{cases}$$

آنگاه با توجه به رابطه (۳) داریم

$$H_g[X]=F_X^{-1}(p).$$

در نظریه مخاطره این معیار را مقدار در معرض مخاطره [20] در سطح p می‌نامند و به‌عنوان یک شاخص مهم و اثرگذار در تصمیم‌های مالی و بیمه‌ای مورداستفاده قرار می‌گیرد.

□ اگر برای $0 \leq p \leq 1$، تعریف کنیم $g(x)=\min\{\frac{x}{1-p},1\}$، در این صورت

$$H_g[X]=\frac{1}{1-p}\int_0^{1-p}F_X^{-1}(1-\xi)d\xi$$

که آن را مقدار دم در معرض خطر [21] در سطح p می‌نامند. این شاخص برای مقایسه رفتار دمی مخاطره‌ها مورداستفاده قرار می‌گیرد.

□ اگر برای $\xi > 0$، تعریف کنیم $g(x)=x^{\frac{1}{\xi}}$، آنگاه

$$H_g[X] = \int_0^\infty (\bar{F}_X(x))^{\frac{1}{\xi}}dx.$$

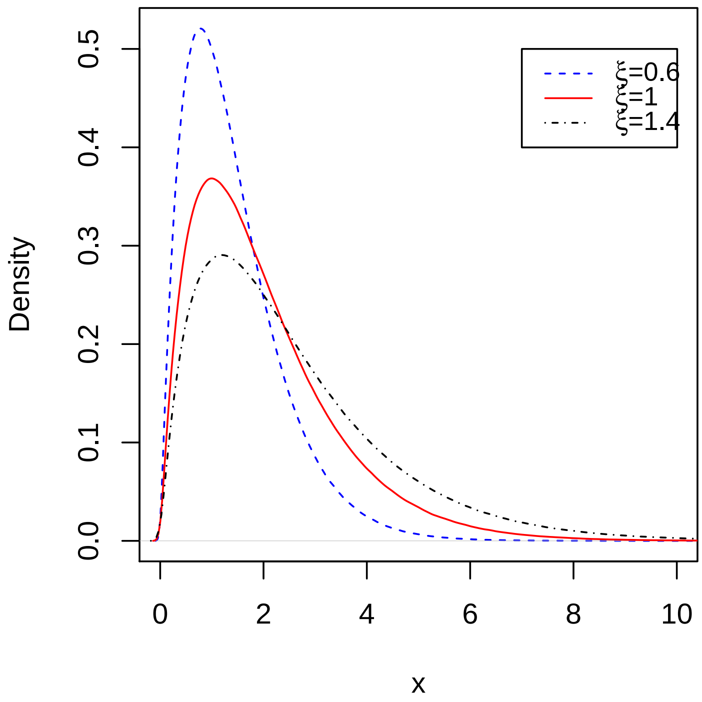
تبدیل حاصل از این روش را تبدیل نرخ خطر متناسب [22] می‌نامند. در این تبدیل، اگر $\xi > 1$، مقادیر احتمال در دم با به توان $\frac{1}{\xi}$ رسیدن افزایش می‌یابند. در این حالت، اگر X یک مخاطره باشد، این تبدیل حالت‌های پرخطر را برجسته‌تر می‌کند و هر چه مقدار ξ بیشتر باشد این افزایش بیشتر خواهد شد. بنابراین، پارامتر ξ بازتاب‌دهنده‌ی شدت مخاطره‌گریزی فرد است. به‌طور مشابه برای $0 < \xi < 1$، می‌توان ملاحظه کرد که با کاهش ξ، شخص مخاطره‌پذیرتر خواهد شد. برای توضیحات بیشتر در مورد این تبدیل و کاربردهای آن می‌توان به [۱۳] مراجعه نمود.

به‌منظور درک بهتر تأثیر تابع تحریف بر میزان مخاطره‌گریزی، فرض کنید X یک متغیر تصادفی گاما با پارامتر شکل ۲ و پارامتر مقیاس ۱ و همچنین مخاطره پیش‌روی یک بیمه‌گزار با تابع تحریف $g(x)=x^{1/\xi}$ باشد. اگر X_ξ مخاطره‌ای با تابع بقای $(\bar{F}_X(x))^{1/\xi}$ باشد، آنگاه می‌دانیم

$$H_g(X)=E(X_\xi).$$

در شکل ۲، توزیع X_ξ برای $\xi = 0/6, 1, 1/4$ رسم شده است. با توجه به شکل، به‌وضوح می‌توان تأثیر تابع تحریف را بر مخاطره‌پذیری ملاحظه کرد.

[20] value at risk
[21] tail value at risk
[22] proportional hazard transform



شکل ۲ تابع چگالی متغیر تصادفی X_ξ

۱.۴ محاسبه‌ی حق بیمه با استفاده از معیار امیدریاضی کج‌شده

فرض کنید یک تصمیم‌گیرنده دارای تابع تحریف g باشد. تحت فرض‌ها و نمادهای بخش ۲.۳، بر اساس معیار امید ریاضی تحریف‌شده، شخص بیمه‌گذار مایل به بیمه کردن مخاطره پیش‌رو X با حق بیمه P است اگر

$$H_g[W-X_R-P]\geq H_g[W-X]$$

و یا به‌طور معادل

$$W-P-H_{\bar{g}}[X_R]\geq W-H_{\bar{g}}[X]$$

که در آن $\bar{g}(x)=1-g(1-x)$ را دوگان[23] g می‌نامند که خود نیز یک تابع تحریف می‌باشد. بنابراین حق بیمه پذیرفتنی از نگاه بیمه‌گزار در رابطه‌ی زیر صدق می‌کند.

$$P\leq H_{\bar{g}}[X]-H_{\bar{g}}[X_R].$$

در حالت خاص اگر $X_R=0$ باشد، آنگاه

$$P\leq H_{\bar{g}}[X].$$

با توجه به مطالب بالا، حداکثر حق‌بیمه پذیرفتنی (P^+) از نگاه بیمه‌گزار به‌صورت

$$P^+=H_{\bar{g}}[X]-H_{\bar{g}}[X_R].$$

محاسبه می‌شود که در حالت خاص اگر $X_R=0$ آنگاه

$$P^+=H_{\bar{g}}[X].$$

اگر g_1 تابع تحریف بیمه‌گر باشد، به‌طور مشابه، از نگاه بیمه‌گر حق‌بیمه P پذیرفتنی است هرگاه

$$H_{g_1}[W'-X_c+P]\geq H_{g_1}[W']$$

و یا به‌طور معادل

$$P\geq H_{\bar{g}_1}[X_c].$$

بنابراین حداقل مقدار حق‌بیمه پذیرفتنی از نگاه بیمه‌گزار (P^-) به‌صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$P^-=H_{\bar{g}_1}[X_c].$$

[23] dual

اکنون، بر اساس معیار امید ریاضی تحریف‌شده، با حق‌بیمه P مخاطره X تحت پوشش بیمه قرار می‌گیرد هرگاه $P^- < P < P^+$.

این بخش را با بیان رهیافت معیار امیدریاضی تحریف‌شده برای مثال‌های مطرح‌شده در بخش امیدریاضی به پایان می‌رسانیم.

مثال ۳.۴. در مثال ۱.۲، فرض کنید افراد شرکت‌کننده در بازی دارای تابع تحریف نرخ خطر متناسب باشند. در جدول ۵ به ازای مقادیر مختلف پارامتر تابع تحریف، ξ، مقادیر محاسبه‌شده P^+ از رابطه

$$E(X_\xi) = P^+ \tag{۴}$$

آورده شده است که در آن

x	$\circ$	$۲\circ$
$P(X_\xi = x)$	$۱-(\frac{۱}{۲})^{\frac{۱}{\xi}}$	$(\frac{۱}{۲})^{\frac{۱}{\xi}}$

در این مثال، متغیر تصادفی پیش‌رو میزان سود حاصل از شرکت در بازی است و با توجه به جدول ۵ مشخص است که با کاهش پارامتر ξ تمایل افراد به شرکت در بازی کاهش می‌یابد. بنابراین، شرکت اکثریت افراد با مبلغی کمتر از مقدار امید ریاضی سود (شکل ۱)، نشان‌دهنده مخاطره‌گریزی آن‌ها است که می‌توان این رفتار را با تابع تحریف مناسب توصیف کرد.

جدول ۵. مقادیر P^+ برای پارامترهای مختلف تابع تحریف نرخ خطر متناسب در مثال ۳.۴.

ξ	۰٫۲۵	۰٫۵	۰٫۷۵	۱	۱٫۵	۲
P^+	۱٫۲۵	۵	۷٫۹۳	۱۰	۱۲٫۵۹	۱۴٫۱۴

مثال ۴.۴. در مثال ۲.۲، فرض کنید فرد مواجه با مخاطره دارای تابع تحریف نرخ خطر متناسب با پارامتر ξ باشد. به ازای مقادیر مختلف ξ و $b = ۱۰۰۰۰$، P^+ از رابطه (۴) که در آن

x	$\circ$	b
$P(X_\xi = x)$	$۱-(\circ/\circ ۱)^{\frac{۱}{\xi}}$	$(/\circ ۱)^{\frac{۱}{\xi}}$

محاسبه و در جدول ۶ آورده شده است. نتایج این جدول نشان می‌دهد با افزایش ξ مخاطره‌گریزی افراد افزایش‌یافته و با حق بیمه بیشتری تمایل به بیمه نمودن مخاطره خود را دارند. به‌عنوان‌مثال، برای $\xi = ۲$، فرد با حق بیمه ۱۰۰۰ که بیشتر از مقدار امیدریاضی زیان نیز است تمایل به بیمه کردن زیان پیش‌رو را دارد. بنابراین، تصمیم‌های اتخاذی افراد در عمل را می‌توان با انتخاب تابع تحریف مناسب که بیانگر میزان مخاطره‌گریزی آن‌ها است به‌خوبی تبیین کرد.

جدول ۶. مقادیر P^+ برای پارامترهای مختلف تابع تحریف نرخ خطر متناسب در مثال ۴.۴.

ξ	۱	۱٫۵	۲	۲٫۵	۳
P^+	۱۰۰	۴۶۴٫۱۶	۱۰۰۰	۱۵۸۴٫۸۹	۲۱۵۴٫۴۳

مثال زیر به راه‌حل معیار امیدریاضی تحریف‌شده برای پارادوکس سن‌پترزبورگ می‌پردازد.

مثال ۵.۴. در مثال پارادوکس سن‌پترزبورگ، فرض کنید شخص تصمیم‌گیرنده دارای تابع تحریف نرخ خطر متناسب با پارامتر ξ باشد. بر این اساس، حداکثر مقدار پذیرفتنی حق شرکت در بازی، P^+، از رابطه

$$P^+ = E(X_\xi)$$

به دست می‌آید که در آن

$$P(X_\xi = ۲^n) = (\frac{۱}{۲})^{\frac{n}{\xi}}, \quad n = ۱, ۲, \ldots$$

به‌سادگی می‌توان نشان داد

$$P^+ = \frac{۲(۱-(\frac{۱}{۲})^{\frac{۱}{\xi}})}{۱-۲(\frac{۱}{۲})^{\frac{۱}{\xi}}}.$$

در جدول ۷، مقادیر P^+ به ازای مقادیر مختلف ξ محاسبه‌شده است. نتایج به‌دست‌آمده در این رهیافت با واقعیت عملی تصمیم‌گیرندگان سازگار به نظر می‌رسد که می‌تواند راه‌حلی برای این پارادوکس در نظر گرفته شود.

جدول ۷. مقادیر P^+ برای پارامترهای مختلف تابع تحریف نرخ خطر متناسب در پارادوکس سن‌پترزبورگ

ξ	۰٫۵	۰٫۶	۰٫۷	۰٫۸	۰٫۹
P^+	۳	۳٫۶۳	۵٫۲۵	۸٫۱۴	۱۷٫۶۶

مراجع

[1] Arrow, K. J. (1965). Aspects of the Theory of Risk Bearing. *The Theory of Risk Aversion.* Helsinki: Yrjo Jahnssonin Saatio.

[2] Denuit, M., Dhaene, J., Goovaerts, M. and Kaas, R. (2005). *Actuarial theory for dependent risks: Measures, orders and models.* New York: Wiley.

[3] Gerber, H. and Parfumi, G. (1998). Utility functions: From risk theory to finance. *North Amer. Actuarial J.* **2**, **3** 74-100.

[4] Kaas, R. Goovaerts, M.J., Dhaene , J. and Denuit, M. (2001). *Modern Actuarial Risk Theory.* Kluwer Academic Publishers.

[5] Mongin, P. (2019). The allais paradox: What it became, what it really was, what it now suggests to us. *Economics and Philosophy.* **35**, **3** 423-459.

[6] Peterson, M. (2019). The St. Petersburg Paradox. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. In E. Zalta (Ed.). Retrieved from https://plato.stanford.edu/entries/paradox-stpetersburg.

[7] Pratt, J. W. (1964). Risk Aversion in the Small and in the Large. *Econometrica* , **32**, **1/2**, 122-136.

[8] Qutreville, J. F. (1998). *Theory and practice of insurance.* Kluwer Academic Publishing.

[9] Rotar, V. I. (2007). *Actuarial Models: The Mathematics of Insurance*. Springer Netherlands.

[10] Steele, K. and Stefansson, H. O. (2020) Decision Theory. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. In E. Zalta (Ed.). Retrieved from https://plato.stanford.edu/archives/win2020/entries/decision-theory.

[11] Thomas, P. (2016). Measuring risk-aversion: The challenge. *Measurement*, **79**, 285-301.

[12] Von Neumann, J. and Morgenstern, O. (1947). *Theory of Games and Economic Behavior.* Princeton University Press.

[13] Wang, S. (2000). A class of distortion operators for pricing financial and insurance risks. *Journal of Risk and Insurance.* **67**, **1**. 15- 36.

[14] Yaari, M.E. (1987). The dual theory of choice under risk. *Econometrica* , **55**, 95-115.