

مقدمه‌ای بر پرکولاسیون بستی و بندی روی شبکه \mathbb{Z}^2

رامین کاظمی^۱

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۰۵/۰۳

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۰۷/۲۴

چکیده:

هدف اصلی این مقاله، بررسی پرکولاسیون بستی و بندی روی شبکه \mathbb{Z}^2 است. نمادها و مفاهیم اصلی شامل احتمال‌های بحرانی معرفی می‌شوند. شبکه بتی و درخت‌های k -شاخه‌ای مورد بررسی قرار می‌گیرند و در نهایت شبکه \mathbb{Z}^2 در نظر گرفته می‌شود. قضیه بنیادی هریس و کستن که کران‌های پایین و بالای احتمال‌های بحرانی را روی شبکه \mathbb{Z}^2 ارائه می‌کند، بیان و ثابت می‌شوند.

واژه‌های کلیدی: پرکولاسیون بستی و بندی، احتمال‌های بحرانی، شبکه \mathbb{Z}^2 .

۱ مقدمه

بود [۹]. کمی بعد چیس در سال ۱۹۸۶، نزدیک به انتشار کتاب بعدی مختص به این موضوع، یک مقاله مروری خیلی بلند و جذاب روی نظریه پرکولاسیون در یک معنای وسیع‌تری را منتشر کرد [۴]. نزدیک به دو دهه کتاب گریمت منبع استاندارد برای بخش اعظم نظریه پایه‌ای پرکولاسیون روی شبکه‌ها بود [۱۱]. کتاب‌های دیگر قابل توجه روی جنبه‌های مختلف نظریه پرکولاسیون توسط اسمایت و ویرمن [۱۹]، دورت [۷]، هیوز [۱۶، ۱۷]، میستر و روی [۱۸] به رشته تحریر درآمده‌اند. در همان زمان، مقالات اجمالی باارزشی نیز توسط دورت [۶]، چیس و همکاران [۵]، کستن [۱۰]، وحیدی اصل و ویرمن [۲۰، ۲۱، ۲۲]، و گریمت [۱۲] نوشته شد.

هدف این مقاله، معرفی و نمایش چند نتیجه کلاسیک نظریه پرکولاسیون است به شیوه‌ای که برای غیرمتخصصان قابل فهم و تشخیص باشد. قضیه بنیادی هریس و کستن، روی شبکه \mathbb{Z}^2 ، علی‌رغم اینکه بعداً توسعه داده شده است، معرفی می‌شود. کران بالای به دست آمده در این قضیه به سختی ثابت شد در حالی که در حال حاضر و با ابزارهای جدید در احتمال ترکیبیاتی به سادگی ثابت می‌شود.

۲ نمادگذاری

نظریه پرکولاسیون در حقیقت مطالعه ساختارهای مؤلفه‌ای زیرگراف‌های تصادفی گراف‌ها است. معمولاً، گراف اصلی یک شبکه یا شبه‌شبکه است که ممکن است سودار یا بی‌سو باشد. برای رسیدن به یک زیرگراف تصادفی رأس‌ها یا یال‌ها به طور مستقل و با احتمال یکسان p انتخاب می‌شوند. در مثال‌های پیش رو، گراف اصلی \mathbb{Z}^2 است. اگر Λ یک گراف باشد، آنگاه $V(\Lambda)$ و

نظریه پرکولاسیون نزدیک به ۶۴ سال پیش به عنوان یک چارچوب ریاضی برای مطالعه فرایندهای فیزیکی نظیر جریان داخل یک ماده متخلخل نامرتب معرفی شد [۲]. این نظریه به عنوان یک نظریه غنی و مورد توجه با کاربردهایی از پدیده‌های طبیعی روی موضوعاتی چون نظریه شبکه‌ها خود را به اثبات رسانده است. از دیدگاه ریاضی این نظریه شامل قضایای مشکل و عمیقی با تعداد زیادی از مسائل باز است. این نظریه توسط برودبنت و همرزلی در سال ۱۹۵۷ مطرح شد [۳]. امروزه هزاران مقاله و کتاب به این نظریه اختصاص داده می‌شود.

در ابتدا هدف ورود آنالیز ریاضی در مطالعه فرایندهای فیزیکی تصادفی نظیر جریان یک مایع در یک محیط متخلخل نامرتب بود. این مسائل در حوزه ریاضیات کاربردی مورد توجه بسیاری از فیزیک دانان به خوبی ریاضی دانان محض قرار گرفت و در نهایت به جمع‌آوری شواهد آزمایش و شنیده‌ها برای بسیاری از پدیده‌های مهم منتهی شد. موضوع، خیلی مشکل‌تر از آنچه پیش‌بینی شده بود، با چندین نتیجه عمیق ثابت شده و بسیاری موارد حدس زده شده به پیش رفت. اولین نتیجه ریاضی خاص در نظریه پرکولاسیون توسط کستن ثابت شد [۸]. او در سال ۱۹۸۰ کران پایین احتمال بحرانی برای پرکولاسیون بندی روی شبکه مربعی، که توسط هریس در سال ۱۹۶۰ ارائه شده بود، را کامل کرد [۸] و همچنین نشان داد که این احتمال بحرانی دقیقاً برابر با $\frac{1}{2}$ است.

کستن در سال ۱۹۸۲ برای نشان دادن این موضوع و خیلی از نتایج مرتبط با آن، اولین پیکربندی مختص به نظریه پرکولاسیون را منتشر کرد که روی یک پرکولاسیون دوبعدی گسسته متمرکز شده

^۱ گروه آمار، دانشگاه بین‌المللی امام خمینی (ره) (نویسنده مسئول: r.kazemi@sci.ikiu.ac.ir)

پارامترها نادیده گرفته می‌شود. برای سادگی از \mathbb{P} یا \mathbb{P}_p استفاده می‌شود. به‌طور مشابه، Λ_p^b یک زیرگراف باز در پرکولاسیون بندی و Λ_p^s یک زیرگراف باز در پرکولاسیون بستی است.

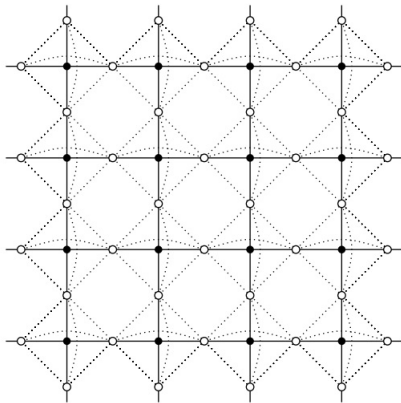
به‌طور رسمی، برای یک گراف مفروض Λ با مجموعه یال‌های E ، یک پیکره (بندی) یک تابع $\{0, 1\}$ W_e ، $W : E \rightarrow \{0, 1\}$ $e \mapsto W_e$ است. برای همه پیکره‌های بندی می‌نویسیم $\Omega = \{0, 1\}^E$. یک بند e در پیکربندی w باز است هرگاه $w_e = 1$. این تعریف به زیرگراف‌های باز، قابل تسری است. فرض کنید Σ سیگما میدان تولیدشده توسط مجموعه استوانه‌های زیر روی Ω باشد:

$$C(F, \sigma) = \{w \in \Omega; w_f = \sigma_f, f \in F\},$$

که در آن F یک زیرمجموعه متناهی E است و $\sigma \in \{0, 1\}^E$. فرض کنید $p = (p_e)_{e \in E}$ ، که در آن برای هر بند e ، $0 \leq p_e \leq 1$. حال، اندازه احتمال القاشده روی (Ω, Σ) توسط

$$\mathbb{P}_{\Lambda, p}^b(C(F, \sigma)) = \prod_{\substack{f \in F \\ \sigma_f = 1}} p_f \prod_{\substack{f \in E \\ \sigma_f = 0}} (1 - p_f),$$

است.



شکل ۲. بخش‌هایی از شبکه مربعی \mathbb{Z}^2 (دایره‌های توپر و خط‌ها) و گراف خطی‌اش یعنی $L(\mathbb{Z}^2)$ (دایره‌هایی توخالی و خط‌های نقطه‌چین).

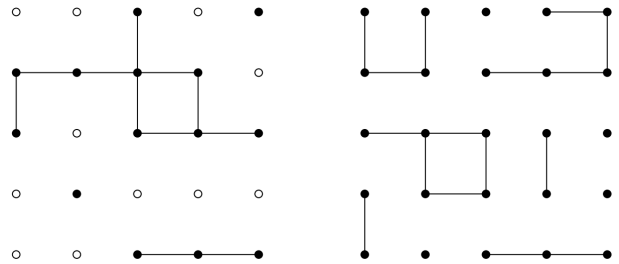
وقتی برای هر یال e ، $p_e = p$ ، آنگاه مانند قبل از نماد $\mathbb{P}_{\Lambda, p}^b$ به‌جای $\mathbb{P}_{\Lambda, p}^b$ استفاده می‌شود. وضعیت انتخاب بندها مستقل از یکدیگر است. در این صورت، احتمال اینکه e باز باشد برابر با p_e است. فرض کنید A پیشامد این باشد که بندها در F بسته و در F_1 باز باشند. بنابراین، برای دو مجموعه مجزای F و F_1 از بندها داریم:

$$\mathbb{P}_{\Lambda, p}^b(A) = \prod_{f \in F_1} p_f \prod_{f \in F} (1 - p_f). \quad (۱)$$

در این صورت، $\mathbb{P}_{\Lambda, p}^b$ یک اندازه پرکولاسیون بندی مستقل روی Λ است. حالت خاصی که در آن برای هر بند e ، $p_e = p$ ، دقیقاً اندازه $\mathbb{P}_{\Lambda, p}^b$ تعریف شده در بالا است. تعریف‌های رسمی برای

$E(\Lambda)$ به ترتیب بیانگر مجموعه رأس‌ها و مجموعه یال‌ها هستند. منظور از $x \in \Lambda$ این است که $x \in V(\Lambda)$. نمادگذاری استاندارد نظریه پرکولاسیون با نظریه گراف متفاوت است. رأس‌ها و یال‌ها به ترتیب بست‌ها و بندها و مؤلفه‌ها نیز خوشه‌ها نامیده می‌شوند. وقتی زیرگراف تصادفی با انتخاب بست‌ها به دست می‌آید از پرکولاسیون بستی و وقتی که بندها انتخاب می‌شوند از پرکولاسیون بندی صحبت می‌کنیم. در هر حالت، بست‌ها یا بندهای انتخاب‌شده را باز و انتخاب‌نشده‌ها را بسته می‌نامند. در برخی از مقالات هم از اتم به‌جای بست و از واژه‌های مسدود و نامسدود به‌جای بسته و باز استفاده می‌شود.

در پرکولاسیون بستی، زیرگراف باز یک زیرگراف القاشده توسط بست‌های باز و در پرکولاسیون بندی، زیرگراف باز توسط بندهای باز و همه رأس‌ها تشکیل می‌شود. شکل ۱ را در نظر بگیرید.



شکل ۱. بخش‌هایی از زیرگراف‌های باز در پرکولاسیون بستی (سمت چپ) و پرکولاسیون بندی (سمت راست) روی شبکه مربعی در \mathbb{Z}^2 . در سمت چپ دایره‌های پر شده بست‌های باز هستند؛ زیرگراف باز، زیرگرافی از \mathbb{Z}^2 است که توسط این‌ها القا می‌شود. برای پرکولاسیون بندی؛ زیرگراف باز، زیرگراف فراگیر شامل همه بندهای باز است.

۳ احتمال بحرانی

در ادامه، برای ساده‌سازی روی پرکولاسیون بی‌سو، یعنی پرکولاسیون بستی و بندی روی یک گراف بی‌سو، متمرکز می‌شویم. فرض کنید Λ همبند نامتناهی و به‌طور موضعی متناهی باشد. یعنی، هر رأس آن دارای درجه متناهی باشد. به‌طور کلی، در Λ وجود یال‌های متعدد بین جفت‌های یکسان از رأس‌ها امکان‌پذیر است اما طوقه‌ای وجود ندارد. اغلب فرض می‌شود بندها یا بست‌ها باز هستند. فرض کنید بست‌ها یا بندها با احتمال یکسان p باز باشند (مستقل از یکدیگر). احتمال انتخاب p یک اندازه احتمال را روی مجموعه زیرگراف‌های Λ معرفی می‌کند. در پرکولاسیون بندی از نماد $\mathbb{P}_{\Lambda, p}^b$ برای این اندازه احتمال و از نماد $\mathbb{P}_{\Lambda, p}^s$ در پرکولاسیون بستی استفاده می‌شود. در بسیاری از موارد، وابستگی این اندازه‌ها به برخی یا همه

خیلی نزدیک تر باشد، استفاده می‌شود. دو بست x و y از گراف Λ معادل هستند هرگاه یک خودریختی از Λ که x را به y نگاشت کند، موجود باشد. هنگامی همه بست‌ها معادل هستند (یعنی، گروه متقارن گراف Λ به صورت ترایی روی رأس‌ها عمل کنند) از نماد $\theta(p)$ برای بیان $\theta_x(p)$ برای هر بست x استفاده می‌شود. کمیت $\theta(p)$ یا $\theta_x(p)$ را به عنوان احتمال پرکولاسیون می‌شناسند. به طور واضح، اگر x و y دو بست با فاصله d از یکدیگر باشند، آنگاه $\theta_x(p) \geq p^d \theta_y(p)$. از طرفی، برای هر بست x ، $\theta_x(p) = 0$ یا $\theta_x(p) > 0$. با بحث صورت گرفته در بالا $\theta_x(p)$ یک تابع صعودی از p است. بنابراین، یک احتمال بحرانی p_H با $0 \leq p_H \leq 1$ وجود دارد به طوری که اگر $p < p_H$ ، آنگاه برای هر بست x ، $\theta_x(p) = 0$. اگر $p > p_H$ ، آنگاه برای هر بست x ، $\theta_x(p) > 0$. نماد p_H توسط همزلی [۱۵] معرفی شده است. زمانی که مدل تحت بررسی به طور واضح در متن مشخص نشده است، از نماد $p_H^b(\Lambda)$ برای پرکولاسیون بست روی Λ و از نماد $p_H^b(\Lambda)$ برای پرکولاسیون بندی روی Λ استفاده می‌شود. اگر $p < p_H$ ، آنگاه احتمال پیشامد E یعنی اینکه یک خوشه باز نامتناهی وجود دارد، صفر است. درحالی که برای $p > p_H$ ، این احتمال برابر با یک است. برای دیدن این مطلب، توجه کنید که پیشامد E از حالت‌های هر مجموعه متناهی از بندها یا بست‌ها مستقل است. بنابراین، طبق قانون $0-1$ کولموگوروف، احتمال $\mathbb{P}_p(E)$ برابر با صفر یا یک است. اما اگر $p < p_H$ ، آنگاه برای هر x ، $\theta_x(p) = 0$ و لذا

$$\mathbb{P}_p(E) \leq \sum_x \theta_x(p) = 0,$$

و اگر $p > p_H$ ، آنگاه برای هر بست x ، $\theta_x(p) > 0$ ، $\mathbb{P}_p(E) \geq \theta_x(p) > 0$ و همچنین برای همه بست‌ها). در نتیجه، $\mathbb{P}_p(E) = 1$. همچنین، گوئیم پرکولاسیون در یک مدل مشخص اتفاق می‌افتد هرگاه $\theta_x(p) > 0$ یا $\mathbb{P}_p(E) = 1$ در نمادگذاری از واژه یکسانی برای هر دوی این پیشامدهای خاص و اندازه‌های مطالعه شده استفاده می‌شود. این یک نمادگذاری ایدئال نیست اما همان طوری که در خیلی از موضوعات رایج است، این نمادگذاری تاریخی امروزه جاافتاده است. نظریه پرکولاسیون بیشتر روی مطالعه احتمال‌های بحرانی متمرکز شده است. یعنی، این سؤال که، کجا پرکولاسیون اتفاق می‌افتد؟ به هر حال، مطالعه ویژگی‌های بیشتر از گراف‌های تصادفی برخاسته از اندازه‌های پرکولاسیون است. در حقیقت تلاش زیادی برای بیان ساختار این گراف‌های تصادفی نزدیک به احتمال بحرانی صورت گرفته است. نظریه پرکولاسیون با گراف‌های نامتناهی سروکار دارد. بسیاری از پیشامدهای پایه‌ای مطالعه شده (مانند «وقوع پرکولاسیون») شامل حالت‌های نامتناهی از بندها

پرکولاسیون بست می‌تواند عمومی‌تر است به این معنا که پرکولاسیون بندی روی یک گراف Λ معادل با پرکولاسیون بست روی $L(\Lambda)$ یعنی گراف خطی Λ است. گراف $L(\Lambda)$ در حقیقت گرافی است که رأس‌های آن، یال‌های Λ هستند؛ دو رأس $L(\Lambda)$ مجاور هستند هرگاه یال‌های متناظر Λ در یک رأس مشترک باشند. شکل ۲ را ببینید.

اگرچه در ادامه برخی تذکرها درباره گراف‌های نامتناهی عام بیان می‌شود اما کاربردهای اصلی همیشه شامل گراف‌های شبه‌مشبک هستند. این گراف‌ها تعدادی متناهی از انواع رأس‌ها و یال‌ها دارند. گاهی ممکن است رأس‌ها یا یال‌ها از انواع مختلف با احتمال‌های مختلف انتخاب شود.

برای یک گراف اصلی و ثابت Λ ، یک اتصال طبیعی از اندازه‌های $\mathbb{P}_{\Lambda,p}^b$ برای $0 \leq p \leq 1$ وجود دارد. فرض کنید برای بندهای e از Λ ، X_e متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع یکنواخت روی بازه $[0, 1]$ باشند. در این صورت، می‌توان Λ_p^b را به عنوان زیرگراف فراگیر Λ شامل همه بندهای e در نظر گرفت که $X_e \leq p$. در این اتصال‌ها، اگر $p_1 < p_2$ ، آنگاه $\Lambda_{p_1}^b$ یک زیرگراف $\Lambda_{p_2}^b$ است. بحث مشابهی برای پرکولاسیون بست وجود دارد.

یک مسیر باز، مسیری در زیرگراف باز است. برای بست‌های x و y ، می‌نویسیم $x \rightarrow y$ یا $\{x \rightarrow y\}$ برای این منظور که مسیر بازی از x به y وجود دارد و $\mathbb{P}(x \rightarrow y)$ بیانگر احتمال این پیشامد است. همچنین، $x \rightarrow +\infty$ بیانگر این است که یک مسیر باز نامتناهی با آغاز از بست x وجود دارد.

یک خوشه باز یک مؤلفه از زیرگراف باز است. مانند نظریه گراف، فرض می‌کنیم که این خوشه‌ها به طور موضعی متناهی‌اند. گوئیم یک خوشه باز نامتناهی است اگر و تنها اگر برای هر بست x در این خوشه، پیشامد $\{x \rightarrow \infty\}$ برقرار باشد. برای یک بست مفروض x ، C_x را بیانگر خوشه باز شامل x می‌گیریم هرگاه چنین خوشه‌ای موجود باشد و در غیر این صورت C_x را یک مجموعه تهی در نظر می‌گیریم. بنابراین، $C_x = \{y \in \Lambda : x \rightarrow y\}$ یک مجموعه از بست‌های y است که یک مسیر باز از x به آن‌ها وجود دارد. به طور واضح، در پرکولاسیون بندی، C_x همیشه شامل x است و در پرکولاسیون بست، $C_x = \emptyset$ اگر و تنها اگر x بسته باشد.

فرض کنید $\theta_x(p)$ احتمال این باشد که خوشه C_x نامتناهی است. به عبارتی، $\theta_x(p) = \mathbb{P}_p(x \rightarrow \infty)$. لذا، $\theta_x(p)$ به گراف اصلی Λ وابسته است خواه اینکه روی پرکولاسیون بندی یا بست متمرکز باشیم. به طور خیلی رسمی‌تر، برای پرکولاسیون بندی، برای مثال

$$\theta_x(p) = \theta_x(\Lambda_p^b) = \theta_x(\Lambda; p) = \mathbb{P}_{\Lambda,p}^b(|C_x| = \infty),$$

که در آن $|C_x| = |\nabla(C_x)|$ تعداد بست‌ها در خوشه C_x است. معمولاً هرکدام از نمادگذاری‌های بالا که به موضوع مورد بحث

است. به‌هرحال،

$$\theta_x(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_p(|C_x| \geq n). \quad (2)$$

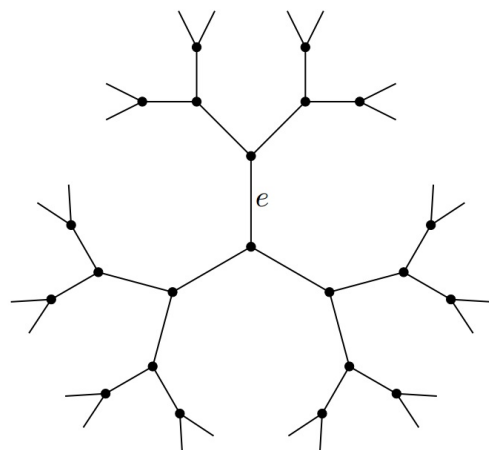
برای $p < p_H$ ، خوشهٔ باز C_x با احتمال ۱ متناهی است اما اندازهٔ مورد انتظارش لزوماً متناهی نیست. این توجه ما را به دیگر احتمال بحرانی یعنی p_T که توسط تمپرلی ارائه شده است، معطوف می‌کند. مجدداً از نماد $p_T^b(\Lambda)$ یا $p_T^s(\Lambda)$ به ترتیب برای پرکولاسیون بستی و بندی روی Λ استفاده می‌شود. برای یک بست x ، قرار می‌دهیم $\chi_x(p) = E_p(|C_x|)$ که در آن امید ریاضی متناظر با \mathbb{P}_p است. اگر همهٔ بست‌ها معادل باشند، از نماد $\chi(p)$ برای سادگی استفاده می‌شود. بدیهی است $\chi_x(p)$ نسبت به p صعودی است. مانند قبل، $\chi_x(p)$ برای بست x متناهی است اگر و تنها اگر برای همهٔ بست‌ها متناهی باشند. در نتیجه، یک احتمال بحرانی به‌صورت زیر وجود دارد که به x بستگی ندارد:

$$p_T = \sup \{p : \chi_x(p) < \infty\} = \inf \{p : \chi_x(p) = \infty\}.$$

با توجه به تعریف، $p_T \leq p_H$.

۴ شبکهٔ بتی و درخت k -شاخه‌ای

برای بسیاری از گراف‌های شامل شبکهٔ \mathbb{Z}^d ($d \geq 2$)، $p_T = p_H$ موارد کمی وجود دارد که در آن‌ها محاسبهٔ p_T و p_H ساده باشد. یک مثال اولیه، درخت نامتناهی d -منتظم است که در خیلی از متون مرتبط به‌عنوان شبکهٔ بتی شناخته می‌شود و در شکل ۳ آمده است.



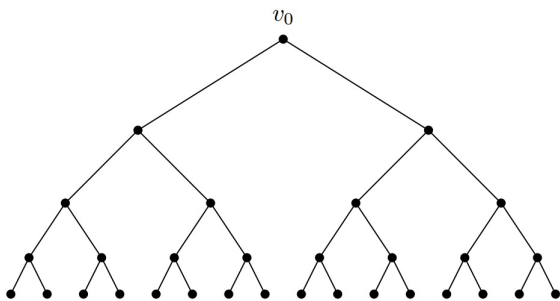
شکل ۳. درخت ۳-منتظم که در آن $p_T^b = p_H^b = p_T^s = p_H^s = \frac{1}{2}$ با حذف کردن یک یال (e)، این درخت به دو مؤلفه تقلیل می‌یابد که هرکدام از آن‌ها یک درخت ۲-شاخه‌ای است.

به یک درخت k -شاخه‌ای T_k توجه کنید. این یک درخت ریشه‌دار است که هر رأس آن k فرزند دارد، همچنین، همهٔ بست‌ها به‌جز یکی دارای درجهٔ $k+1$ هستند. ریشهٔ درخت T_k را با v_0 نشان

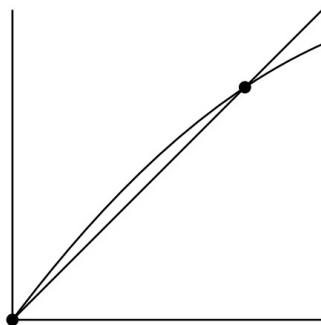
می‌دهیم. فرض کنید $T_{k,n}$ قطعی از این درخت به ارتفاع n مانند شکل ۴ باشد. با فرض اینکه بندها به‌طور مستقل و با احتمال p باز باشند، فرض کنید $\pi_n = \pi_{k,n}(p)$ احتمال این باشد که $T_{k,n}$ شامل یک مسیر باز به طول n از ریشه به یک برگ است. چون چنین مسیر بازی وجود دارد اگر و تنها اگر فرزند v_1 از v_0 با بند $v_0 v_1$ باز و یک مسیر باز به طول $n-1$ از v_1 به یک برگ موجود باشد، داریم:

$$\pi_n = 1 - (1 - p\pi_{n-1})^k = f_{k,n}(\pi_{n-1}). \quad (3)$$

روی بازهٔ $[0, 1]$ ، تابع $f_{k,p}(x)$ صعودی و مقعر است به‌طوری‌که $f_{k,p}(0) = 0$ و $f_{k,p}(1) < 1$. همچنین، برای $0 < x < 1$ ، $f_{k,p}(x) = x$ اگر و تنها اگر $k p > 1$. به‌علاوه، نقطهٔ ثابت x در صورت وجود، یکتا است. به شکل ۵ نگاه کنید.



شکل ۴. درخت $T_{4,4}$ با ریشهٔ v_0 .



شکل ۵. برای $k=2$ و $p=\frac{2}{3}$ تابع صعودی و مقعر

$$f(x) = f_{k,p}(x) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}x^2 \quad \text{دارای مشتق } f'(x) = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}x \quad \text{و}$$

$$f(0) = 0, \quad f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}, \quad f(1) = 1 \quad \text{است.}$$

بنابراین، اگر $p > \frac{1}{k}$ ، آنگاه با توجه به رابطهٔ (۳)، $\pi_{n-1} \geq x_0$ به این مطلب دلالت می‌کند که $\pi_n \geq x_0$. چون $\pi_0 = 1$ ، نتیجه می‌شود که برای هر n ، $\pi_n \geq x_0$. همچنین، $\theta_{v_0}(T_{k,p}) \geq x_0 > 0$ ، دارد که $p_H^b(T_k) \leq \frac{1}{k}$. همچنین، اگر $p \leq \frac{1}{k}$ ، آنگاه $\pi_0 = 0$ ، نقطهٔ ثابت یکتای $f_{k,p}(x)$ میل می‌کند. همچنین، $\theta_{v_0}(T_{k,p}) = 0$. بنابراین، احتمال بحرانی $p_H^b(T_k)$ برابر با $\frac{1}{k}$ است.

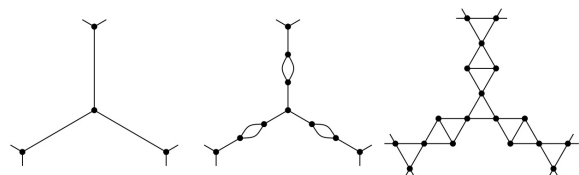
با توجه مجدد به p_T ، مشاهده می‌شود که احتمال اینکه یک بست y در گراف به فاصلهٔ ℓ از ریشهٔ v_0 در خوشهٔ C_{v_0} قرار بگیرد

هر یال با k یال موازی باشد، آنگاه $1 - p_c^b(\Lambda^{[k]}) = (1 - p_c^b(\Lambda))^{1/k}$ که در آن مجدداً p_c^b یا p_T^b است. البته $p_c^s(\Lambda) = p_c^s(\Lambda^{[k]})$ با ترکیب کردن این اعمال، می‌توان هر بند یک گراف را با k مسیر مستقل به طول ℓ برای به دست آوردن یک گراف جدید جایگزین کرد. برای هر پرکولاسیون بندی احتمال‌های بحرانی قدیم (p_{old}) و جدید (p_{new}) در شرط

$$p_{old} = 1 - (1 - p_{new}^\ell)^k,$$

صدق می‌کنند. در این روش، با یک عمل مقدماتی روی گراف، یک احتمال بحرانی در بازه $(0, 1)$ می‌تواند خیلی نزدیک به هر نقطه از بازه $(0, 1)$ حرکت کند.

اگر احتمال بحرانی را برای یک گراف Λ بدانیم، آنگاه احتمال‌های بحرانی را برای یک خانواده از گراف‌های Λ' حاصل از دنباله عمل‌های مقدماتی روی Λ می‌دانیم. شکل ۶ را ببینید.



شکل ۶. تبدیل یک مدل پرکولاسیون بندی به صورت‌های دیگر و آنگاه به یک مدل پرکولاسیون بستی. اگر اولین (مشبکه شش ضلعی) دارای احتمال بحرانی p باشد، آنگاه دومین دارای احتمال بحرانی r است که $r^2(2-r) = p$ که همچنین احتمال بحرانی برای پرکولاسیون بستی روی گراف سوم است.

نشان دادن این‌که هر $0 < \pi < 1$ ، احتمال بحرانی یک گراف (یا در واقع یک درخت) است کار ساده‌ای است. فرض کنید T یک درخت ریشه‌دار متناهی با ارتفاع (عمق) h با ℓ برگ باشد. فرض کنید $T^1 = T$ و T^n درخت ریشه‌دار با ارتفاع hn تشکیل شده از درخت T^{n-1} با مشخص کردن هر برگ با ریشه یک نسخه از T باشد. به عنوان مثال، اگر T یک ستاره با k یال باشد، آنگاه T^n یک درخت $T_{k,n}$ تعریف شده در قبل است. فرض کنید T^∞ حد درخت T^n باشد که در روش واضح بالا تعریف شد. با فرض اینکه بندهای T به طور مستقل با احتمال p باز باشند، آنگاه تعداد برگ‌های T متصل به ریشه از طریق مسیرهای باز یک توزیع مشخص X با امید ریاضی $p^h \ell$ دارد. حال، فرض کنید که بندهای T^∞ به طور مستقل و با احتمال p باز هستند و X_n تعداد بست‌های T^∞ بافاصله hn از ریشه و متصل به ریشه توسط مسیرهای باز باشد، آنگاه دنباله (X_0, X_1, X_2, \dots) یک فرایند شاخه‌ای است. داریم که $X_0 = 1$ و هر X_n در حقیقت مجموع X_{n-1} نسخه مستقل از توزیع X است. چون X کران‌دار است، به استثنای حالتی که $p = \ell = 1$ ، نشان دادن اینکه پرکولاسیون اتفاق می‌افتد (مانند بحث بالا برای T_k) اگر و

دقیقاً برابر با p^ℓ است. در نتیجه،

$$\begin{aligned} \chi_{v_0}^b(T_k; p) &= E(|C_{v_0}|) \\ &= \sum_{y \in T_k} \mathbb{P}(y \in C_{v_0}) \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} k^\ell p^\ell, \end{aligned}$$

که برای $p < \frac{1}{k}$ متناهی و برای $p \geq \frac{1}{k}$ نامتناهی است. بنابراین، احتمال بحرانی $p_T^b(T_k)$ برابر با $\frac{1}{k}$ است.

برای هر درخت نامتناهی، به شرط اینکه ریشه x باز باشد، خوشه‌های شامل ریشه x در پرکولاسیون بستی و بندی دقیقاً دارای توزیع یکسان هستند. در واقع، هر فرزند یک بست در خوشه باز، با احتمال p در خوشه باز قرار می‌گیرد. بنابراین، برای درخت k -شاخه‌ای T_k ، $p_H^s = p_H^b = p_T^b = p_T^s = \frac{1}{k}$. با بحث مشابهی، به سادگی می‌توان نشان داد که چهار احتمال بحرانی بالا برای درخت $k+1$ -منتظم همچنین برابر با $\frac{1}{k}$ است.

بحث بالا را با مقایسه بین پرکولاسیون روی درخت T_k و یک فرایند شاخه‌ای مشخص ادامه می‌دهیم. در زیر یک مثال اولیه از چنین مقایسه‌ای را به اختصار می‌آوریم. اگر Λ هر گراف با درجه بیشینه Δ باشد، آنگاه یک مقایسه با یک فرایند شاخه‌ای نشان می‌دهد که همه احتمال‌های بحرانی مرتبط با Λ حداقل برابر با $\frac{1}{\Delta-1}$ هستند. برای رسیدن به این مطلب توجه کنید که برای هر بست y در خوشه C_x ، حداقل یک مسیر باز در Λ از x به y وجود دارد. بنابراین، $\chi_x(p) = E_p(|C_x|)$ برابر حداکثر تعداد مورد انتظار مسیرهای (متناهی) باز در گراف Λ است که از بست x شروع شده‌اند. از طرفی، حداکثر $\Delta(\Delta-1)^{\ell-1}$ مسیر در Λ به طول ℓ وجود دارد که از بست x شروع می‌شوند. بنابراین، برای پرکولاسیون بندی و بستی،

$$\begin{aligned} \chi_x^b(p) &\leq 1 + \sum_{\ell \geq 1} \Delta(\Delta-1)^{\ell-1} p^\ell, \\ \chi_x^s(p) &\leq p + \sum_{\ell \geq 1} \Delta(\Delta-1)^{\ell-1} p^{\ell+1}. \end{aligned}$$

هر دوی مجموع‌های بالا برای هر $p < \frac{1}{\Delta-1}$ همگرا هستند. بنابراین، $p_T^s(\Lambda)$ و $p_T^b(\Lambda)$ هر دو بزرگ‌تر یا مساوی $\frac{1}{\Delta-1}$ هستند. وقتی $p_H \geq p_T$ ، نابرابری‌های متناظری برای p_H برقرار هستند. این نشان می‌دهد که میان همه گراف‌های با درجه بیشینه Δ ، درخت Δ -منتظم کمترین احتمال بحرانی را دارا است.

تغییرات مقدماتی متنوعی را می‌توان روی یک گراف اعمال کرد که احتمال بحرانی به آسانی محاسبه شود. برای مثال، اگر Λ هر گرافی و $\Lambda^{(\ell)}$ گرافی باشد که از تقسیم کردن هر یال به تعداد $\ell-1$ بار به دست آید، آنگاه $p_c^b(\Lambda^{(\ell)}) = p_c^b(\Lambda)^{1/\ell}$ که در آن p_c^b یا p_H^b یا p_T^b است. همچنین، اگر $\Lambda^{[k]}$ هر گراف حاصل از جایگزین کردن

کامل روی ℓ رأس است. هرجایی که دایره‌ها باهم تماس دارند، گراف‌های کامل متناظر از یک رأس چسبیده سهم می‌برند.

این گراف با جایگزین کردن هر رأس درخت k -منتظم T_k توسط گراف کاملی روی ℓ رأس و چسباندن هر جفت از گراف‌های کامل متناظر با یک یال T_k با مشخص کردن یک رأس از یکی با رأسی از دیگری، بدون استفاده کردن رأس در بیشتر از یکجا، تشکیل می‌شود. رأس‌های حاصل از این مشخص‌سازی را «رأس‌های پیوست شده» گویند. اگرچه $C_{k,\ell}$ شامل دایره‌های زیادی است، هنوز ساختار یک درخت را دارد و پرکولاسیون روی $C_{k,\ell}$ ممکن است دوباره با یک فرایند شاخه‌ای مقایسه شود. فرض کنید K_ℓ یک گراف کامل با k رأس مشخص شده (پیوست شده) v_1, \dots, v_k باشد. با فرض اینکه یال‌های K_ℓ به‌طور مستقل و با احتمال p باز باشند، فرض کنید X_p یک تعداد تصادفی از رأس‌های مابین v_1, \dots, v_k باشد که از طریق یک مسیر باز از v_1 رسیده باشند. فرض کنید بخواهیم خوشه‌ی باز یک بست آغازین مفروض از $C_{k,\ell}$ را با کار روی x جستجو کنیم. به‌استثنای گام اول، از هر رأس پیوست شده‌ای که در یک گام به آن می‌رسیم، تعداد رأس‌های پیوست شده‌ی اضافی که در گام بعدی دریافت می‌کنیم دارای توزیع یکسان X_p هستند و این تعداد مستقل‌اند. در نتیجه، با در نظر گرفتن یک فرایند شاخه‌ای به‌صورت بالا،

$$p_H^b(C_{k,\ell}) = p_T^b(C_{k,\ell}) = \inf \{p : E(X_p) > 1\}.$$

این کمیت به‌آسانی برای هر k و ℓ مفروض محاسبه می‌شود. احتمال‌های بحرانی برای پرکولاسیون بستی روی $C_{k,\ell}$ به‌صورت متناظر محاسبه می‌شوند. ساختمان‌های مشابه زیادی از گراف‌های «درخت‌گون» وجود دارند که احتمال‌های بحرانی در آن‌ها می‌تواند به کمک فرایند شاخه‌ای محاسبه شود.

۵ شبکه \mathbb{Z}^2

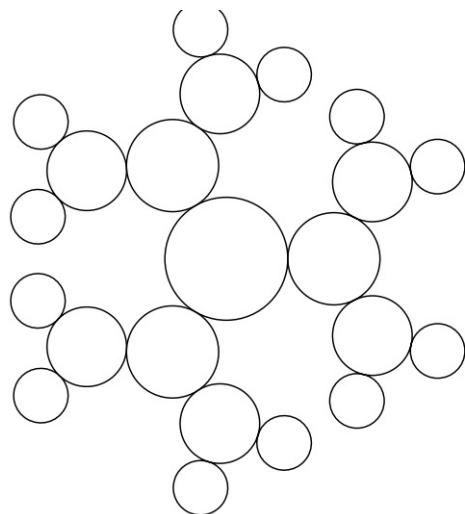
در ادامه، برخی کران‌ها روی احتمال‌های بحرانی گوناگون برای \mathbb{Z}^2 را بررسی می‌کنیم. البته، پرکولاسیون روی \mathbb{Z} مقدماتی است و همه‌ی احتمال‌های بحرانی که قبلاً تعریف شد برابر با یک هستند. در مطالعه \mathbb{Z}^2 ، از ویژگی‌های ساده‌ی گراف‌های مسطح استفاده می‌شود. هنگامی که این گراف‌ها تکه‌ای خطی هستند (در واقع، آن‌ها زیرتقسیم‌هایی دارند که زیرگراف‌هایی از \mathbb{Z}^2 هستند، اگر ما بخواهیم)، مشکلات توپولوژیکی وجود ندارد. در حقیقت، همه‌ی آن چیزی که نیاز خواهیم داشت این است که هر چندبر (در گراف \mathbb{Z}^2) صفحه را به دو مؤلفه‌ی درونی و بیرونی تفکیک سازند (با درونی کران‌دار شده). از این‌رو، رابطه‌ی اوایلر به‌سادگی به کمک استقرار

تنها اگر $E(X) > 1$ ، یعنی اگر و تنها اگر $p^h \ell > 1$ ، کار ساده‌ای است: این یک حالت خاصی از نتیجه‌ی بنیادی نظریه‌ی فرایندهای شاخه‌ای است. در حقیقت،

$$\begin{aligned} p_T^s(T^\infty) &= p_H^s(T^\infty) \\ &= p_T^b(T^\infty) \\ &= p_H^b(T^\infty) \\ &= \ell^{-\frac{1}{h}}. \end{aligned} \quad (۴)$$

حال، فرض کنید $k \geq 1$ و $\frac{1}{k} < \pi < \frac{1}{k+1}$. عدد $0 < \alpha < 1$ را به‌گونه‌ای تعریف کنید که $\frac{1}{\pi} = (k+1)^\alpha k^{1-\alpha}$. فرض کنید $\mathbf{a} = (a_i)_{i=1}^\infty$ دنباله‌ی اعداد 0 و 1 با چگالی α باشد که به‌صورت زیر ساخته می‌شود: هر زمان 2^{j-1} بر i بخش‌پذیر باشد اما 2^j بر i بخش‌پذیر نباشد، قرار می‌دهیم $a_i = 1$ و تنها اگر z زمین بیت در بسط دودویی α ، یک باشد. فرض کنید $T_{\mathbf{a}}$ یک درخت ریشه‌دار باشد که هر بست در فاصله‌ی i از ریشه دارای $k + a_{i+1}$ فرزند است. در این صورت، برای هر n ، می‌توان درخت‌های T' و T'' با ارتفاع $\ell = 2^n$ ای پیدا کرد به‌طوری‌که $(T')^\infty \subset T_{\mathbf{a}} \subset (T'')^\infty$ و البته در آن برگ‌های T'' ، $\frac{k+1}{k}$ برابر تعداد برگ‌های T' است. با استفاده از رابطه‌ی (۴)، به‌آسانی نتیجه می‌شود که $p_c(T_{\mathbf{a}}) = \pi$ که در آن p_c بیانگر هر چهار نوع احتمال بحرانی است. به‌صورت دیگر، فرض کنید T درخت ریشه‌دار تصادفی با هر بست $k+1$ فرزند با احتمال r و k فرزند با احتمال $1-r$ باشد که در آن انتخاب‌ها برای هر بست به‌صورت تصادفی باشد. نشان دادن اینکه برای این درخت تصادفی با احتمال یک، $p_c(T) = \frac{1}{k+1}$ کار ساده‌ای است [۲].

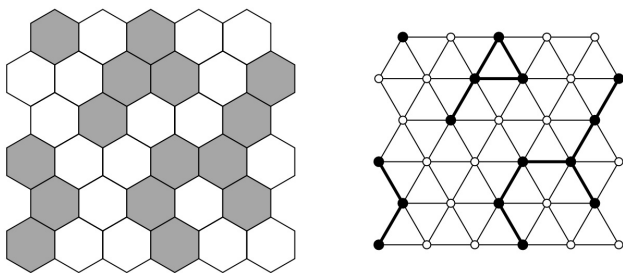
به‌طور کلی، محاسبه‌ی احتمال‌های بحرانی گوناگون برای گرافی که «به‌اندازه‌ی کافی درخت‌گون» است کار ساده‌ای است. برای مثال، برای $\ell \geq k \geq 3$ ، فرض کنید $G_{k,\ell}$ کاکتوس نشان داده‌شده در شکل ۷ باشد.



شکل ۷. بخشی از کاکتوس $C_{k,\ell}$: هر دایره بیانگر یک گراف

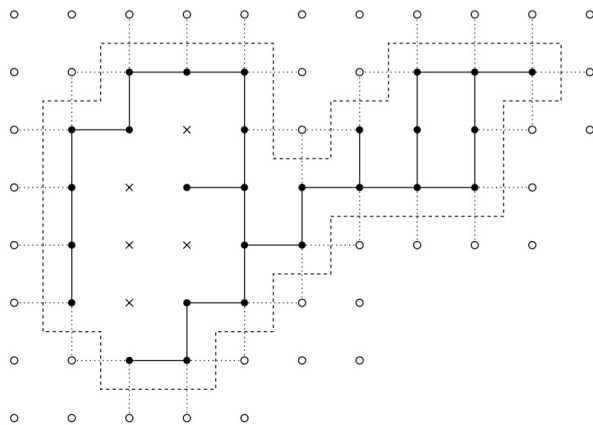
بست‌ها و بندهای دوگان می‌شناسیم و همچنین بند دوگان e^* معمولاً باز در نظر گرفته می‌شود هنگامی که e بسته است و به عکس.

یک استفاده ساده از دوگانگی مسطح، یک روش بدیل برای تجسم کردن پرکولاسیون بستنی فراهم می‌کند. فرض کنید Λ یک گراف مسطح باشد؛ در پرکولاسیون وجه روی Λ ، یک حالت به باز یا بسته بودن برای هر وجه Λ تخصیص می‌دهیم. وجوه Λ ، مجموعه رئوس یک گراف را هنگامی دو وجه مجاورند تشکیل می‌دهند هرگاه آن‌ها در یک یال مشترک باشند. این گراف دقیقاً Λ^* است. شکل ۱۰ را ببینید.



شکل ۱۰. پرکولاسیون وجه روی مشبکه ۶ ضلعی (چپ):

وجه‌های باز سایه‌دار هستند. زیرگراف باز متناظر در پرکولاسیون بستنی روی مشبکه مثلی در سمت راست نشان داده شده است (با مقیاس یکسان).

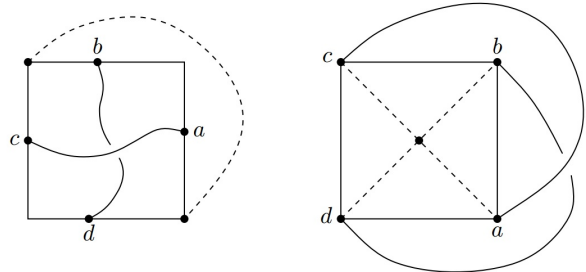


شکل ۱۱. یک زیرگراف همبند متناهی H از \mathbb{Z}^2 با مجموعه

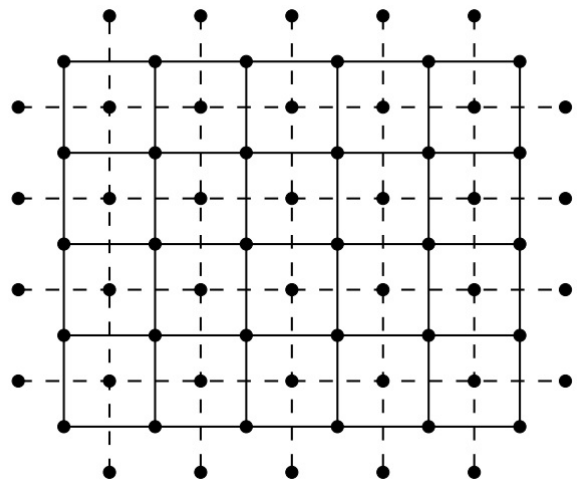
رئوس C (خطوط پررنگ و دایره‌های پررنگ). رئوس در مؤلفه‌های متناهی $C - \mathbb{Z}^2$ در عرض نشان داده شده‌اند. برخی از این رئوس در مؤلفه نامتناهی با دایره‌های توخالی نشان داده شده‌اند. این خطوط، بندهای $C - C_\infty$ و خطوط تیره مرز بیرونی C هستند.

بنابراین، پرکولاسیون وجه روی Λ معادل با پرکولاسیون بستنی روی Λ^* است. با در نظر گرفتن وجه‌ها یا بست‌های باز به عنوان سیاه‌های رنگ‌شده و وجه‌ها یا بست‌های بسته به عنوان سفیدها، تصویر پرکولاسیون وجه برای تجسم ساده‌تر است.

نتیجه می‌شود (برای دیدن جزئیات به فصل ۱ بولاباش [۱] مراجعه کنید) و نشان می‌دهد که $K_{3,3}$ و K_5 غیرمسطح هستند. بنابراین، اگر C یک دایره در صفحه و a, b, c, d چهار رأس C با این ترتیب اطراف C باشند، آنگاه نه درونی و نه بیرونی C نمی‌توانند شامل مسیرهای مجزای $a-c$ و $b-d$ باشند. شکل ۸ را نگاه کنید.



شکل ۸. نه درونی و نه بیرونی یک دایره رؤیت شده با این ترتیب از بالا نمی‌توانند شامل مسیرهای مجزای $a-c$ و $b-d$ (خطوط پررنگ) باشند. هر دوی عبارات می‌توانند نه از غیرمسطح بودن K_5 یا $K_{3,3}$ بلکه با ملاحظه خط‌های مقطع نتیجه شوند.



شکل ۹. بخش‌هایی از مشبکه $\mathbb{Z}^2 = \Lambda$ (خطوط پررنگ) و

مشبکه دوگان یک ریخت Λ^* (خطوط مقطع).

یک ویژگی مهم «خود دوگانگی» \mathbb{Z}^2 را متذکر می‌شویم. این ویژگی بعداً خیلی مهم خواهد بود؛ از این ویژگی به صورت ساده استفاده خواهیم کرد. دوگان Λ^* از یک گراف Λ برداشت شده در صفحه یک رأس برای هر وجه Λ و یک یال e^* برای هر یال e در Λ دارد. این یال دو رأس Λ^* متناظر به وجه‌های Λ که در حاشیه (مرز) e قرار می‌گیرند را به هم وصل می‌کند. زمانی $\Lambda = \mathbb{Z}^2$ ، مرسوم است که $v = (x + \frac{1}{2}, y + \frac{1}{2})$ را به عنوان رأس دوگان متناظر با وجه با رأس‌های (x, y) ، $(x + 1, y)$ ، $(x + 1, y + 1)$ و $(x, y + 1)$ در نظر بگیریم. به شکل ۹ نگاه کنید. مشبکه دوگان، آنگاه $\mathbb{Z}^2 + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ خواهد بود که با Λ یک ریخت است. گراف دوگان Λ^* در متون پرکولاسیون بندی روی Λ اهمیت دارد. در این متون، بست‌ها و بندهای Λ^* را به عنوان

با برگشت به مطالعه پرکولاسیون روی \mathbb{Z}^2 ، اگر H زیرگرافی همبند متناهی از $\Lambda = \mathbb{Z}^2$ با مجموعه رئوس C باشد، آنگاه یک مؤلفه نامتناهی یکتای C_∞ از C موجود است که $\Lambda - C$ زیرگراف القاشده Λ توسط رئوس بیرونی H است. با مرز بیرونی $\partial^\infty C$ از C مجموعه بندهای دوگان Λ^* را به بندهای Λ متصل به C و C_∞ معنی می‌کنیم. به شکل ۱۱ نگاه کنید. اولین مرحله نشان دادن این است که $\partial^\infty C$ ویژگی‌هایی را دارا است که از یک مرز انتظار داریم.

لم ۱۰۵. اگر C مجموعه رئوس یک زیرگراف همبند متناهی \mathbb{Z}^2 باشد، آنگاه $\partial^\infty C$ یک دایره با C در درون آن است.

اثبات. به [۲] مراجعه کنید. \square

در ادامه، چند نتیجه پایه‌ای و از جمله قضیه بنیادی هریس و کیستن روی احتمال‌های بحرانی را نشان می‌دهیم. ابتدا به کمک مباحث برودبنت و هم‌زلی [۳] و هم‌زلی [۱۳، ۱۴] نشان داده خواهد شد که پدیده پرکولاسیون بندی در \mathbb{Z}^2 ساده نیست: احتمال‌های بحرانی نه صفر و نه یک هستند. برای نشان دادن این مطلب فرض کنید $\mu_n(\Lambda; x)$ تعداد قدم‌های از خود گریز در Λ با شروع از بست x باشد (در نظریه گراف منظور از قدم از خود گریز به‌طور ساده یک مسیر است). همه رأس‌های \mathbb{Z}^2 معادل هستند و هنگامی که \mathbb{Z}^2 ، ۴-منتظم است،

$$\mu_n = \mu_n(\mathbb{Z}^2) = \mu_n(\mathbb{Z}^2, \circ) \leq 4 \times 3^{n-1}.$$

قضیه ۲۰۵. (قضیه هریس و کیستن) برای پرکولاسیون بندی در \mathbb{Z}^2 داریم:

$$\frac{1}{3} \leq p_T \leq p_H \leq \frac{2}{3}.$$

اثبات. همان‌طور که قبلاً ذکر شد، $p_T \leq p_H$ باید فقط نابرابری‌های بیرونی ثابت شود. فرض کنید ابتدا $p < \frac{1}{3}$ و C خوشه باز مبدأ در پرکولاسیون بندی مستقل روی \mathbb{Z}^2 باشد که در آن هر بند با احتمال p باز است. برای هر بست $x \in C$ ، حداقل یک مسیر باز از x به x وجود دارد. در نتیجه، $|C_x|$ برابر با حداکثر تعداد X از مسیرهای باز با شروع از x است. چون یک مسیر در \mathbb{Z}^2 و به طول n با احتمال p^n باز است،

$$\begin{aligned} X(p) &= E_p(|C_x|) \\ &\leq E_p(X) \\ &= \sum_{n \geq 0} \mu_n p^n \\ &\leq 1 + \frac{4}{3} \sum_{n \geq 1} (3p)^n \\ &< \infty \end{aligned}$$

در نتیجه، $p_T \geq p$ چون $p < \frac{1}{3}$ دلخواه بود، نتیجه می‌شود که $p_T \geq 1/3$. برای کران بالا به $\Lambda = \mathbb{Z}^2$ به همراه دوگانش یعنی

زمانی $1 - p < 3(1 - p)$ ، مجموع نهایی همگرا است. همچنین، زمانی $k \rightarrow \infty$ ، $E_p(Y_k) \rightarrow 0$ ، k ایجابی وجود دارد که $E_p(Y_k) < 1$. فرض کنید A_k پیشامد این باشد که $Y_k = 0$ ؛ چون $E_p(Y_k) < 1$ ، $\mathbb{P}_p(A_k) > 0$. فرض کنید B_k پیشامد این باشد که k بند در L_k باز باشند. توجه کنید A_k و B_k مستقل هستند. همچنین، اگر هر دو برقرار باشند، آنگاه دایره دوگان بازی اطراف مبدأ وجود ندارد. لذا، بنا بر لم ۱۰۵، خوشه بازی شامل مبدأ نامتناهی است. در نتیجه،

$$\begin{aligned} \theta(p) &= \theta_\circ(p) \\ &\geq \mathbb{P}_p(A_k \cap B_k) \\ &= \mathbb{P}_p(A_k) \mathbb{P}_p(B_k) \\ &= \mathbb{P}_p(A_k) p^k > 0. \end{aligned}$$

این نشان می‌دهد که $p_H \leq p$ چون $p > \frac{1}{3}$ دلخواه بود، $p_H \leq \frac{1}{3}$ و برهان کامل می‌شود. \square

قضیه ۳۰۵. فرض Λ یک گراف چندگانه به‌طور موضعی متناهی، نامتناهی و همبند باشد. در این صورت،

$$p_H^s(\Lambda) \geq p_H^b(\Lambda),$$

و

$$p_T^s(\Lambda) \geq p_T^b(\Lambda).$$

اثبات. هر دو نابرابری از این حکم ثابت می‌شوند که برای هر بند x از Λ و هر عدد صحیح $n \geq 1$ و هر احتمال $0 < p < 1$ ،

$$\mathbb{P}_{\Lambda, p}^s(|C_x| \geq n) \leq p \mathbb{P}_{\Lambda, p}^b(|C_x| \geq n). \quad (5)$$

$$\begin{aligned} E_p(Y_k) &\leq \sum_{\ell \geq k+2} \ell \mu_{2\ell-1} (1-p)^{2\ell} \\ &\leq \sum_{\ell \geq k+2} \frac{4\ell}{9} (3(1-p))^{2\ell}. \end{aligned}$$

قرار می‌دهیم $R_{t+1} = R_t$ و $D_{t+1} = D_t \cup \{z_t\}$. توجه کنید که در هر گام، احتمال شرطی اینکه z_t باز باشد p است. فرایند وقتی Λ_n متناهی باشد، پایان می‌پذیرد. با این ساختمان، برای هر t, R_t یک مجموعه همبند از بست‌های باز است و همه بست‌های در D_t بسته هستند. در نتیجه، چون هیچ بست‌ی در R_ℓ یک همسایه در

$$U_\ell = V(\Lambda_n) \setminus (R_\ell \cup D_\ell)$$

ندارد، مجموعه R_ℓ دقیقاً یک خوشه باز C_x^s است.

برای مقایسه توزیع $|C_x^s|$ با $|C_x^b|$ فرض کنید C_x^b به روش مشابه توسط دنباله تصادفی $(R'_t, U'_t, D'_t)_{t=1}^\ell$ به صورت بالا تحلیل شود. این دنباله مانند \mathcal{T} ساخته می‌شود به استثنای اینکه با انتخاب $e_t = y_t z_t$ باید بررسی کرد که آیا بند e_t باز است یا نه. این دو دنباله دارای توزیع یکسان هستند. به ویژه، $|R'_\ell| = |R_\ell|$ و $|C_x| = |R'_\ell|$ دارای توزیع یکسان هستند. این نشان می‌دهد که رابطه (۵) برقرار است چون R'_ℓ در خوشه باز C_x^b از x در Λ_p^b قرار می‌گیرد که مجموعه رئوس زیرگراف فراگیر توسط مجموعه بندها است. در نتیجه، فرایند \mathcal{T}' باز است. \square

قضیه ۴.۵. فرض کنید Λ یک گراف نامتناهی و همبند با درجه بیشینه $\infty < \Delta$ باشد. در این صورت،

$$p_H^s(\Lambda) \leq 1 - (1 - p_H^b(\Lambda))^{\Delta-1}.$$

نابرابری مشابهی روی p_T برقرار است.

اثبات. کافی است نشان داده شود که ثابتی چون $K = K(\Delta)$ وجود دارد به طوری که برای هر بست x از Λ و هر صحیح $n \geq 1$ هر $0 < p < 1$

$$\mathbb{P}_{\Lambda, r}^s(|C_x| \geq n | \text{باز باشد } x) \geq \mathbb{P}_{\Lambda, p}^b(|C_x| \geq Kn),$$

که در آن

$$r = 1 - (1 - p)^{\Delta-1}.$$

ایده برهان بسیار شبیه به ایده برهان قضیه قبل است [۸]. \square

۶ بحث و نتیجه‌گیری

پرکولاسیون بست‌ی و بندی روی چندین شبکه بررسی شد. دو نوع احتمال بحرانی هم‌رزی و تمپرلی روی این شبکه‌ها تعیین و ارائه شدند. نحوه استفاده از فرایندهای شاخه‌ای و قانون ۱-۰ کولموگوروف در تحلیل شبکه‌ها ارائه شد. در نهایت، با تمرکز روی شبکه \mathbb{Z} به قضیه بنیادی هریس و کیستن در تعیین کران‌های پایین و بالای احتمال‌های بحرانی پرداخته شد.

در مقابل، وقتی $n \rightarrow \infty$ ، نتیجه می‌شود که

$$\theta_x(\Lambda_p^s) \leq p\theta_x(\Lambda_p^b). \quad (۶)$$

بنابراین، اگر $\theta_x(\Lambda_p^b) = 0$ ، آنگاه $\theta_x(\Lambda_p^s) = 0$ و

$$p_H^s(\Lambda) \geq p_H^b(\Lambda).$$

همچنین، اگر رابطه‌ی (۵) برقرار باشد، آنگاه

$$\begin{aligned} \chi_x(\Lambda_p^s) &= \sum_{n=1}^{\infty} n \mathbb{P}_{\Lambda, p}^s(|C_x| = n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_{\Lambda, p}^s(|C_x| \geq n) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} p \mathbb{P}_{\Lambda, p}^b(|C_x| \geq n) \\ &= p\chi_x(\Lambda_p^b) \end{aligned}$$

در نتیجه، اگر $\chi_x(\Lambda_p^b) < \infty$ ، آنگاه $\chi_x(\Lambda_p^s) < \infty$ و همچنین

$$p_T^s(\Lambda) \geq p_T^b(\Lambda).$$

اثبات رابطه (۵) باقی می‌ماند. وقتی C_x تهی در Λ_p^s است اگر

x بسته باشد، نابرابری (۵) معادل با

$$\mathbb{P}_{\Lambda, p}^s(|C_x| \geq n | X \text{ باز باشد}) \leq \mathbb{P}_{\Lambda, p}^b(|C_x| \geq n),$$

است. برای اثبات این رابطه، می‌توان Λ را با زیرگراف متناهی Λ_n از Λ که رئوس آن فاصله n از x دارد، جایگزین کرد، چون پیشامد $|C_x| \geq n$ تنها وابسته به حالات بست‌ها یا بندها در Λ_n است.

فرض کنید C_x^s خوشه بازی در پرکولاسیون بست‌ی روی Λ_n شامل x باشد مشروط به اینکه روی سراسر x باز باشد. حال، دنباله تصادفی $\mathcal{T} = (R_t, D_t, U_t)_{t=1}^\ell$ از افزایش‌های روی مجموعه رئوس $V(\Lambda_n)$ از Λ_n را در نظر می‌گیریم. این دنباله به گونه‌ای خواهد بود که مجموعه نهایی R_ℓ بعد از تعداد تصادفی ℓ گام، همان خوشه C_x^s خواهد بود. این نمادگذاری نشان می‌دهد که بست‌های در R_t توسط t گام به دست خواهند آمد که در D_t بسته و در U_t بررسی شده خواهند بود. برای تعریف \mathcal{T} ، قرار می‌دهیم:

$$R_1 = \{x\}, \quad U_1 = V(\Lambda_n) \setminus \{x\}, \quad D_1 = \emptyset.$$

به شرط (R_t, D_t, U_t) ، اگر بند $R_t - U_t$ وجود نداشته باشد، قرار می‌دهیم $t = \ell$ و دنباله متوقف می‌شود. در غیر این صورت، یک بند $e_t = y_t z_t$ با $y_t \in R_t$ و $z_t \in U_t$ انتخاب می‌شود و قرار داده می‌شود:

$$U_{t+1} = U_t \setminus \{z_t\}.$$

حال، بررسی می‌کنیم که آیا بست z_t باز است؟ اگر چنین باشد قرار می‌دهیم $R_{t+1} = R_t \cup \{z_t\}$ و $D_{t+1} = D_t$. در غیر این صورت،

مراجع

- [1] Bollobás, B. (1998). *Modern Graph Theory*. Springer.
- [2] Bollobás, B., Riordan, O. (2006). *Percolation*, Cambridge University Press.
- [3] Broadbent, S. R., Hammersley, J. M. (1957). Percolation processes. I. Crystals and mazes. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **53**, 629-641.
- [4] Chayes, J. T., Chayes, L. (1986). *Percolation and random media*. In *Phénomènes Critiques, Systèmes Aléatoires, Théories de Jauge*, Part I, II (Les Houches, 1984). North-Holland, 1001-1142.
- [5] Chayes, J. T., Puha, A. L., Sweet T. (1999). Independent and dependent percolation. In *Probability Theory and Applications* (Princeton, NJ, 1996). *American Mathematical Society*, 49-166.
- [6] Durrett, R. (1984). Oriented percolation in two dimensions. *Ann. Probab.* **12**, 999-1040.
- [7] Durrett, R. (1988). *Lecture Notes on Particle Systems and Percolation*. *Wadsworth and Brooks/Cole Advanced Books and Software*, viii+335 pp.
- [8] Kesten, H. (1980). The critical probability of bond percolation on the square lattice equals 0.5. *Comm. Math. Phys.* **74**, 41-59.
- [9] Kesten, H. (1982). *Percolation Theory for Mathematicians*. Birkhäuser.
- [10] Kesten, H. (2003). *First-passage percolation*. In *From classical to modern probability*. Birkhäuser, 93-143.
- [11] Grimmett, G. (1989). *Percolation*. Springer.
- [12] Grimmett, G. (2004). *The random-cluster model*. In *Probability on Discrete Structures*. Springer, 73-123.
- [13] Hammersley, J. M. (1957). Percolation processes. II. The connective constant. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **53**, 642-645.
- [14] Hammersley, J. M. (1959). *Bornes supérieures de la probabilité critique dans un processus de filtration*. In *Le Calcul des Probabilités et ses Applications*. Paris, 15-20 Juillet 1958. Centre National de la Recherche Scientifique, 17-37.
- [15] Harris, T. E. (1960). A lower bound for the critical probability in a certain percolation process. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **56**, 13-20.
- [16] Hughes, B. D. (1995). *Random walks and random environments*. Vol. 1. Random walks. Oxford University Press.
- [17] Hughes, B. D. (1996). *Random walks and random environments*. Vol. 2. Random environments. Oxford University Press.
- [18] Meester, R., Roy, R. (1994). Uniqueness of unbounded occupied and vacant components in Boolean models. *Ann. Appl. Probab.* **4**, 933-951.
- [19] Smythe, R. T., Wierman, J. C. (1978). *First-passage Percolation on the Square Lattice*. Springer.
- [20] Vahidi-Asl, M. Q., Wierman, J. C. (1990). First-passage percolation on the Voronoï tessellation and Delaunay triangulation. In *Random Graphs '87* (Poznań, 1987). Wiley, 341-359.
- [21] Vahidi-Asl, M. Q., Wierman, J. C. (1992). A shape result for first-passage percolation on the Voronoï tessellation and Delaunay triangulation. In *Random Graphs*, **2** (Poznań, 1989). Wiley, 247-262.
- [22] Vahidi-Asl, M. Q., Wierman, J. C. (1993). Upper and lower bounds for the route length of first-passage percolation in Voronoï tessellations. *Bull. Iranian Math. Soc.* **19**, 15-28.

Introduction to site and bond percolation on the lattice \mathbb{Z}^2

Ramin Kazemi¹

Abstract:

The main goal of this paper is to investigate the site and bond percolation of the lattice \mathbb{Z}^2 . The main symbols and concepts, including critical probabilities, are introduced. Bethe lattice and k -branching trees are examined and finally lattice \mathbb{Z}^2 is considered. The fundamental theorem of Harris and Kesten that presents the lower and upper bounds of the critical probability on the lattice \mathbb{Z}^2 expresses and proves.

Keywords: Site and bond percolation, critical probabilities, lattice \mathbb{Z}^2 .

¹ Department of statistics, Imam Khomeini international university