

برآورد پارامتر تنش مقاومت در توزیع لامبدای تعمیم یافته

ابوذر بازیاری^۱

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۰۷/۰۲

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۰۸/۱۹

چکیده:

در این مقاله، ابتدا به معرفی توزیع لامبدای تعمیم یافته و ویژگی های این توزیع پرداخته شده است. مفهوم تنش مقاومت به طور کامل توضیح داده شده و قابلیت اعتماد یک سیستم از دیدگاه تنش مقاومت مورد بررسی قرار می گیرد. در ادامه به محاسبه فرم ریاضی پارامتر تنش مقاومت در توزیع لامبدای تعمیم یافته پرداخته شده است. برآورد پارامترها با روش گشتاورها مورد بررسی قرار گرفته و نیز به ازای مقادیر مختلف پارامترهای توزیع لامبدای تعمیم یافته، نمودار تابع چگالی لامبدای تعمیم یافته رسم و پارامتر تنش مقاومت محاسبه می شود. با یک مثال واقعی کاربرد نتایج نشان داده شده است.

واژه های کلیدی: توزیع لامبدای تعمیم یافته، پارامتر تنش مقاومت، پارامترهای مکان و مقیاس، سیستم های مهندسی

۱ مقدمه

توزیع یکنواخت روی بازه $(0, 1)$ باشد، آنگاه با در نظر گرفتن تبدیل

$$X = R(U) = \lambda_1 + (U^{\lambda_2} - (1-U)^{\lambda_2}) / \lambda_2, \quad 0 \leq u \leq 1 \quad (1)$$

با توجه به رابطه (1) ، تابع چگالی لامبدای تعمیم یافته توسط فریمر و همکاران^۵ (۱۹۸۸)، به صورت:

$$f(x; \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 x^{\lambda_2-1} + \lambda_4 (1-x)^{\lambda_2-1}}, \quad (2)$$

به دست آمد، که در آن λ_1 پارامتر مکان، λ_2 پارامتر مقیاس، λ_3 و λ_4 پارامترهای شکل می باشند. اگرچه پارامتر λ_1 در رابطه (2) ناپدید شده است اما تابع چگالی تابعی از λ_1 است، زیرا تابع چگالی تابعی از متغیر تصادفی است.

با توجه به اینکه $R(U)$ یک تابع افزایشی از U است، بنابراین کران های پایین و بالای X به ترتیب روی $R(0)$ و $R(1)$ رخ می دهند. واضح است که این کران ها وابسته به مقادیر این پارامترها هستند. تابع چگالی اخیر برای تمام مقادیر مختلف پارامترهای شکل، λ_3 و λ_4 سره نمی باشد. معکوس تابع توزیع لامبدای تعمیم یافته به صورت

$$H(x; \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = \lambda_1 + \frac{x^{\lambda_2} - (1-x)^{\lambda_2}}{\lambda_2},$$

تعریف می شود. اگر $\lambda_1 = 0$ و $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda$ باشند، آنگاه توزیع لامبدا (توزیع لامبدای توکی) به دست می آید.

قابلیت اعتماد^۲ در سیستم های مهندسی از اهمیت بسزایی برخوردار می باشد. دانستن توزیع آماری^۳ مؤلفه هایی که در سیستم در حال کار می باشند، یکی از موارد قابل لحاظ در محاسبه قابلیت اعتماد آن سیستم است. سیستم های موازی، سری و بسیاری دیگر از سیستم ها در شاخه های مهندسی و صنایع کاربرد فراوان دارند. یک سیستم در حال کار همواره مؤلفه های آن با فشارها و تنش هایی مواجه می شوند که این مؤلفه ها در برابر فشارهای وارده و تهاجمات مقاومت می کنند تا سیستم به فعالیت خود ادامه دهد. توزیع لامبدای تعمیم یافته^۴ یک توزیع آماری مفید برای آزمون و برازش داده ها است. برازش داده ها به یک توزیع احتمالی یکی از مسائل مهم در تحلیل داده های آماری بوده که بایستی به اندازه کافی به داده های جمع آوری شده متناسب و نزدیک باشد. در این زمینه مطالب قابل توجهی وجود دارد و تحقیقات زیادی توسط نویسندگان و محققان انجام شده است. یکی از توزیع های کاربردی که اخیراً مورد توجه آماردانان قرار گرفته، توزیع لامبدای تعمیم یافته می باشد. این توزیع یک توزیع پارامتری انعطاف پذیر برای داده های تک متغیره است.

تابع چگالی متغیر لامبدای تعمیم یافته از روی متغیر تصادفی یکنواخت ساخته می شود. فرض کنید U یک متغیر تصادفی دارای

^۱ گروه آمار، دانشگاه خلیج فارس بوشهر (نویسنده مسئول: ab_bazari@yahoo.com)

^۲ Reliability

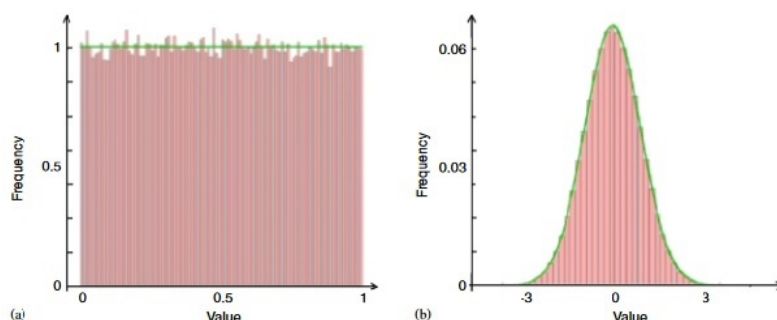
^۳ Statistical Distribution

^۴ Generalized lambda distribution

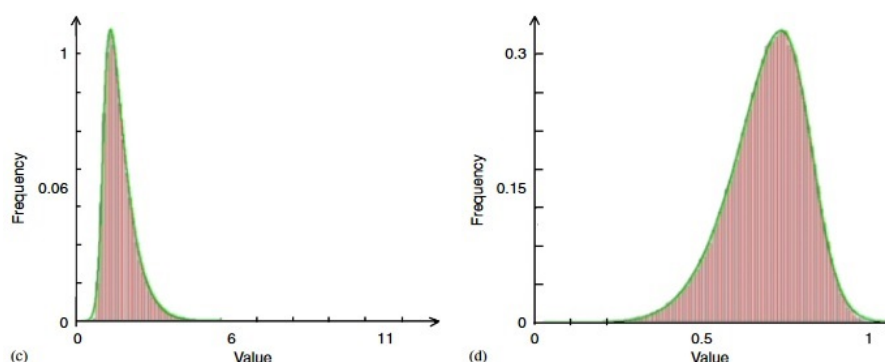
^۵ Freimer et al.

انعطاف پذیر بودن آن با وجود چهار پارامتر در این توزیع مشخص می شود، به طوری که می توان داده هایی از جوامعی با توزیع هایی مانند توزیع گاوسی، یکنواخت، لاگ نرمال و وایبول را توسط این توزیع برازش داد. (شکل های ۱ و ۲)

۲



شکل ۱. مدل توزیع لامبدای تعمیم یافته برای توزیع های یکنواخت و گاوسی



شکل ۲. مدل توزیع لامبدای تعمیم یافته برای توزیع های لاگ نرمال و وایبول

توزیع لامبدای تعمیم یافته مورد بررسی قرار می گیرد و پارامتر تنش مقاومت با روش های عددی محاسبه می شود. بحث و نتیجه گیری در بخش هفتم داده شده است. تمام محاسبات عددی با استفاده از نرم افزار R انجام شده اند.

در بخش دوم، پیشینه موضوع بیان شده است. در بخش سوم، دامنه پارامترهای توزیع لامبدای تعمیم یافته همراه با مقادیر مینیم و ماکسیم آن مورد بررسی قرار گرفته است. روش گشتاورها برای برآورد کردن پارامترهای این توزیع توضیح داده شده و همچنین تابع چگالی برای مقادیر مختلف عددی از پارامترها رسم شده است. نشان داده می شود که این توزیع چهار پارامتری فرم های متفاوتی را به خودش می گیرد و می توان با انتخاب پارامترهای مناسب، توزیع های U شکل یا J شکل یا حتی توزیع های متقارن را به دست آورد.

۲ پیشینه موضوع

اصل توزیع لامبدا توسط توکی^۶ (۱۹۶۲) مشخص و مورد بررسی قرار گرفت. از اوایل سال ۱۹۷۰ میلادی توزیع لامبدا تعمیم یافته برای برازش داده ها مورد توجه قرار گرفت. توزیع لامبدا توسط جویئر و روسنبلات^۷ (۱۹۷۱) و فیلین^۸ (۱۹۷۵) تعمیم داده شد. رامبرگ و اشمیسر^۹ (۱۹۷۴) و رامبرگ و همکاران^{۱۰} (۱۹۷۹) ویژگی های توزیع لامبدا تعمیم یافته را مورد بررسی قرار دادند. ریسر (۱۹۸۰) از توزیع

در بخش چهارم، مفهوم تنش مقاومت توضیح داده شده و قابلیت اعتماد یک سیستم از دیدگاه تنش مقاومت مورد بررسی قرار می گیرد. در بخش پنجم، فرم ریاضی پارامتر تنش مقاومت در توزیع لامبدای تعمیم یافته تعیین و به ازای مقادیر مختلف پارامترهای توزیع لامبدای تعمیم یافته، پارامتر تنش مقاومت محاسبه شده است. در بخش ششم، با یک مثال با داده های واقعی نتایج به دست آمده در

⁶Tukey

⁷Joiner and Rosenblatt

⁸Filliben

⁹Ramberg and Schmeiser

¹⁰Ramberg et al.

و گوپتا^{۲۲} (۲۰۰۵) پارامتر تنش مقاومت را برای توزیع نمایی تعمیم یافته به دست آوردند. همچنین کوندو و گوپتا (۲۰۰۶) پارامتر تنش مقاومت را برای توزیع وایبول مورد بررسی قرار دادند. همچنین کوندو و گوپتا (۲۰۰۹) این کار را برای توزیع وایبول سه پارامتری انجام دادند. لازم به توضیح است تا آنجا که نویسنده مقاله اطلاع دارد محاسبه پارامتر تنش مقاومت در توزیع لامبدای تعمیم یافته اولین بار در مقاله حاضر مورد بررسی قرار گرفته است.

۳ دامنه پارامترهای توزیع لامبدای تعمیم یافته و روش گشتاورها برای برآورد پارامترها

رامبرگ و اشمیس (۱۹۷۴) نشان دادند که فقط در شش ناحیه از فضای پارامتری مقدار تابع چگالی احتمال رابطه (۲) وجود دارد. مقادیر تابع چگالی و نواحی مربوطه به ترتیب در جدول ۱ و نمودار ۳ آورده شده اند.

توزیع لامبدای تعمیم یافته در زمینه های مختلف علمی بکار می رود. به عنوان مثال، اوستورک و دال^{۲۳} (۱۹۸۲) از این توزیع برای برازش داده ها در علم هواشناسی استفاده کردند. دنگیز^{۲۴} (۱۹۸۸) از توزیع لامبدای تعمیم یافته در شبیه سازی سیستم های صف استفاده کرد. برای مطالعه در مورد شبکه های عصبی با به کارگیری توزیع لامبدای تعمیم یافته به کاروان و همکاران^{۲۵} (۲۰۰۰) رجوع شود. از این توزیع برای قیمت گذاری های مالی و بازار اقتصادی جهت کنترل تورم استفاده می شود (کورادو^{۲۶}، ۲۰۰۱). همچنین تارسیانو^{۲۷} (۲۰۰۴) به کاربرد توزیع لامبدای تعمیم یافته در مسائل مالی توجه کرد.

لامبدا تعمیم یافته برای برازش داده های صنعتی با توجه به انحراف داده ها از حالت نرمال استفاده کرد. رامبرگ و همکاران (۱۹۷۹)، برگوین^{۱۱} (۱۹۹۳) و کاریان و دودیچ^{۱۲} (۲۰۰۰) برای برآورد پارامترهای توزیع لامبدای تعمیم یافته از روش گشتاورها استفاده کردند. توزیع لامبدای تعمیم یافته دومتغیره همراه با مثال های کاربردی آن توسط بکویت و دودیچ^{۱۳} (۱۹۹۶) مورد مطالعه قرار گرفت. سو^{۱۴} (۲۰۰۶) از توزیع لامبدای تعمیم یافته برای برازش روی داده های دو مدی استفاده و با روش ماکسیمم درستنمایی پارامترهای آن را برآورد کرد. سو (۲۰۰۷b) توزیع لامبدای تعمیم یافته را با استفاده از نرم افزار R مورد تجزیه و تحلیل قرار داد و از روش ماکسیمم درستنمایی برای برآورد پارامترهای آن استفاده کرد. سو (۲۰۰۷a) از توزیع لامبدای تعمیم یافته برای برازش روی داده های تک مدی استفاده و با روش ماکسیمم درستنمایی پارامترهای آن را برآورد کرد. کینک و مک کیلوری^{۱۵} (۲۰۰۷) روش های مناسب را برای برازش داده ها با استفاده از توزیع لامبدای تعمیم یافته با پارامترهای مکانی و مقیاسی مورد بررسی قرار دادند. برای اطلاع بیشتر در مورد کاربرد توزیع لامبدای تعمیم یافته به سو (۲۰۱۰) رجوع شود. چالابی و همکاران^{۱۶} (۲۰۱۰) از توزیع لامبدای تعمیم یافته برای برازش داده های مالی استفاده کردند. کرلو و مترلیوز^{۱۷} (۲۰۱۶)، به بررسی برآورد پارامترهای مدل توزیع لامبدای تعمیم یافته پرداختند. آلدنی و همکاران^{۱۸} (۲۰۱۷)، از توزیع لامبدای تعمیم یافته برای یافتن توزیع های دیگری استفاده کردند. ددوواکومارا و همکاران^{۱۹} (۲۰۱۹)، یک روش مناسب را با استفاده از توزیع لامبدای تعمیم یافته به یک مدل ویژه استفاده کردند.

برای اطلاع بیشتر در مورد پارامتر تنش مقاومت^{۲۰} و کاربرد آن می توان به کوتز و همکاران^{۲۱} (۲۰۰۳) رجوع کرد. البته لازم به توضیح است که پارامتر تنش مقاومت توسط نویسندگان دیگری برای توزیع های آماری متفاوتی محاسبه شده است. برای مثال کوندو

¹¹Bergevin

¹²Karian and Dudevicz

¹³Beckwitha and Dudevicz

¹⁴Su

¹⁵King and MacGillivray

¹⁶Chalabi, et al.

¹⁷Corlu and Meterellioz

¹⁸Aldeni et al.

¹⁹Dedduwakumara et al.

²⁰Stress strength parameter

²¹Kotz et al.

²²Kundu and Gupta

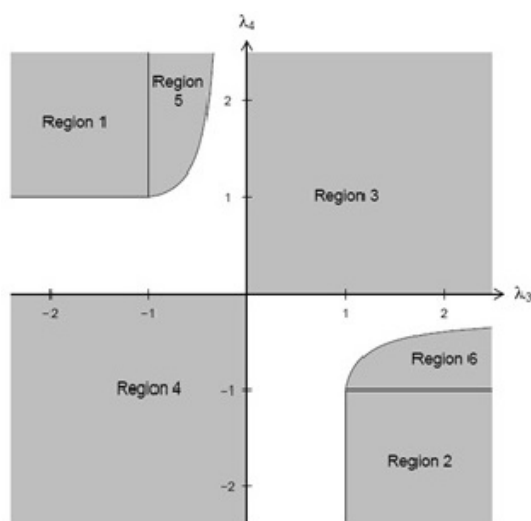
²³Ozturk and Dale

²⁴Dengiz

²⁵Karvanen et al.

²⁶Corrado

²⁷Tarsitano



شکل ۳. ناحیه پارامتری توزیع لامبدای تعمیم یافته در پارامترهای λ_3 و λ_4

جدول ۱. دامنه پارامترهای چگالی لامبدای تعمیم یافته و مقادیر مینیم و ماکسیم آن

ناحیه	λ_2	λ_3	λ_4	مینیم	ماکسیم
۵, ۱	< 0	< -1	> 1	$-\infty$	$\lambda_1 + \frac{1}{\lambda_2}$
۶, ۲	< 0	> 1	< -1	$\lambda_1 - \frac{1}{\lambda_2}$	∞
۳	> 0	> 0	> 0	$\lambda_1 - \frac{1}{\lambda_2}$	$\lambda_1 + \frac{1}{\lambda_2}$
	> 0	$= 0$	> 0	λ_1	$\lambda_1 + \frac{1}{\lambda_2}$
	> 0	> 0	$= 0$	$\lambda_1 - \frac{1}{\lambda_2}$	λ_1
۴	< 0	< 0	< 0	$-\infty$	∞
	< 0	$= 0$	< 0	λ_1	∞
	< 0	$= 0$	< 0	$-\infty$	λ_2

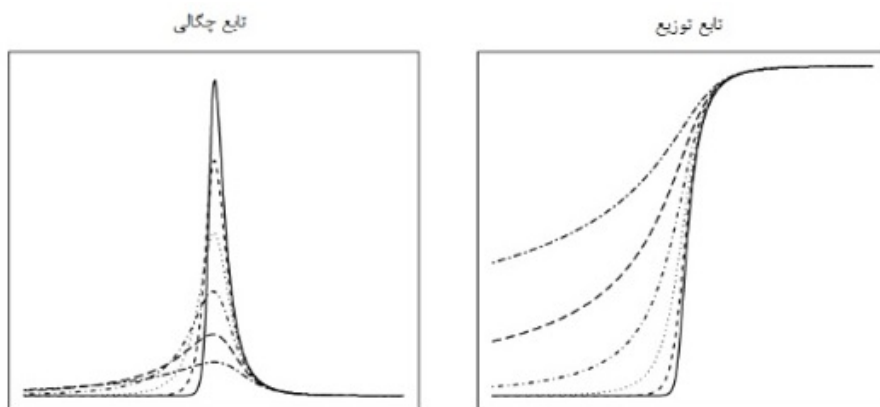
بیگلر و همکاران (۲۰۰۶) از این توزیع همراه با آنالیز روش

بوت استرپ (خودگردان) برای پیش بینی طول عمر مواد و محاسبه بازه های اطمینان در سطوح مختلف معنی داری استفاده کردند. پارامترهای تابع چگالی رابطه (۱) که توسط رامبرگ و اشمیسر (۱۹۷۴) نشان داده شد، دارای شکل پیچیده و مشکلی می باشد. بنابراین فریمر و همکاران (۱۹۸۸) فرم جدیدی از چگالی توزیع لامبدای تعمیم یافته را برای از بین بردن محدودیت ها روی پارامترها

به صورت

$$f(x; \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = \lambda_1 + \frac{1}{\lambda_2} \left(\frac{x^{\lambda_2} - 1}{\lambda_3} - \frac{(1-x)^{\lambda_2} - 1}{\lambda_4} \right), \quad (3)$$

تعریف کردند. تابع چگالی رابطه (۲) برای تمام مقادیر پارامترها خوش تعریف می باشد. نمودار تابع چگالی رابطه (۲) و تابع توزیع آن با استفاده از نرم افزار R برای $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_4 = -\frac{1}{4}$ و $\lambda_3 = -\frac{1}{6}$, $-\frac{1}{8}$, $-\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{2}$, -1 , -2 به ازای مقادیر مختلف رسم و در نمودار ۴ نشان داده شده است.



شکل ۴. توابع چگالی و توزیع لامبدای تعمیم یافته به ازای مقادیر مختلف پارامترها λ_3 و λ_4

بوده و β نشان دهنده تابع بتا است. همچنین مقادیر چولگی و برجستگی از روابط

$$\begin{aligned}\alpha_3 &= \mu_3 / \sigma^3 \\ \alpha_4 &= \mu_4 / \sigma^4,\end{aligned}\quad (4)$$

به دست می آیند.

برای متغیرهای تصادفی $X_1, X_2, \dots, X_n$ گشتاورهای نمونه‌ای عبارت‌اند از:

$$\begin{aligned}\tilde{\mu}_1 &= \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \\ \tilde{\mu}_2 &= \tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2, \\ \tilde{\mu}_3 &= \frac{1}{(n\tilde{\sigma}^3)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3, \\ \tilde{\mu}_4 &= \frac{1}{(n\tilde{\sigma}^4)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4,\end{aligned}$$

که با حل معادلات

$$\mu_i = \tilde{\mu}_i \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (5)$$

می‌توان پارامترهای $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ و λ_4 را با روش گشتاورها برآورد کرد.

تابع چگالی رابطه (۲) برای پارامترهای داده شده در جدول ۲ رسم و نمودار آن‌ها در شکل ۵ نشان رسم شده‌اند. همان‌طور که در شکل ۵ دیده می‌شود این توزیع چهار پارامتری فرم‌های متفاوتی را به خودش می‌گیرد و می‌توان با انتخاب پارامترهای مناسب، توزیع‌های U شکل یا J شکل یا حتی توزیع‌های متقارن را به دست آورد.

بنا به رابطه (۱)، تقارن و شیب چگالی توزیع لامبدای تعمیم یافته به پارامترهای λ_3 و λ_4 وابسته است، به‌طوری‌که اگر این شاخص‌ها باهم برابر باشند، توزیع متقارن خواهد بود. حتی اگر یکی از این شاخص‌ها افزایش یابد، بازهم توزیع متقارن خواهد بود. شیب توزیع به هر دوی این پارامترها وابسته است، در حقیقت افزایش هر دو شاخص باهم باعث تولید یک توزیع متقارن با دم‌های باریک می‌شود. بنابراین تشخیص این پارامترها برای اطلاع از تقارن و شیب توزیع لازم و اساسی خواهد بود. محاسبه برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامترهای توزیع لامبدای تعمیم یافته کار سختی است، به دلیل اینکه این برآوردگرها دارای فرم‌های بسته‌ای نیستند. رامبرگ و اشمیس (۱۹۷۴) روابط زیر را برای میانگین، واریانس و گشتاورهای مرکزی سوم و چهارم به دست آوردند:

$$\begin{aligned}\mu_1 &= E(X) = \lambda_1 + A/\lambda_2 \\ \mu_2 &= \sigma^2 = E(X - \mu)^2 = (B - A^2)/\lambda_1^2 \\ \mu_3 &= E(X - E(X))^3/\sigma^3 = (C - 3AB + 2A^3)/\lambda_1^3\sigma^3 \\ \mu_4 &= E(X - E(X))^4/\sigma^4 = (D - 4AC + 6A^2B - 3A^4)/\lambda_1^4\sigma^4,\end{aligned}$$

که در آن

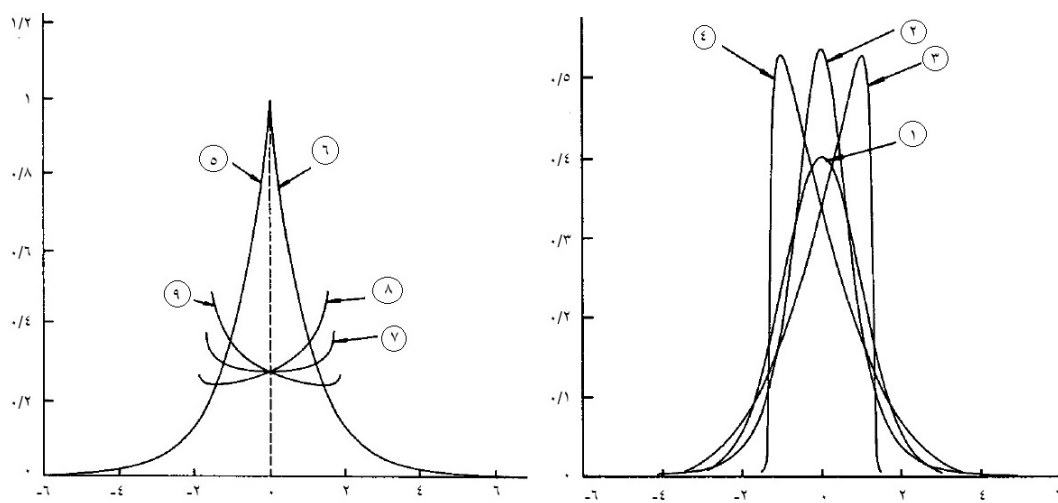
$$\begin{aligned}A &= 1/(1 + \lambda_3) - 1/(1 + \lambda_4), \\ B &= 1/(1 + 2\lambda_3) - 1/(1 + 2\lambda_4) - 2\beta(1 + \lambda_3, 1 + \lambda_4), \\ C &= 1/(1 + 3\lambda_3) - 1/(1 + 3\lambda_4) - 3\beta(1 + 2\lambda_3, 1 + \lambda_4) \\ &\quad + 3\beta(1 + \lambda_3, 1 + 2\lambda_4),\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}D &= 1/(1 + 4\lambda_3) - 1/(1 + 4\lambda_4) - 4\beta(1 + 3\lambda_3, 1 + \lambda_4) \\ &\quad + 6\beta(1 + 2\lambda_3, 1 + 2\lambda_4) \\ &\quad - 4\beta(1 + \lambda_3, 1 + 3\lambda_4),\end{aligned}$$

جدول ۲. مقادیر عددی پارامترهای استفاده شده برای رسم نمودار تابع چگالی

شماره شکل	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	α_3	α_4
۱	۰	۰/۱۹۷۵	۰/۱۳۴۹	۰/۱۳۴۹	۰	۳
۲	۰	-۰/۳۲۰۳	-۰/۱۳۵۹	-۰/۱۳۵۹	-۰/۱۳۵۹	۹
۳	۱/۱۸۷۲	۰/۱۷۶۱	۰/۲۶۸۳	۰/۰۰۴۸	-۰/۹۵۷	۳/۴۵۲
۴	-۱/۱۸۷۲	۰/۱۷۶۱	۰/۰۰۴۸	۰/۲۶۸۳	۰/۹۵۷	۳/۴۵۲
۵	-۰/۰۰۰۵۸	-۰/۰۰۰۵۸	-۰/۰۰۰۵۸	۰	-۲	۹
۶	۰	-۰/۰۰۰۵۸	۰	-۰/۰۰۰۵۸	۲	۹
۷	۰	۰/۵۹۴۳	۱/۴۵۰۱	۱/۴۵۰۱	۰	۱/۷۵۰
۸	-۰/۱۶۶۰	۰/۵۹۰۱	۱/۱۷۷۳	۱/۷۶۸۰	-۲	۱/۸
۹	۰/۱۶۶۰	۰/۵۹۰۱	۱/۷۶۸۰	۱/۱۷۷۳	۲	۱/۸



شکل ۵. توابع چگالی لامبدای تعمیم یافته به ازای مقادیر مختلف پارامترهای جدول ۲

۴ مفهوم تنش مقاومت

و مقاومت است و بر اساس آن می توان بقای یک سیستم را کنترل کرد. اصطلاح مدل تنش مقاومت اولین بار توسط چارج و هریس (۱۹۷۰) مطرح شد. پس از آن کارهای زیادی روی پارامتر تنش مقاومت بر اساس توزیع های مختلف و شرایط متفاوت حاکم بر متغیرهای تصادفی انجام شد. فرض کنید سیستمی دارای k مؤلفه است که هر یک دارای مقاومت های $Y_1, Y_2, \dots, Y_k$ و فشار یکسان X باشند. یکی از مدل های معروف در این حالت مدل سیستم موازی است که این سیستم با موفقیت عمل می کند هرگاه حداقل یکی از مؤلفه ها در سیستم باقی باشد. در صورتی که سیستم سری باشد، بایستی برای ادامه کار تمام مؤلفه های آن کار کنند. بنابراین قابلیت اعتماد در سیستم های موازی و سری به ترتیب

به طور کلی در یک سیستم حداقل دو عامل وجود دارد که یکی از آن ها بر دیگری تنش یا فشار وارد کرده و عامل دیگر مقاومت می کند. در این حالت پارامتر تنش مقاومت مطرح می شود. در سیستمی که به مؤلفه و اعضای آن فشار یا تنش وارد می شود، سیستم در مقابل آن فشار مقاومت می کند. بر اساس این الگو هر چه تنش ایجاد شده بر سیستم بیشتر باشد، سیستم با احتمال شکست بیشتری همراه خواهد بود. به عبارت دیگر سیستم تا زمانی به کار و فعالیت خود ادامه می دهد که مقاومت سیستم از تنش وارد شده بر آن بیشتر باشد. پارامتر تنش مقاومت R به صورت احتمال

$$R = P(X < Y) = \int_{-\infty}^{\infty} P(X < Y | Y = y) f_Y(y) dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^x g(y) dy \right) f(x) dx, \quad (6)$$

و

تعریف می شود، که در آن X متغیر تصادفی تنش، Y متغیر تصادفی مقاومت، $f(x)$ و $g(y)$ به ترتیب تابعی بر حسب متغیر تصادفی تنش

$$P(X < \min(Y_1, Y_2, \dots, Y_k)),$$

محاسبه مقادیر $F_X^{-1}(t)$ و $f_X(F_X^{-1}(t))$ در رابطه (۸) برای توزیع $GLD(\lambda_1, \lambda_2, \circ, \lambda_3)$ عبارت اند از:

$$F_X^{-1}(t) = \frac{1 - (1-t)^{\lambda_2}}{\lambda_2}, \quad (9)$$

$$f_X(F_X^{-1}(t)) = \frac{\lambda_2}{\lambda_2(1-t)^{\lambda_2-1}}. \quad (10)$$

همچنین با توجه به روابط (۹) و (۱۰) و توزیع $GLD(\lambda'_1, \lambda'_2, \circ, \lambda'_3)$ مقدار $f_Y(F_X^{-1}(t))$ عبارت است از:

$$f_Y\left(\frac{1 - (1-t)^{\lambda'_2}}{\lambda'_2}\right) = \frac{\lambda'_2}{\lambda'_2(1-t)^{\lambda'_2-1}}. \quad (11)$$

با تغییر متغیر $z = \frac{1 - (1-t)^{\lambda'_2}}{\lambda'_2}$ و جایگذاری در رابطه (۱۱)، خواهیم داشت:

$$f_Y(z) = \frac{\lambda'_2}{\lambda'_2(1 - \lambda'_2 z)^{\frac{\lambda'_2-1}{\lambda'_2}}}. \quad (12)$$

همچنین با تغییر متغیر $z = F_X^{-1}(t)$ در رابطه (۱۲)، خواهیم داشت:

$$f_Y(F_X^{-1}(t)) = \frac{\lambda'_2}{\lambda'_2} \left[1 - \frac{\lambda'_2}{\lambda_2} \left(1 - (1-t)^{\lambda_2} \right) \right]^{\frac{1-\lambda'_2}{\lambda'_2}}. \quad (13)$$

با قرار دادن روابط (۱۰) و (۱۳) در رابطه (۸)، خواهیم داشت:

$$1 - P(X < Y) = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda'_2} \times \frac{\lambda'_2}{\lambda_2} \right) \times \int_0^1 (1-t)^{\lambda_2} \left[1 - \frac{\lambda'_2}{\lambda_2} \left(1 - (1-t)^{\lambda_2} \right) \right]^{\frac{1-\lambda'_2}{\lambda'_2}} dt$$

با توجه به این رابطه، مقدار پارامتر تنش مقاومت، یعنی $R = P(X < Y)$ ، تحت پارامترهای مختلف از توزیع های X و Y محاسبه و در جدول ۳ آورده شده اند. البته در ادامه برای یک حالت خاص در جدول ۳ که در آن $\lambda_2 = -4$ ، $\lambda'_2 = -2$ ، $\lambda_3 = -6$ و $\lambda'_3 = -3$ است، مقدار پارامتر تنش مقاومت محاسبه شده است:

$$1 - P(X < Y) = \left(\frac{(-2)}{(-4)} \times \frac{(-4)}{(-6)} \right) \times \int_0^1 (1-t)^{-4} \left[1 - \frac{(-3)}{(-6)} \left(1 - (1-t)^{-4} \right) \right]^{\frac{-3}{-2}} dt = 0.72,$$

بنابراین $P(X < Y) = 0.28$ می باشد.

می باشد. البته لازم به ذکر است که سیستم های دیگری نیز وجود دارند که قابلیت اعتماد این سیستم ها با احتمالات متفاوتی اندازه گیری می شوند. به عنوان مثال سیستم هایی که باید S مؤلفه در حال کار باشند یا سیستم هایی که شامل m زیرسیستم مستقل هستند. در برخی از سیستم ها به یک مؤلفه دو نوع تنش با اندازه های متفاوت وارد می شود که در این حالت قابلیت اعتماد سیستم از طریق مقدار احتمال $P(X < Y < Z)$ ، که Y متغیر تصادفی مقاومت و X و Z متغیرهای تصادفی تنش می باشند، اندازه گیری می شود. به عنوان مثالی از این سیستم ها می توان به دستگاه هایی که باید بین دو دمای خاص کار کنند و یا سیستم بدن انسان که بین دو فشارخون مشخص در حال کار است، اشاره کرد. همچنین می توان سیستمی را در نظر گرفت که مؤلفه های تنش و مقاومت آن هرکدام شامل برداری از p متغیر تصادفی به صورت $X = (X_1, X_2, \dots, X_p)$ و $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_p)$ باشند، که در این حالت نیز پارامتر تنش مقاومت از احتمال $P(X < Y)$ محاسبه می شود.

۵ پارامتر تنش مقاومت در توزیع

لامبدای تعمیم یافته

در این بخش، به محاسبه پارامتر تنش مقاومت در توزیع لامبدای تعمیم یافته پرداخته شده است. البته با توجه به وجود پارامترهای توزیع لامبدای تعمیم یافته محاسبه پارامتر تنش مقاومت در آن به راحتی انجام نمی شود، بنابراین از روش های عددی یا شبیه سازی استفاده می شود. همان طور که گفته شد فقط در شش ناحیه از فضای پارامتری مقدار تابع چگالی احتمال رابطه (۱) وجود دارد که در این بخش فقط به محاسبه پارامتر تنش مقاومت در ناحیه چهار پرداخته شده است. فرض کنید متغیرهای تصادفی X و Y به ترتیب از توزیع های $GLD(\lambda_1, \lambda_2, \circ, \lambda_3)$ و $GLD(\lambda'_1, \lambda'_2, \circ, \lambda'_3)$ انتخاب شوند. آنگاه طبق رابطه (۶)

$$\begin{aligned} 1 - P(X < Y) &= P(X > Y) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} P(X > Y | Y = y) f_Y(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} P(1 - F_X(y)) f_Y(y) dy, \quad (7) \end{aligned}$$

خواهد بود. با تغییر متغیر $t = F_X(y)$ خواهیم داشت:

$$1 - P(X < Y) = \int_0^1 (1-t) \frac{f_Y(F_X^{-1}(t))}{f_X(F_X^{-1}(t))} dt. \quad (8)$$

با توجه به اینکه در ناحیه چهار از فضای پارامتری توزیع لامبدای تعمیم یافته، λ_3 شامل تمام مقادیر است، بنابراین بدون اینکه از کلیت مسئله کم شود، $\lambda_3 = 0$ اختیار می شود. به راحتی با کمی

جدول ۳. مقادیر عددی پارامتر تنش مقاومت در توزیع لامبدای

تعمیم یافته تحت پارامترهای مختلف

λ_2	λ_4	λ'_2	λ'_4	$R = P(X < Y)$
-۶	-۴	-۳	-۲	۰/۲۸
-۵	-۳	-۲	-۱	۰/۵۱
-۴	-۳	-۲	-۱	۰/۷۵
-۴	-۳	-۱	-۱	۰/۴۶
-۴	-۲	-۲	-۱	۰/۳۲
-۳	-۳	-۲	-۲	۰/۴۱
-۳	-۳	-۱	-۱	۰/۳۸
-۲	-۱	-۲	-۴	۰/۸
-۱	-۲	-۳	-۱	۰/۲

در این بخش، با یک مثال واقعی کاربرد مطالب گفته شده در توزیع لامبدای تعمیم یافته نشان داده شده و پارامتر تنش مقاومت در آن محاسبه می شود. کاریان و دودیچ (۱۹۹۹) در یک بررسی علمی روی ۲۱ انسان با تحصیلات فوق لیسانس و دکتری در رشته های مختلف دانشگاهی، میزان ساعات مطالعه آن ها را در یک روز، همراه با اسکن از مغز آن ها برای تعیین میزان مقدار ماده خاکستری در مغزشان را اندازه گیری کردند. لازم به توضیح است که میزان ماده خاکستری در مغز انسان ها با همدیگر متفاوت است، بنابراین می تواند به عنوان یک متغیر تصادفی مورد استفاده قرار گیرد. داده های جمع آوری شده در جدول ۴ آورده شده اند.

جدول ۴. میزان ساعات مطالعه و مقدار ماده خاکستری در مغز افراد مورد مطالعه

افراد	میزان ساعات مطالعه افراد مورد مطالعه	مقدار ماده خاکستری در مغز افراد مورد مطالعه
۱	۷	۱۰۸/۷
۲	۶/۵	۱۰۷
۳	۷/۵	۱۱۰/۳
۴	۷	۱۱۰
۵	۶/۵	۱۱۳/۶
۶	۶	۹۹/۲
۷	۵/۵	۱۰۴/۵
۸	۷/۵	۱۰۸/۱
۹	۵	۱۰۷/۲
۱۰	۴/۵	۱۱۲
۱۱	۸	۱۱۵/۵
۱۲	۸/۵	۱۰۸/۴
۱۳	۴/۵	۱۱۳/۴
۱۴	۶/۵	۱۰۱/۲
۱۵	۵	۹۸/۴
۱۶	۴	۱۰۰/۹
۱۷	۳/۵	۱۰۷/۱
۱۸	۴/۵	۱۰۷/۱
۱۹	۷/۵	۱۰۸/۷
۲۰	۷	۱۰۲/۵
۲۱	۵	۱۰۳/۳

لامبدای تعمیم یافته

متغیرهای تصادفی X و Y به ترتیب میزان ساعت مطالعه افراد در روز و مقدار ماده خاکستری در مغز آن ها می باشند. کاریان و همکاران (۱۹۹۶) نشان دادند که متغیر تصادفی X دارای توزیع

$$GLD(122/133, 0/0637, 0/6378, 0/05478),$$

بوده که در آن $\lambda_1 = 122/133$ ، $\lambda_2 = 0/0637$ ، $\lambda_3 = 0/6378$ و $\lambda_4 = 0/05478$ و الجزار (۲۰۰۵) نشان

۷ بحث و نتیجه گیری

در این مقاله توزیع لامبدای تعمیم یافته، ویژگی های آن و مفهوم تنش مقاومت به طور کامل توضیح داده شد و قابلیت اعتماد یک سیستم از دیدگاه تنش مقاومت مورد مطالعه قرار گرفت. همچنین فرم ریاضی پارامتر تنش مقاومت در توزیع لامبدای تعمیم یافته محاسبه و به ازای مقادیر مختلف پارامترهای توزیع لامبدای تعمیم یافته، پارامتر تنش مقاومت محاسبه شد. با یک مثال واقعی مربوط به میزان ساعات مطالعه روزانه ۲۱ انسان با تحصیلات بالا برای رشته های مختلف دانشگاهی و میزان مقدار ماده خاکستری در مغز آن ها، با توجه به برازش توزیع لامبدای تعمیم یافته روی متغیرهای مورد نظر، مقدار پارامتر تنش مقاومت، $R = P(X < Y)$ ، محاسبه شد.

دادند که متغیر تصادفی Y دارای توزیع لامبدای تعمیم یافته $GLD(102/899, 0/0806, 0/1475, 0/8041)$ $\lambda'_1 = 0/8041$ و $\lambda'_2 = 0/1475$ ، $\lambda'_3 = 0/0806$ ، $102/899$ می باشد. با کمی محاسبه به راحتی دیده می شود که مقدار پارامتر تنش مقاومت، $P(X < Y)$ ، یعنی احتمال آنکه متغیر تصادفی X از متغیر تصادفی Y کمتر باشد، مطابق رابطه (۱۱) تحت پارامتر توزیع متغیرهای X و Y برای مقادیر $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ و λ_4 با حل انتگرال داده شده،

$$R = P(X < Y) = 0/67$$

می باشد.

مراجع

- [1] Aldeni, M., Lee, C., and Famoye, F. (2017). Families of distributions arising from the quantile of generalized lambda distribution, *Journal of Statistical Distributions and Applications*, 4:25, DOI 10.1186/s40488-017-0081-4.
- [2] Aljazar, L. (2005). Generalized Lambda Distribution and Estimation Parameters, M. S. Thesis, *Islamic University of Gaza*, <http://hdl.handle.net/20.500.12358/21338>.
- [3] Beckwitha N. B. and Dudewicz, E. J. (1996). A Bivariate Generalized Lambda Distribution (GLD-2) using Plackett's Method of Construction: Distribution, Examples and Applications, *American Journal of Mathematical and Management Sciences*, **16(3-4)**, 333-393.
- [4] Bergevin, R. J. (1993). An Analysis of the Generalized Lambda Distribution, Report number: A584262.
- [5] Bigerelle, M., Najjar, D. Fournier, B., Rupin, N. and Iost, A. (2006). Application of lambda distribution and bootstrap analysis to the prediction of fatigue lifetime and confidence intervals, *International Journal of Fatigue*, **28(3)**, 223-236.
- [6] Chalabi, Y., Scott, D. J. and Würtz, D. (2010). The Generalized Lambda Distribution as an Alternative to Model Financial Returns, <https://www.rmetrics.org/sites/default/files/2009-01-glambdaDist.pdf>.
- [7] Church, J. D. and Harris, B. (1970). The Estimation of Reliability from Stress-Strength Relationships, *Technometrics*, **12(1)**, 49-54.
- [8] Corlu, C. G., and Meterelliyo, M. (2016). Estimating the parameters of the generalized lambda distribution: Which method performs best? *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, **45(7)**, 2276-2296.
- [9] Corrado, C. J. (2001). Option pricing on the generalized lambda distribution, *Journal of Futures Markets*, **21(3)**, 213-236.
- [10] Dedduwakumara, D. S., Prendergast, L. A., and Staudte, R. G. (2019). A simple and efficient method for finding the closest generalized lambda distribution to a specific model, *Cogent Mathematics & Statistics*, **6(1)**, 1602929.
- [11] Dengiz, B. (1988). The generalized lambda distribution in simulation of M/M/1 queue systems, *Journal of the Faculty of Engineering and Architecture of Gazi University*, **3**, 161-171.
- [12] Filliben, J. J. (1975). The probability plot correlation test for normality, *Technometrics*, **17(1)**, 111-117.

- [13] Freimer, M., Kollia, G., Mudholkar, G. S. and Lin, C. (1988). A study of the generalized Tukey lambda, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **17(10)**, 3547-3567.
- [14] Joiner, B. L and Rosenblatt, J. R. (1971). Some properties of the range in samples Tukey's symmetric lambda distributions, *Journal of the American Statistical Association*, **66(334)**, 394-399.
- [15] Karian, Z. and Dudevich, E. (1999). Modern Statistical Systems, and GPSS Simulation, Second Edition, CRC Press LLC.
- [16] Karian, Z. and Dudevich, E. (2000). Fitting Statistical Distributions: The Generalized Lambda Distribution and Generalized Bootstrap Methods, Chapman and Hall, New york.
- [17] Karvanen, J., Eriksson, J. and Koivunen, V. (2000). Maximum likelihood estimation of ICA model for wide class of source distributions. In Neural Networks for Signal Processing X, Processing of the 2000 IEEE Signal Processing Society Workshop, **1**, 445-454.
- [18] King, R. and MacGillivray, H. (2007). Fitting the generalized lambda distribution with location and scale-free shape functionals. *American journal of Mathematical and Management Sciences*, **27(3-4)**, 441-460.
- [19] Kotz, S., Lumelskii, Y. and Pensky, M. (2003). The Stress-Strength Model and its Generalization: Theory and Application, New York: World scientific.
- [20] Kundu, D. and Gupta, R. D. (2005). Estimation of for the generalized exponential distribution, *Metrika*, **61**, 291-308.
- [21] Kundu, D. and Gupta, R. D. (2006), Estimation of for Weibull distributions, *IEEE Transactions on Reliability*, **55(2)**, 270-280.
- [22] Kundu, D. and Gupta, R. D. (2009). Estimation of $R = P(Y < X)$ for three-parameter Weibull distribution, *Statistics and Probability Letters*, **79**, 1839-186.
- [23] Ozturk, A. and Dale, R. (1982). A study of fitting the generalized lambda distribution to solar-radiation data, *Journal of Applied Meteorology*, **21(7)**, 995-1004.
- [24] Ramberg, J. S. and Schmeiser, B. W. (1974). An approximate method for generating asymmetric random variables, *Commun, ACM*, **17(2)**, 78-82.
- [25] Ramberg, J. S., Tadikamalla, P. R., Dudewicz, E. J. and Mytytha, E. F. (1979). A probability distribution and its uses in fitting data, *Technometrics*, **21(2)**, 201-214.
- [26] Riser, T. L. (1980). Accounting for non-Normality and sampling Error in analysis of variance of construction data, M. S. thesis, Department of civil Engineering, The Ohio State University, Columbus, Ohio.
- [27] Su, S. (2006). Maximum Log Likelihood Estimation Using EM Algorithm and Partition Maximum Log Likelihood Estimation for Mixture of Generalized Lambda Distributions, Working paper.
- [28] Su, S. (2007a). Numerical maximum log likelihood estimation for generalized lambda distributions, *Computational Statistics and Data Analysis*, **51**, 3983-3998.
- [29] Su, S. (2007b). GLDEX: Fitting Signal and Mixture of Generalized Lambda Distributions (RS and FMKL) Using Discretized and Maximum Likelihood Methods. R package version 1.0.1, URL <http://CRAN.R-project.org/>.
- [30] Su, S. (2010). Fitting GLD to data via quantile matching method. In Karian, Z. and Dudevich, E., editors, Handbook of Fitting Statistical Distributions with R. CRC press/Taylor and Francis.

- [31] Tarsitano, A. (2004). Fitting the generalized lambda distribution to income data, *In COMPSTAT'2004 Symposium*, 1861-1867.
- [32] Tukey, J. W. (1962). The future of data analysis. *The Annals of Mathematical Statistics*, **33(1)**, 1-67.

پیوست

طبق مقادیر پارامترهای داده شده در جدول ۳، هر کدام از این مقادیر در هر سطر را انتخاب کرده و سپس مقدار پارامتر تنش مقاومت محاسبه می شود.

Choose a value for (λ_2)

Choose a value for (λ_4)

Choose a value for (λ'_2)

Choose a value for (λ'_4)

$u = \text{function}(t)(1-t)^{\lambda_4} [1 - (\lambda'_2/\lambda_2)(1 - (1-t)^{\lambda_4})]^{1-\lambda'_4/\lambda'_4}$

$y = \text{integrate}(u, 0, 1)$

$R = 1 - y((\lambda_4/\lambda'_4) * (\lambda_2/\lambda'_2))$

در مثال کاربردی داده شده در بخش ۵، مقادیر پارامترها مشخص شده اند. بنابراین:

Choose $(\lambda_2 = 0/0637)$

Choose $(\lambda_4 = 0/05478)$

Choose $(\lambda'_2 = 0/08)$

Choose $(\lambda'_4 = 0/8041)$

$u = \text{function}(t)(1-t)^{\lambda_4} [1 - (\lambda'_2/\lambda_2)(1 - (1-t)^{\lambda_4})]^{1-\lambda'_4/\lambda'_4}$

$y = \text{integrate}(u, 0, 1)$

$R = 1 - y((\lambda_4/\lambda'_4) * (\lambda_2/\lambda'_2))$

Estimation of the Stress Strength Parameter in the Generalized Lambda Distribution

Abouzar Bazyari¹

Abstract:

In this paper, first, the generalized lambda distribution and the characteristics of this distribution are introduced. The concept of resistance stress is fully explained and the reliability of a system from the perspective of resistance stress is examined. Also, the mathematical form of the resistance stress parameter in the generalized lambda distribution has been calculated. The estimation of the parameters has been investigated by the moments method and for different parameters values the graph of generalized lambda distribution is drawn and resistance stress parameter calculated. With a real example the application of the results is illustrated.

Keywords: Engineering systems, Generalized lambda distribution, Location and scale parameters, Stress strength parameter.

¹ Department of Statistics, Persian Gulf University, Bushehr, Iran