کنکاشی در توزیع‌های پیوسته منفرد و ترکیب خطی محدب توزیع‌های مختلف

حسین صمیمی حق‌گزار [1]

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۰۱/۲۸
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۰۸/۱۹

چکیده:

در نظریه احتمال متغیر(بردار) تصادفی به گسسته، پیوسته مطلق، پیوسته منفرد و آمیخته‌ای از آن‌ها تقسیم‌بندی می‌شود. متغیرها (بردارها)ی تصادفی گسسته و پیوسته مطلق به‌طور گسترده در کتب مختلف احتمال و آمار موردبررسی قرارگرفته‌اند. بااین‌وجود، به مبحث توزیع‌های پیوسته منفرد و توزیع‌های آمیخته‌ای که بخشی از آن پیوسته منفرد باشد، کمتر پرداخته‌شده است. در این مقاله مثالی از بردار تصادفی منفرد آورده می‌شود. همچنین، مثال‌هایی از بردارهای تصادفی آمیخته ارائه می‌شود که تابع توزیع آن‌ها به‌صورت ترکیب خطی محدب از توابع توزیع گسسته، پیوسته مطلق و پیوسته منفرد است.

واژه‌های کلیدی: بردار تصادفی، پیوسته مطلق، توزیع آمیخته، مجموعه کانتور.

۱ مفاهیم مقدماتی و بیان مسئله

متغیر تصادفی از مفاهیم پایه‌ای احتمال است؛ تابعی اندازه‌پذیر از فضای نمونه در یک فضای احتمال به مجموعه اعداد حقیقی در فضای اندازه‌پذیر بورل[2]. هنر اصلی متغیر تصادفی انتقال پدیده‌های واقعی شانسی به حوزه اعداد است که این امکان را فراهم می‌سازد تا از مباحث موجود در ریاضیات مثل اعمال اصلی، مشتق، انتگرال و ... استفاده‌شده، مفاهیم احتمال و آمار به‌صورت دقیق تبیین گردد. بردار تصادفی تعمیم مفهوم متغیر تصادفی به فضای $\mathbb{R}^n$(n≥2) است. فرض کنید $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ یک فضای احتمال باشد که در آن Ω فضای نمونه، مجموعه‌ای ناتهی، و $\mathcal{F}$، $\sigma-$میدانی از زیرمجموعه‌های Ω و P تابع احتمال است که روی $\mathcal{F}$ تعریف‌شده است. تابع $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ متغیر تصادفی است هرگاه تصویر معکوس هر مجموعه بورل از $\mathbb{R}$ در $\mathcal{F}$ قرار داشته باشد؛ یعنی برای هر بورل B، $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ که در آن

$$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}.$$

به‌طور مشابه، تابع $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ بردار تصادفی است هرگاه تصویر معکوس هر مجموعه بورل از $\mathbb{R}^n$ عضو $\mathcal{F}$ باشد.

هرگاه شرط $P(X = a) > 0$ برقرار باشد، عدد حقیقی a را اتم متغیر تصادفی X گویند. مجموعه تمام اتم‌های یک متغیر تصادفی شماراست [1]. بر این اساس، متغیر تصادفی X گسسته یا اتمیک محض است درصورتی‌که احتمال مجموعه همه اتم‌های آن یک باشد. هرگاه X فاقد اتم باشد آن را پیوسته گویند. بنابراین تابع توزیع تجمعی متغیر تصادفی پیوسته X، $F(x) = P(X \leq x)$، در $\mathbb{R}$ پیوسته است.

متغیرهای تصادفی پیوسته به دو نوع پیوسته مطلق و پیوسته منفرد تفکیک می‌شوند.

متغیر تصادفی X پیوسته مطلق است هرگاه تابع احتمال القاء شده توسط آن، $P_X(.)$، نسبت به اندازه لبگ[3]، λ، پیوسته مطلق باشد ($P_X \ll \lambda$)؛ یعنی اگر برای مجموعه بورل B داشته باشیم $\lambda(B) = 0$، آنگاه $P_X(B) = 0$ که در آن $P_X(.)$ برای هر بورل B به‌صورت زیر است

$$P_X(B) = P(X \in B).$$

برای متغیر تصادفی پیوسته مطلق X، بر اساس قضیه رادن-نیکودیم[4] تابعی حقیقی انتگرال لبگ پذیر مثل $f(.)$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر مجموعه بورل B

$$P_X(B) = \int_B f \mathrm{d}\lambda$$

و اگر $f(.)$ انتگرال ریمان داشته باشد، آنگاه

$$P_X(B) = \int_B f(x) \mathrm{d}x.$$

[1] گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه گیلان، رشت، ایران. (نویسنده مسئول: samimi@guilan.ac.ir)

[2] Borel
[3] Lebesgue
[4] Radon-Nikodym
[5] Almost every where

تابع $f(.)$ که تقریباً‌همه‌جا (a.e.[5]) نسبت به اندازه لبگ و در نتیجه نسبت به P_X نامنفی است (یعنی $\lambda(\{x : f(x) < 0\}) = 0$ و در نتیجه $P_X(\{x : f(x) < 0\}) = 0$) تابع چگالی X نامیده می‌شود.

متغیر تصادفی X پیوسته منفرد است هرگاه P_X نسبت به اندازه لبگ پیوسته مطلق نباشد: $P_X \not\ll \lambda$. بنابراین، باوجود این‌که فاقد اتم و تابع توزیع آن پیوسته است، فاقد تابع چگالی است. در نتیجه

$$\frac{\partial F(x)}{\partial x} = 0 \quad a.e. \ .$$

انواع متغیرهای تصادفی و خواص آن‌ها به‌طور خلاصه در جدول ۱ آمده است.

جدول ۱. انواع متغیرهای تصادفی و ویژگی‌های آن

متغیر تصادفی گسسته $(Discrete)$	$\sum_{a\in A} P(X=a) = 1$ A تکیه‌گاه X شماراست.	$F(x)$ در نقاط عضو A فقط از راست پیوسته است.
متغیر تصادفی پیوسته مطلق $(Absolutely\ continuous)$	X فاقد اتم است: $P(X=a) = 0$ $\forall a \in \mathbb{R}$	$F(x)$ در $\mathbb{R}$ پیوسته است و X تابع چگالی دارد. $F'(x) = f(x)\ \ a.e.$
متغیر تصادفی پیوسته منفرد $(Singular\ continuous)$	X فاقد اتم است: $P(X=a) = 0$ $\forall a \in \mathbb{R}$	$F(x)$ در$\mathbb{R}$ پیوسته است و X فاقد تابع چگالی است. $F'(x) = 0\ a.e.$

توزیع یکنواخت روی مجموعه کانتور، C، مثالی از توزیع پیوسته منفرد است. زیرا $\lambda(C) = 0$ ولی $P_X(C) = 1$. درنتیجه $P_X \not\ll \lambda$ [۴].

متغیر تصادفی می‌تواند آمیخته‌ای از گسسته، پیوسته مطلق و پیوسته منفرد باشد. اگر متغیر تصادفی آمیخته X شامل بخش گسسته باشد، یعنی اتم دارد و احتمال مجموعه اتم‌های آن کوچک‌تر از یک و بزرگ‌تر از صفر است. درصورتی‌که X بخش پیوسته مطلق نیز داشته باشد، آنگاه

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x < 1$$

که در آن $f(x) = \frac{\partial F(x)}{\partial x}$. علاوه بر این، درصورتی‌که X اضافه بر بخش گسسته و پیوسته مطلق، بخش پیوسته منفرد نیز داشته باشد، آنگاه

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x + \sum_{a\in A} P(X=a) < 1,$$

که در آن A مجموعه تمام اتمهای X است.

در نظریه احتمال هر تابع توزیع دلخواه را می‌توان به‌طور منحصربه‌فرد به‌صورت ترکیب خطی محدب از توابع توزیع گسسته، پیوسته مطلق و پیوسته منفرد تجزیه کرد [۲، ۴]. به بیانی دقیق‌تر، اگر F یک تابع توزیع باشد، آنگاه

$$F = \alpha F_{ac} + \beta F_d + \gamma F_{cs} \quad \alpha,\beta,\gamma \geq 0\ ,\ \alpha+\beta+\gamma = 1$$

که در آن

۱) $F_{ac}(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$ تابع توزیع پیوسته مطلق که پیوسته است و $f(x) = F'_{ac}(x)\ \ a.e.$،

۲) $F_d(.)$ تابع توزیع گسسته با ناپیوستگی در اتمها،

۳) $F_{cs}(.)$ تابع توزیع پیوسته منفرد که پیوسته است و $F'_{cs}(x) = 0\ \ a.e.$.

مطالب فوق‌الذکر در مورد اتم، تابع احتمال القاء شده، انواع متغیر تصادفی و تجزیه تابع توزیع، قابل‌تعمیم به بردار تصادفی است.

۲ مثال‌های تشریحی

توزیع‌های آمیخته و توزیع‌های منفرد در زمینه‌های متنوع علمی دارای کاربردهای بسیاری هستند. بااین‌وجود، عدم وجود مثال‌هایی شهودی که بتوانند ماهیت این توزیع‌ها را نمایش دهند از مهم‌ترین چالش‌های موجود در زمینه شناخت این مبحث به شمار می‌رود [۶، ۷، ۸]. در این بخش جهت تشریح هرچه بیشتر مطالب ذکرشده در بخش قبل، مثال‌های متنوعی از توزیع‌های آمیخته و همچنین مؤلفه‌های تجزیه تابع توزیع آن‌ها آورده شده است. ابتدا به ذکر مثالی می‌پردازیم که در آن تابع توزیع شامل بخش گسسته و پیوسته مطلق است.

مثال ۱.۲. *فرض کنید X دارای توزیع نمایی با تابع چگالی احتمال زیر باشد*

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & o.w. \end{cases}$$

قرار می‌دهیم

$$Y = min\,(X, 100)\,.$$

در این صورت

$$F_Y(y) = P\,(Y \leqslant y) = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ 1 - e^{-\lambda y}, & 0 \leqslant y < 100, \\ 1, & y \geqslant 100. \end{cases}$$

همچنین

$$P\,(Y = 100) = P\,(X > 100) = e^{-100\lambda}.$$

بنابراین، با در نظر گرفتن F_d و F_{ac} به‌صورت

$$F_d\,(y) = \begin{cases} 0, & y < 100, \\ 1, & y \geqslant 100 \end{cases}$$

و

$$F_{ac}\,(y) = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ \dfrac{1 - e^{-\lambda y}}{1 - e^{-100\lambda}}, & 0 \leqslant y < 100, \\ 1, & y \geqslant 100, \end{cases}$$

می‌توان نوشت

$$F_Y = \alpha F_{ac} + \beta F_d.$$

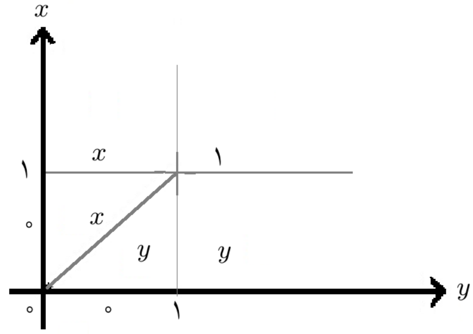
که در آن $\alpha = 1 - e^{-100\lambda}, \beta = e^{-100\lambda}$.

در ادامه به ذکر مثالی از بردار تصادفی پیوسته منفرد می‌پردازیم.

مثال ۲.۲. *فرض کنید X دارای توزیع یکنواخت روی فاصله $(0, 1)$ باشد و $Y = X$ باشد. در این صورت تابع توزیع توأم (X, Y) به‌صورت زیر به دست می‌آید*

$$\begin{aligned} F\,(X, Y) &= P\,(X \leqslant x, Y \leqslant y) \\ &= P\,(X \leqslant x, X \leqslant y) \\ &= \begin{cases} 0, & min\,(x, y) < 0, \\ min\,(x, y)\,, & 0 \leqslant min\,(x, y) < 1, \\ 1, & min\,(x, y) \geqslant 1. \end{cases} \end{aligned}$$

بر اساس ضابطه به‌دست‌آمده، نمایش مجموعه مقادیر $F\,(x, y)$ در $\mathbb{R}^2$ در شکل ۱ آورده شده است



شکل ۱. *نمایش مجموعه مقادیر تابع توزیع توأم بردار (X, Y) در مثال ۲.۲*

همان‌طور که ملاحظه می‌شود $F\,(x, y)$ در $\mathbb{R}^2$ پیوسته است. بااین‌وجود، با توجه به این‌که

$$P_{(X,Y)}\,(\Omega) = 1, \quad \lambda^{(2)}\,(\Omega) = 0,$$

که در آن

$$\Omega = \left\{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x = y, 0 < x, y < 1 \right\}.$$

می‌توان نتیجه گرفت که $P_{(X,Y)} \not\ll \lambda^{(2)}$.

همچنین، برای هر $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ داریم

$$\frac{\partial^2 F\,(x, y)}{\partial x \partial y} = 0.$$

بنابراین (X, Y) بردار تصادفی منفرد است.

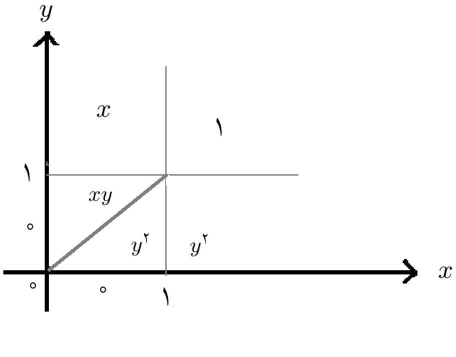
در مثال بعد بردار تصادفی موردبررسی قرار می‌گیرد که شامل بخش‌های پیوسته مطلق و پیوسته منفرد است.

مثال ۳.۲. *فرض کنید X_1 و X_2 متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع دارای توزیع یکنواخت روی فاصله $(0, 1)$ باشند. قرار دهید*

$$X = X_1, \quad Y = max\,(X_1, X_2)\,.$$

در این صورت تابع توزیع توأم (X, Y) به‌صورت زیر است

$$\begin{aligned} F\,(x, y) &= P\big(X \leqslant x, Y \leqslant y\big) \\ &= P\big(X_1 \leqslant x, X_1 \leqslant y, X_2 \leqslant y\big) \\ &= P\Big(X_1 \leqslant min\,(x, y)\,, X_2 \leqslant y\Big) \\ &= P\Big(X_1 \leqslant min\,(x, y)\Big) P\Big(X_2 \leqslant y\Big) \\ &= \begin{cases} 0, & min\,(x, y) < 0 \text{ یا } y < 0, \\ y\; min\,(x, y)\,, & 0 \leqslant min\,(x, y) < 1, 0 \leqslant y < 1, \\ min\,(x, y) = x, & 0 \leqslant min\,(x, y) < 1, y \geqslant 1, \\ 1, & min\,(x, y) \geqslant 1. \end{cases} \end{aligned}$$



شکل ۲. *نمایش مجموعه مقادیر تابع توزیع توأم (X, Y) در مثال ۳.۲*

بر اساس ضابطه به‌دست‌آمده، نمایش مجموعه مقادیر $F(x,y)$ در $\mathbb{R}^2$ در شکل ۲ آورده شده است. بر اساس این نمایش می‌توان دید که $F(x,y)$ در سراسر $\mathbb{R}^2$ پیوسته است ولی در برخی از نواحی $\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = 0$. تنها در ناحیه $0 < x < y < 1$

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = 1 \neq 0,$$

به‌طوری‌که

$$\int_0^1 \int_0^y 1 \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2} \neq 1.$$

ازاین‌رو، F آمیخته‌ای از توزیع‌های پیوسته مطلق و پیوسته منفرد است. F_{ac} تابع توزیع توأم متغیرهای تصادفی است که تابع چگالی توأم آن برابر زیر است

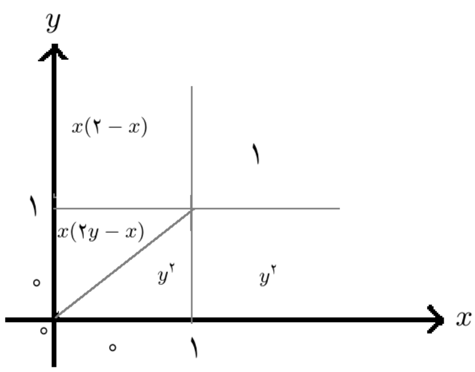
$$f(x,y) = \begin{cases} c, & 0 < x < y < 1, \\ 0, & o.w. \end{cases}$$

به‌راحتی مشخص می‌شود که $c = 2$.

بنابراین تابع توزیع توأم تابع چگالی فوق که بخش پیوسته مطلق تابع توزیع توأم بردار (X,Y) می‌باشد، به‌صورت زیر می‌باشد

$$F_{ac}(x,y) = \begin{cases} 0, & x < 0 \text{ یا } y < 0, \\ x(2-x), & 0 < x < 1, y > 1, \\ x(2y - x), & 0 < x < y < 1, \\ y^2, & 0 < y < x < 1 \text{ یا } x > 1, y > 1, \\ 1, & x > 1, y > 1. \end{cases}$$

نمایش مجموعه مقادیر مرتبط با ضابطه F_{ac} در شکل ۳ ارائه‌شده است.

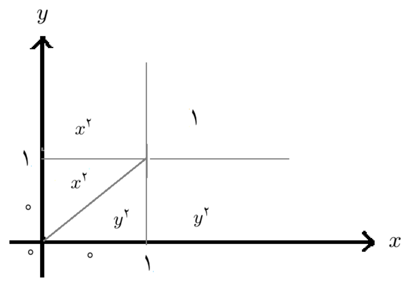


شکل۳. نمایش مجموعه مقادیر بخش پیوسته مطلق تابع توزیع توأم (X,Y) در مثال ۳.۲

با توجه به این‌که ضرایب F_{ac} و F_{cs} در تجزیه F برابر $\frac{1}{2}$ است، با در اختیار داشتن F و F_{ac} می‌توان F_{cs} را به دست آورد و نتیجه گرفت که

$$F = \frac{1}{2} F_{ac} + \frac{1}{2} F_{cs}.$$

نمایش مجموعه مقادیر ضابطه $F_{cs}(x,y)$ در شکل ۴ آورده شده است.



شکل۴. نمایش مجموعه مقادیر بخش پیوسته منفرد تابع توزیع توأم (X,Y) در مثال ۳.۲

در ادامه به ذکر مثالی از بردار تصادفی شامل هر سه بخش گسسته، پیوسته مطلق و پیوسته منفرد می‌پردازیم.

مثال۴.۲. فرض کنید X_1 و X_2 متغیرهای تصادفی مستقل و دارای توزیع یکنواخت روی فاصله $(0,1)$ باشند. با فرض این‌که

$$X = min(X_1, 0/5), \quad Y = max(X_1, X_2).$$

تابع توزیع توأم (X,Y) به‌صورت زیر به دست می‌آید

$$\begin{aligned} P\big(X = 0/5, Y \leqslant y\big) &= P\big(X_1 \geqslant 0/5, X_1 \leqslant y, X_2 \leqslant y\big) \\ &= \begin{cases} 0, & 0 < y < 0/5, \\ y(y - 0/5), & 0/5 < y < 1, \\ 0/5, & y > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

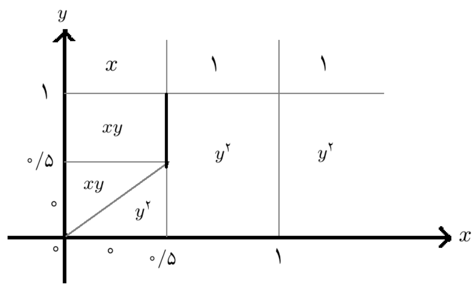
همچنین وقتی‌که $x < 0/5$

$$\begin{aligned} P\big(X \leqslant x, Y \leqslant y\big) &= P\big(X_1 \leqslant x, X_1 \leqslant y, X_2 \leqslant y\big) \\ &= P\Big(X_1 \leqslant min(x,y)\Big) P\big(X_2 \leqslant y\big) \\ &= \begin{cases} xy, & 0 < x < y < 1, x < 0/5, \\ y^2, & 0 < y < x < 0/5, \\ x, & x < 0/5, y > 1, \\ 0, & x < 0 \text{ یا } y < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

برای $x > ۰/۵$ نیز داریم

$$\begin{aligned} P(X \leqslant x, Y \leqslant y) &= P(Y \leqslant y) \\ &= P(X_۱ \leqslant y, X_۲ \leqslant y) \\ &= \left(P\left(X_۱ \leqslant y\right)\right)^۲ \\ &= \begin{cases} ۰, & y < ۰, x > ۰/۵, \\ y^۲, & ۰ \leqslant y < ۱, x > ۰/۵, \\ ۱, & y \geqslant ۱, x > ۰/۵. \end{cases} \end{aligned}$$

بر اساس ضابطه به‌دست‌آمده برای $F(x,y)$ مجموعه مقادیر مربوطه در شکل ۵ ارائه‌شده است.



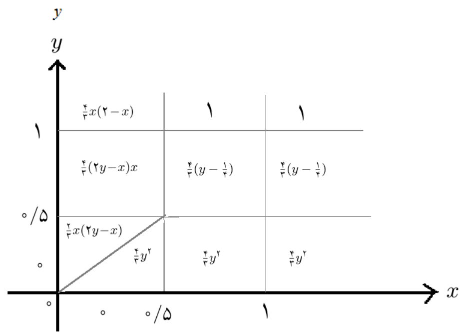
شکل۵. نمایش مجموعه مقادیر تابع توزیع توأم (X,Y) در مثال ۴.۲.

همان‌طور که می‌توان دید روی پاره‌خط $x = ۰/۵$ و $۰/۵ < y < ۱$ احتمال مثبت وجود دارد. $F(x,y)$ به‌جز در پاره‌خط $x = ۰/۵$ و $۰/۵ < y < ۱$ در سراسر $\mathbb{R}^۲$ پیوسته است. همچنین $\frac{\partial^۲ F}{\partial x \partial y}$ در برخی از نواحی ناصفر و در برخی صفر است. ازاین‌رو، F دارای مؤلفه‌های پیوسته مطلق، پیوسته منفرد و گسسته است.

برای پیدا کردن F_{ac} در ناحیه $۰ < x < y < ۰/۵$ و $۰/۵ < x,y < ۱$ که $\frac{\partial^۲ F}{\partial x \partial y}$ مخالف صفر است، تابع چگالی $f(x,y)$ را به‌صورت زیر پیدا می‌کنیم

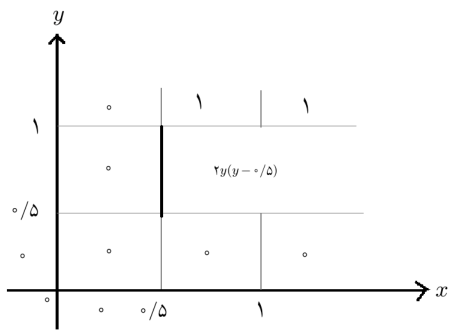
$$f(x,y) = \begin{cases} c, & ۰ < x < y < ۰/۵ \ \text{یا}\ ۰/۵ < x,y < ۱, \\ ۰, & o.w. \end{cases}$$

که در آن c برابر $\frac{۸}{۳}$ است (یک بخش بر مساحت ناحیه). نمایش مجموعه مقادیر $F_{ac}(x,y)$ در شکل ۶ آمده است.



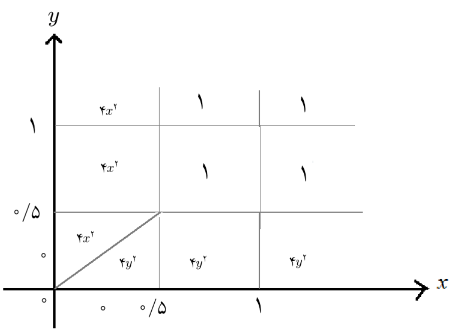
شکل۶. نمایش مجموعه مقادیر بخش پیوسته مطلق ضابطه تابع توزیع توأم (X,Y) در مثال ۴.۲

بر اساس این نمایش می‌توان دید که $F_{ac}(x,y)$ در سراسر $\mathbb{R}^۲$ پیوسته است.



شکل۷. نمایش مجموعه مقادیر ممکن بخش گسسته تابع توزیع توأم (X,Y) در مثال ۴.۲

حال F_d بخش گسسته F را به دست می‌آوریم که فقط روی پاره‌خط $x = ۰/۵$ و $۰/۵ < y < ۱$ احتمال مثبت دارد. ضابطه $F_d(x,y)$ به‌صورت زیر به دست می‌آید.



شکل۸. نمایش مجموعه مقادیر بخش پیوسته منفرد تابع توزیع توأم (X,Y) در مثال ۴.۲

ضریب F_{ac} برابر $\frac{۳}{۸}$ و ضریب F_d برابر $\frac{۱}{۲}$ ($P(X = ۰/۵, Y \leqslant ۱) = \frac{۱}{۲}$) است. پس ضریب F_{cs} برابر $\frac{۱}{۸}$ است. F_{cs} را می‌توان به کمک

F، F_{ac} و F_d و با معلوم بودن ضرایب به دست آورد. نمایش مجموعه مقادیر ممکن ضابطه F_{cs} در شکل ۸ ارائه‌شده است.

بنابراین

$$F = \frac{۳}{۸}F_{ac} + \frac{۴}{۸}F_d + \frac{۱}{۸}F_{cs}.$$

۳ بحث و نتیجه‌گیری

تاکنون به توزیع‌های پیوسته منفرد و توزیع‌های آمیخته‌ای که شامل بخش پیوسته منفرد هستند کمتر پرداخته‌شده است. با ذکر مثال‌های متنوعی سعی شده است این نوع توزیع‌ها بیشتر معرفی گردد. همچنین در این مثال‌ها تجزیه محدب تابع توزیع متغیر تصادفی آمیخته به توابع توزیع گسسته، پیوسته مطلق و پیوسته منفرد موردبررسی قرارگرفته و مؤلفه‌های تجزیه مشخص‌شده است.

مراجع

[1] Ash, R.B. and Doleans-Dade C.A. (2000). *Probability Measure Theory, 2nd ed*. Acadaemic Press.

[2] Chung, K.L. (2001). *A Course in Probability Theory, 3rd ed*. Acadaemic Press.

[3] Durrett, R. (2005). *Probability: Theory and Example, 3rd ed*. Brooks/Cole.

[4] Gut, A. (2005). *Probability: A Graduate Course*. Springer.

[5] Koopmans, L. H. (1969). *Some simple singular and mixed probability distributions*. The American Mathematical Monthly, **76(3)**, 297-299.

[6] Rohatgi, V.K. and Ehsanes Saleh, A.K. Md. (2015). *An Introduction to Probability and Statistics, 3rd ed.*. John Wiley sons.

[7] Wu, H., He, J., Zhu, R.C., Yang, C.J. and Noblesse, A. (2021). *Practical representation of flows due to general singularity distributions for wave diffraction–radiation by offshore structures in finite water depth*. European Journal of Mechanics / B Fluids, **89**, 1–14.

[8] Wu, H., He, J., Zhu, R.C., Yang, C.J. and Noblesse, A. (2020). *Practical flow-representations for arbitrary singularity-distributions in ship and offshore hydrodynamics, with applications to steady shipwaves and wave diffraction-radiation by offshore structures*. European Journal of Mechanics / B Fluids, **89**, 24-41.

Exploration of singular continuous distributions and convex linear combinations of different distributions

Abstract:

In probability theory, a random variable (vector) is divided into discrete, absolutely continuous, singular continuous, and a mixture of them. Absolutely discrete and continuous random variables (vectors) have been extensively studied in various probability and statistics books. However, less attention has been paid to the issue of singular continuous distributions and mixture distributions, part of which is singular continuous. In this article, an example of singular random vectors is given. Also, examples of mixture random vectors are presented whose distribution function is a convex linear combination of discrete, absolutely continuous, and continuous distribution functions.

Keywords: Random vector, Absolutely continuous, Mixture distribution, Contour set.