

توزیع گامبل تبدیل شده‌ی مکعبی بر اساس طرح تبدیل شده‌ی رتبه مکعبی: استنباط و کاربرد آن

ابوذر بازیاری^۱

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۰۶/۱۸

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۰۵/۲۴

چکیده:

در این مقاله، تعمیم جدیدی از توزیع گامبل تبدیل شده به عنوان توزیع گامبل تبدیل شده‌ی مکعبی بر اساس طرح تبدیل شده‌ی رتبه مکعبی معرفی شده است. نشان داده می‌شود که برای برخی از پارامترها، تابع چگالی پیشنهادی مسوکورتیک و برای برخی دیگر از پارامترها تابع چگالی شبیه تابع پلاتیکوریک است. ویژگی‌های آماری این توزیع، شامل تابع بقا، تابع خطر، گشتاورها و تابع مولد گشتاور مورد مطالعه قرار گرفته شده است. پارامترهای توزیع گامبل تبدیل شده‌ی مکعبی با روش ماکسیمم درستنمایی برآورد شده‌اند. همچنین دو مثال عددی کاربرد توزیع گامبل تبدیل شده‌ی مکعبی را نشان داده و با توزیع گامبل و توزیع گامبل تبدیل شده مقایسه می‌شود. در پایان، نشان داده می‌شود که برای داده‌های استفاده شده، توزیع گامبل تبدیل شده‌ی مکعبی، توزیع بهتری نسبت به توزیع‌های گامبل و گامبل تبدیل شده است.

واژه‌های کلیدی: برآورد ماکسیمم درستنمایی، تابع مولد گشتاور، تابع درستنمایی، توزیع گامبل تبدیل شده‌ی مکعبی

۱ مقدمه

مسافران هواپیما استفاده کردند. کاردیرو و همکاران (۲۰۱۲)، از توزیع گامبل در زمینه آنالیز داده‌های سیل، فضا، قابلیت اطمینان نرم‌افزار و مهندسی سازه و باد استفاده کردند.

فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع توزیع گامبل با پارامتر مقیاسی β و پارامتر مکانی μ باشد، آنگاه تابع چگالی و تابع توزیع X به ترتیب عبارت‌اند از:

$$g_X(x) = \frac{1}{\beta} z e^{-z}, \quad (1)$$

و

$$G_X(x) = e^{-z}, \quad (2)$$

که در آن $z = e^{-\frac{(x-\mu)}{\beta}}$ ، $\beta \geq 0$ و $x, \mu \in R$ است.

شاو و بوکلی (۲۰۰۹)، از طرح تبدیل شده‌ی درجه دوم رتبه‌ای^۲ برای ارائه یک روش جدید برای ساختن یک خانواده از توزیع‌ها استفاده

توزیع‌های آماری^۲ در بسیاری از جنبه‌های زندگی کاربرد دارند. در سال‌های اخیر بسط و گسترش توزیع‌های استاندارد آماری از اهمیت زیادی برخوردار شده است. در آمار و احتمال، توزیع گامبل^۳ برای مدل‌سازی توزیع حداکثر (یا حداقل) تعدادی از نمونه‌های توزیع‌های مختلف استفاده می‌شود. این توزیع توسط گامبل (۱۹۵۸) معرفی شد. برای حدود نیم‌قرن، این توزیع در تعیین کمیت‌های ریسک برای داده‌های بارندگی شدید استفاده می‌شد. همچنین توزیعی بسیار مهم برای پیش‌بینی احتمال وقوع زمین‌لرزه شدید، سیل یا سایر بلایای طبیعی مفید است. محبوبیت توزیع گامبل به دلیل کاربرد گسترده‌ی آن است که توسط کوتر و ناداراجا (۲۰۰۰) ارائه شده است. کوسونیا نیست (۲۰۰۴)، از این توزیع برای پیش‌بینی احتمال وقوع بارندگی شدید استفاده کرد. آریال و تسوکوس (۲۰۰۸)، از توزیع گامبل برای داده‌های ورود و خروج

^۱ گروه آمار، دانشگاه خلیج فارس، بوشهر (نویسنده مسئول: ab_bazyari@pgu.ac.ir)

²Statistical distributions

³Gumbel distribution

⁴Ranking quadratic transformation map

⁵Transmuted Gumbel distribution

و ویژگی‌های آماری این توزیع جدید شامل تابع مولد گشتاور، تابع بقا و تابع خطر محاسبه شده‌اند. تا آنجا که نویسنده تحقیق کرده و اطلاع دارد کارهای انجام شده و نتایج به دست آمده در مقاله‌ی حاضر کاملاً جدید می‌باشند.

در بخش دوم، توزیع گامبل تبدیل‌شده‌ی مکعبی بر اساس طرح تبدیل‌شده‌ی رتبه مکعبی معرفی شده و تابع بقا و تابع خطر آن محاسبه شده است. ویژگی‌های آماری دیگر این توزیع، شامل گشتاورها و تابع مولد گشتاور آن مورد مطالعه قرار گرفته شده است. در بخش سوم، پارامترهای توزیع گامبل تبدیل‌شده‌ی مکعبی با روش ماکسیمم درستنمایی برآورد شده‌اند. در بخش چهارم، با دو مثال عددی کاربرد توزیع گامبل تبدیل‌شده‌ی مکعبی را نشان داده و با توزیع گامبل و توزیع گامبل تبدیل‌شده مقایسه شده است. نشان داده می‌شود که برای داده‌های مورد مطالعه، توزیع گامبل تبدیل‌شده‌ی مکعبی توزیع بهتری نسبت به توزیع گامبل و توزیع گامبل تبدیل‌شده است. در نهایت بحث و نتیجه‌گیری ارائه شده است.

۲ توزیع گامبل تبدیل‌شده مکعبی

در این بخش، ابتدا فرم کلی توابع توزیع و چگالی متغیر تبدیل‌شده را ارائه و سپس توزیع گامبل تبدیل‌شده‌ی مکعبی بر اساس طرح تبدیل‌شده‌ی رتبه مکعبی شامل تابع چگالی، تابع توزیع، تابع بقا و تابع خطر را معرفی کرده و ویژگی‌های آماری آن مورد مطالعه قرار گرفته است.

توجه کنید که برای $|\lambda| \leq 1$ و هر تابع توزیع $G(x)$ ، شاو و بوکلی (۲۰۰۹) فرم کلی تابع توزیع تبدیل‌شده را به صورت رابطه (۳) تعریف کرده‌اند. همچنین با مشتق گرفته از رابطه (۳)، فرم کلی تابع چگالی آن عبارت است از:

$$f_X(x) = \lambda g(x) - 2\lambda g(x)G(x),$$

که در آن $g(x)$ هر تابع چگالی است.

۱.۲ تابع چگالی و تابع توزیع گامبل تبدیل‌شده مکعبی

قضیه ۱.۲. فرض کنید X متغیر تصادفی دارای توزیع گامبل تبدیل‌شده‌ی مکعبی با پارامتر مقیاسی β و پارامتر مکانی μ باشد،

کردند. آریال و تسکوس (۲۰۰۹) با کمک روش شاو و بوکلی (۲۰۰۹) توزیع جدیدی را به نام توزیع گامبل تبدیل‌شده^۵ پیشنهاد دادند.

برای هر متغیر تصادفی X با هر تابع توزیع $G_X(x)$ و هر تابع چگالی $g_X(x)$ ، شاو و بوکلی (۲۰۰۹) خانواده‌ی تابع توزیع تبدیل‌شده

$$F_X(x) = (1 + \lambda)G_X(x) - \lambda G_X^\lambda(x), \quad |\lambda| \leq 1, \quad (3)$$

را ارائه دادند. اگر در رابطه (۳)، $\lambda = 0$ باشد، آنگاه $F_X(x) = G_X(x)$ می‌باشد. عابدالکدیم (۲۰۱۸)، یک تابع توزیع جدید را بر اساس رابطه (۳) به صورت

$$F_X(x) = (1 + \lambda)G_X(x) - \lambda G_X^\lambda(x) + \lambda G_X^{\lambda_2}(x) \quad |\lambda| \leq 1, \quad (4)$$

ارائه داد. آریال و تسکوس (۲۰۰۹) تابع چگالی گامبل تبدیل‌شده به صورت

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{1}{\sigma} \exp\left[-\frac{x-\mu}{\sigma} - \exp\left(-\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right] \\ &= \left[1 + \lambda - 2\lambda \exp\left(-\exp\left(-\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right)\right], \quad |\lambda| \leq 1, \end{aligned}$$

را پیشنهاد دادند. دو کلاس از تبدیلات توزیع‌های تبدیل‌شده‌ی مکعبی توسط گرانزاتو و همکاران (۲۰۱۷) و رحمان و همکاران (۲۰۱۸) ارائه شده است. رحمان و همکاران (۲۰۲۰) توزیع پارتو تبدیل‌شده‌ی مکعبی را با استفاده از روش رحمان و همکاران (۲۰۱۸) معرفی و ویژگی‌های آماری آن را مورد مطالعه قرار دادند. همچنین این توزیع روی دو مجموعه از داده‌ها مورد بررسی قرار گرفت. رحمان و همکاران (۲۰۱۹) توزیع وایبول تبدیل‌شده‌ی مکعبی را با استفاده از روش رحمان و همکاران (۲۰۱۸) پیشنهاد دادند، ویژگی‌های آماری آن را محاسبه و کاربرد آن را برای دو مجموعه از داده‌ها مورد مطالعه قرار دادند. یک خانواده از توزیع‌های تبدیل‌شده‌ی مکعبی توسط انصاری و همکاران (۲۰۱۹) ارائه شده است.

برای هر متغیر تصادفی X با هر تابع توزیع $G_X(x)$ و هر تابع چگالی $g_X(x)$ ، رحمان و همکاران (۲۰۱۸) تابع چگالی و تابع توزیع

$$f_X(x) = g(x) \left((1 + \lambda_1) + 2(\lambda_2 - \lambda_1)G_X(x) - 3\lambda_2 G_X^\lambda(x) \right), \quad (5)$$

و

$$F_X(x) = (1 + \lambda_1)G_X(x) + (\lambda_2 - \lambda_1)G_X^\lambda(x) - \lambda_2 G_X^{\lambda_2}(x), \quad (6)$$

که در آن پارامترهای λ_1 و λ_2 هرکدام در بازه $[-1, 1]$ قرار دارند و $-2 \leq \lambda_2 + \lambda_1 \leq 1$ می‌باشند، را پیشنهاد دادند.

در مقاله حاضر، تعمیم جدیدی از توزیع گامبل به عنوان توزیع گامبل تبدیل‌شده‌ی مکعبی بر اساس طرح تبدیل‌شده‌ی رتبه مکعبی معرفی شده

آنگاه تابع چگالی و تابع توزیع متغیر تصادفی X به ترتیب عبارت است اثبات. الف- ابتدا فرض کنید $x \rightarrow \infty$ ، در این صورت:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f_X(x) = \frac{1}{\beta} \lim_{z \rightarrow 0} z e^{-z} ((1 + \lambda_1) + 2(\lambda_2 - \lambda_1)e^{-z} - 3\lambda_2 e^{-2z}) = \frac{1}{\beta} z e^{-z} ((1 + \lambda_1) + 2(\lambda_2 - \lambda_1)e^{-z} - 3\lambda_2 e^{-2z}), \quad (7)$$

و اگر $x \rightarrow -\infty$ ، بنا به قانون هوییتال داریم:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_X(x) = \frac{1}{\beta} \lim_{z \rightarrow \infty} z e^{-z} ((1 + \lambda_1) + 2(\lambda_2 - \lambda_1)e^{-z} - 3\lambda_2 e^{-2z}) = 0, \quad (8)$$

که در آن $\mu \in R$ و $\beta \geq 0$ ، $x \in R$ ، $z = e^{-\frac{(x-\mu)}{\beta}}$ می‌باشند.

و حکم اثبات می‌شود.

ب- برای آنکه نشان دهیم $f_X(x)$ یک تابع چگالی است، باید ثابت

شود که اولاً $f_X(x) \geq 0$ بوده و ثانیاً $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$ است.

با توجه به قسمت (الف) قضیه، چون $\lim_{x \rightarrow \infty} f_X(x) = 0$ و

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_X(x) = 0$ است، بنابراین $f_X(x) \geq 0$ می‌باشد. حال

باید ثابت کنیم که

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\beta} z e^{-z} ((1 + \lambda_1) + 2(\lambda_2 - \lambda_1)e^{-z} - 3\lambda_2 e^{-2z}) dz = 1,$$

است. با توجه به اینکه $z = e^{-\frac{x-\mu}{\beta}}$ آنگاه $x = \mu - \beta \ln z$ و

$dx = -\frac{\beta}{z} dz$ می‌باشند. بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx &= \int_0^{\infty} f(z) \left(-\frac{\beta}{z} \right) dx \\ &= \int_0^{\infty} e^{-z} ((1 + \lambda_1)) dz \\ &+ \int_0^{\infty} e^{-z} (2(\lambda_2 - \lambda_1)e^{-z} - 3\lambda_2 e^{-2z}) dz \\ &= (1 + \lambda_1) + (\lambda_2 - \lambda_1) - \lambda_2 = 1, \end{aligned}$$

پس تابع $f_X(x)$ یک تابع چگالی بوده و حکم اثبات می‌شود. □

نمودارهای تابع چگالی رابطه (۷) و تابع توزیع رابطه (۸) برای

مقادیر مختلف پارامترهای λ_1 و λ_2 برای وقتی که $\mu = 2$ و $\beta = 2$ باشد، به ترتیب در شکل‌های ۱ و ۲ رسم شده‌اند. مشاهده می‌شود که برای مقادیر مثبت پارامترهای λ_1 و λ_2 ، تابع چگالی تقریباً تابع مسوکورتیک بوده و برای مقادیر منفی پارامترهای λ_1 و λ_2 ، تابع چگالی شبیه تابع پلاتیکوریک است.

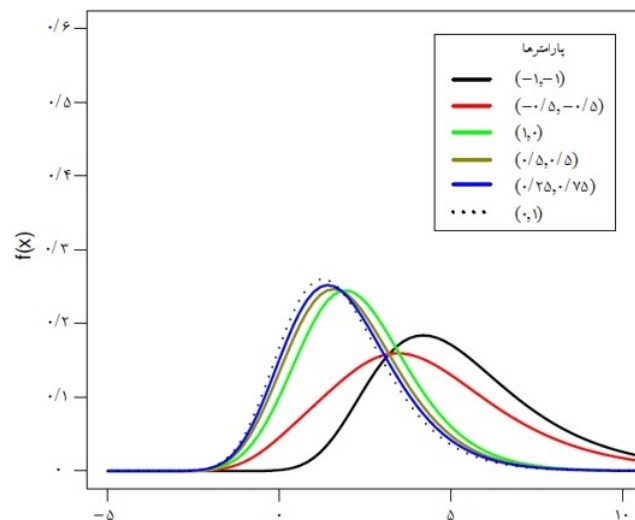
اثبات. با جایگذاری روابط (۱) و (۲) در رابطه (۵)، برای $x \in R$ خواهیم داشت:

$$f_X(x) = \frac{1}{\beta} z e^{-z} ((1 + \lambda_1) + 2(\lambda_2 - \lambda_1)e^{-z} - 3\lambda_2 e^{-2z}),$$

و این همان تابع چگالی رابطه (۷) است. همچنین با جایگذاری تابع

توزیع رابطه (۲) در رابطه (۶)، تابع توزیع رابطه (۸) به دست می‌آید و

حکم اثبات می‌شود.



شکل ۱. تابع چگالی گامبل تبدیل شده مکعبی

□

قضیه ۲.۲. فرض کنید X متغیر تصادفی دارای تابع توزیع گامبل تبدیل شده مکعبی رابطه (۷) با پارامتر مقیاسی β و پارامتر مکانی μ باشد، آنگاه:

الف- اگر $x \rightarrow \infty$ یا $x \rightarrow -\infty$ ، آنگاه تابع چگالی به سمت عدد صفر میل می‌کند.

ب- تابع $f_X(x)$ یک تابع چگالی است.

قضیه ۳.۲. فرض کنید X متغیر تصادفی دارای تابع توزیع گامبل تبدیل شدهی مکعبی با پارامتر مقیاسی β و پارامتر مکانی μ باشد، r امین گشتاور مرکزی متغیر X ، $r = 0, 1, \dots$ عبارت است از:

$$E(X^r) = \sum_{i=0}^r \binom{r}{i} \mu^{i-r} (-\beta)^i \times \left((1 + \lambda_1) \Gamma^{(i)}(1) + \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} \Gamma^{(k)}(1) T_{i,k} \right), \quad (9)$$

که در آن $\Gamma^{(i)}(1) = \int_0^\infty (\ln(z))^i e^{-z} dz$ مشتق i ام تابع گاما و

$$T_{i,k} = \left[(\lambda_2 - \lambda_1) \left(\ln\left(\frac{1}{\lambda_1}\right) \right)^{i-k} - \lambda_2 \left(\ln\left(\frac{1}{\lambda_2}\right) \right)^{i-k} \right],$$

می باشد.

اثبات. از تعریف $E(X^r)$ شروع می کنیم:

$$\begin{aligned} E(X^r) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^r f_X(x) dx \\ &= \int_0^\infty (\mu - \beta \ln(z))^r \left(-\frac{\beta}{z} \right) f_X(z) dz \\ &= \int_0^\infty (\mu - \beta \ln(z))^r e^{-z} \times \\ &\quad \left((1 + \lambda_1) + 2(\lambda_2 - \lambda_1)e^{-z} - 3\lambda_2 e^{-2z} \right) dz \\ &= (1 + \lambda_1)I_1 + 2(\lambda_2 - \lambda_1)I_2 - 3\lambda_2 I_3, \quad (10) \end{aligned}$$

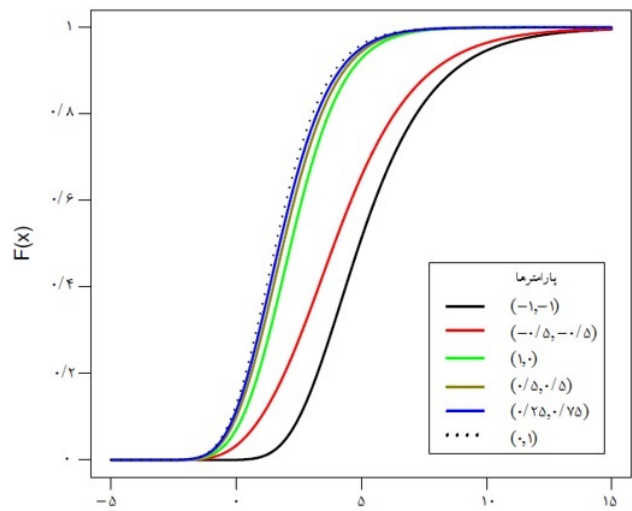
که در آن $I_1 = \int_0^\infty (\mu - \beta \ln(z))^r e^{-z} dz$ ، $I_2 = \int_0^\infty (\mu - \beta \ln(z))^r e^{-2z} dz$ و $I_3 = \int_0^\infty (\mu - \beta \ln(z))^r e^{-3z} dz$ است.

حال برای محاسبه $E(X^r)$ ، مقدار هر کدام از انتگرال ها محاسبه می شود. مقدار I_1 عبارت است از:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^\infty (\mu - \beta \ln(z))^r e^{-z} dz \\ &= \int_0^\infty \sum_{i=0}^r \binom{r}{i} \mu^{i-r} (-\beta)^i \ln^i(z) e^{-z} dz \\ &= \sum_{i=0}^r \binom{r}{i} \mu^{i-r} (-\beta)^i \Gamma^{(i)}(1). \quad (11) \end{aligned}$$

به همین ترتیب خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^\infty (\mu - \beta \ln(z))^r e^{-2z} dz \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^r \binom{r}{i} \mu^{i-r} (-\beta)^i \\ &\quad \times \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} (-\ln(2))^{i-k} \Gamma^{(k)}(1). \quad (12) \end{aligned}$$



شکل ۲. تابع توزیع گامبل تبدیل شده مکعبی

۲.۲ تابع بقا و تابع خطر توزیع گامبل تبدیل شده مکعبی

تابع بقا را با نماد $S(x)$ نشان داده و عبارت است از:

$$S(x) = 1 - F_X(x).$$

تابع بقا برای توزیع گامبل تبدیل شده مکعبی عبارت است از:

$$S(x) = 1 - e^{-z} \left((1 + \lambda_1) + (\lambda_2 - \lambda_1)e^{-z} - \lambda_2 e^{-2z} \right).$$

تابع خطر را با نماد $h(x)$ نشان داده و عبارت است از:

$$h(x) = \frac{f(x)}{S(x)}.$$

تابع خطر برای توزیع گامبل تبدیل شده مکعبی عبارت است از:

$$h(x) = \frac{z \left[(1 + \lambda_1) + 2(\lambda_2 - \lambda_1)e^{-z} - 3\lambda_2 e^{-2z} \right]}{\beta \left[(1 + \lambda_1) + (\lambda_2 - \lambda_1)e^{-z} - \lambda_2 e^{-2z} \right]}.$$

نمودارهای تابع بقا و تابع خطر برای توزیع گامبل تبدیل شده مکعبی برای مقادیر مختلف پارامترهای λ_1 و λ_2 برای وقتی که $\mu = 2$ و $\beta = 2$ باشد، به ترتیب در شکل های ۳ و ۴ رسم شده اند.

۳.۲ گشتاورهای توزیع گامبل تبدیل شده مکعبی

در این زیر بخش، ویژگی های آماری توزیع گامبل تبدیل شده مکعبی، شامل گشتاورها، تابع مولد گشتاور و تابع چندک مورد مطالعه قرار گرفته شده است.

و که در آن $\Gamma(1 - \beta t)$ تابع گاما است.

اثبات. می‌دانیم که:

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X(x) dx \\ &= \int_0^{\infty} e^{t(\mu - \beta \ln(z))} \left(-\frac{\beta}{z}\right) f(z) dz \\ &= \int_0^{\infty} e^{t(\mu - \beta \ln(z))} e^{-z} dz \\ &\times ((1 + \lambda_1) + \lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)e^{-z} - \lambda_2 \lambda_2 e^{-2z}) d\xi(15) \end{aligned}$$

که در آن $I_1 = \int_0^{\infty} e^{-\beta t} e^{-z} dz$ ، $I_2 = \int_0^{\infty} e^{-\beta t} e^{-2z} dz$ و $I_3 = \int_0^{\infty} e^{-\beta t} e^{-z} dz$ با استفاده از تعریف

$$\int_0^{\infty} t^b e^{-at} dt = \frac{\Gamma(1+b)}{a^{1+b}},$$

خواهیم داشت:

$$I_1 = \Gamma(1 - \beta t),$$

$$I_2 = \lambda_2^{\beta t - 1} \Gamma(1 - \beta t),$$

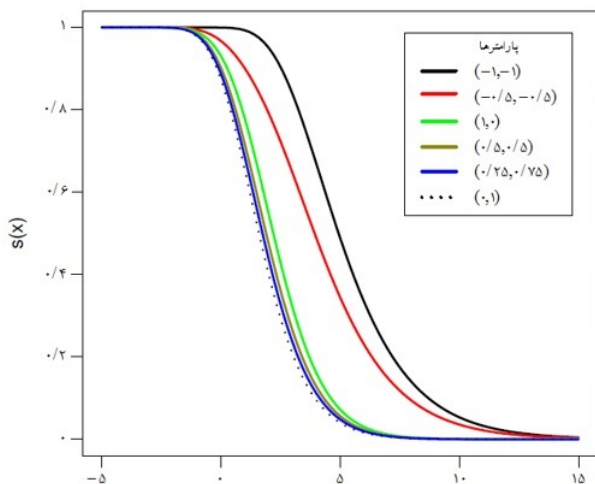
$$I_3 = \lambda_2^{\beta t - 1} \Gamma(1 - \beta t),$$

با جایگذاری مقادیر I_1 ، I_2 و I_3 در رابطه (۱۵)، خواهیم داشت:

$$M_X(t) = e^{\mu t} \Gamma(1 - \beta t) \left((1 + \lambda_1) + \lambda_2^{\beta t} (\lambda_2 - \lambda_1) - \lambda_2^{\beta t} \lambda_2 \right),$$

□

و حکم اثبات می‌شود.



شکل ۳. تابع بقای تابع چگالی گامبل تبدیل شده مکعبی

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_0^{\infty} (\mu - \beta \ln(z))^r e^{-z} dz \\ &= \frac{1}{\beta} \sum_{i=0}^r \binom{r}{i} \mu^{i-r} (-\beta)^i \\ &\times \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} (-\ln(z))^{i-k} \Gamma^{(k)}(1). \end{aligned} \quad (13)$$

با جایگذاری روابط (۱۱)، (۱۲) و (۱۳) در رابطه (۱۰) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} E(X^r) &= \sum_{i=0}^r \binom{r}{i} \mu^{i-r} (-\beta)^i \times \\ &\left((1 + \lambda_1) \Gamma^{(i)}(1) + \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} \Gamma^{(k)}(1) T_{i,k} \right), \end{aligned}$$

و قضیه اثبات می‌شود. □

میانگین و واریانس متغیر تصادفی X را با قرار دادن $r = 1, 2$ در رابطه (۱۰) با توجه به اینکه $\Gamma^{(0)}(1) = 1$ ، $\Gamma^{(1)}(1) = -\gamma$ و $\Gamma^{(2)}(1) = \gamma^2 + \frac{\pi^2}{6}$ که $\gamma = 0.5772$ ثابت اولر است، به دست می‌آید. بنابراین:

$$E(X) = \theta(1 + \lambda_1) + (\lambda_2 - \lambda_1)(\theta + \beta \ln(2)) - \lambda_2(\theta + \beta \ln(3)),$$

و

$$\begin{aligned} E(X^2) &= (1 + \lambda_1) \left(\theta^2 + \frac{(\beta\pi)^2}{6} \right) \\ &+ (\lambda_2 - \lambda_1) \left(\theta^2 + \theta \beta \ln(2) + \beta^2 \left(\frac{(\beta\pi)^2}{6} + (\ln(2))^2 \right) \right) \\ &- \lambda_2 \left(\theta^2 + \theta \beta \ln(3) + \beta^2 \left(\frac{(\beta\pi)^2}{6} + (\ln(3))^2 \right) \right), \end{aligned}$$

که در آن $\theta = \mu + \beta\gamma$ می‌باشد. مقدار واریانس متغیر تصادفی X با توجه به فرمول $Var(X) = E(X^2) - E^2(X)$ به دست می‌آید. میانگین‌ها و واریانس‌های متغیر تصادفی X برای مقادیر مختلف پارامترها محاسبه و به ترتیب در جداول ۱ و ۲ ارائه شده‌اند.

۴.۲ تابع مولد گشتاور توزیع گامبل تبدیل شده مکعبی

در این قسمت، تابع مولد گشتاور توزیع گامبل تبدیل شده مکعبی محاسبه شده است.

قضیه ۴.۲. فرض کنید X متغیر تصادفی دارای تابع توزیع گامبل تبدیل شده مکعبی با پارامتر مقیاسی β و پارامتر مکانی μ باشد، تابع مولد گشتاور متغیر X عبارت است از:

$$M_X(t) = e^{\mu t} \Gamma(1 - \beta t) \left((1 + \lambda_1) + \lambda_2^{\beta t} (\lambda_2 - \lambda_1) - \lambda_2^{\beta t} \lambda_2 \right), \quad (14)$$

۳ برآورد پارامترها با روش ماکسیمم درستنمایی

فرض کنید X_1, X_2, \dots یک نمونه تصادفی n تایی دارای تابع توزیع گامبل تبدیل شدهی مکعبی باشد. هدف برآورد کردن پارامترهای $\theta = (\mu, \beta, \lambda_1, \lambda_2)$ در توزیع گامبل تبدیل شدهی مکعبی با روش ماکسیمم درستنمایی است. تابع درستنمایی عبارت است از:

$$L(\mu, \beta, \lambda_1, \lambda_2) = \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i, \mu, \beta, \lambda_1, \lambda_2) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\beta} z_i e^{-z_i} \times \left((1 + \lambda_1) + 2^{\beta t} (\lambda_2 - \lambda_1) - 3\lambda_2 e^{-z_i} \right),$$

که در آن $i = 1, 2, \dots, z_i = e^{-\frac{x_i - \mu}{\beta}}$ است. تابع درستنمایی را می‌توان به صورت

$$l = L(\mu, \beta, \lambda_1, \lambda_2) = -n \ln \beta + \sum_{i=1}^n [\ln z_i] - \sum_{i=1}^n \left[z_i \ln \left((1 + \lambda_1) + 2^{\beta t} (\lambda_2 - \lambda_1) - 3\lambda_2 e^{-z_i} \right) \right], \quad (16)$$

نوشت. از رابطه (۱۶) نسبت به هر کدام از پارامترهای μ, β, λ_1 و λ_2 مشتق گرفته می‌شود. ابتدا توجه کنید که:

$$\frac{\partial l}{\partial \mu} = \left(\frac{1}{\beta} \right) \left[n - \sum_{i=1}^n \left(\frac{9\lambda_2 z_i e^{-z_i} - (1 + \lambda_1) z_i}{(1 + \lambda_1) + 2^{\beta t} (\lambda_2 - \lambda_1) - 3\lambda_2 e^{-z_i}} \right) \right],$$

با مساوی صفر قرار دادن رابطه بالا، خواهیم داشت:

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{9\lambda_2 z_i e^{-z_i} - (1 + \lambda_1) z_i}{(1 + \lambda_1) + 2^{\beta t} (\lambda_2 - \lambda_1) - 3\lambda_2 e^{-z_i}} \right) = n. \quad (17)$$

همچنین

$$\frac{\partial l}{\partial \beta} = \left(-\frac{n}{\beta} \right) - \left(\frac{1}{\beta^2} \right) \times \sum_{i=1}^n \left(\frac{9\lambda_2 z_i e^{-z_i} - (1 + \lambda_1) z_i}{(1 + \lambda_1) + 2^{\beta t} (\lambda_2 - \lambda_1) - 3\lambda_2 e^{-z_i}} - \beta \right) \ln z_i,$$

با مساوی صفر قرار دادن رابطه بالا، خواهیم داشت:

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{9\lambda_2 z_i e^{-z_i} - (1 + \lambda_1) z_i}{(1 + \lambda_1) + 2^{\beta t} (\lambda_2 - \lambda_1) - 3\lambda_2 e^{-z_i}} - \beta \right) \ln z_i = n\beta, \quad (18)$$

و

$$\frac{\partial l}{\partial \lambda_1} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1 - 2e^{-z_i}}{(1 + \lambda_1) + 2^{\beta t} (\lambda_2 - \lambda_1) e^{z_i} - 3\lambda_2 e^{-z_i}} \right),$$

که با مساوی صفر قرار دادن آن، داریم:

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{1 - 2e^{-z_i}}{(1 + \lambda_1) + 2^{\beta t} (\lambda_2 - \lambda_1) e^{z_i} - 3\lambda_2 e^{-z_i}} \right) = 0, \quad (19)$$

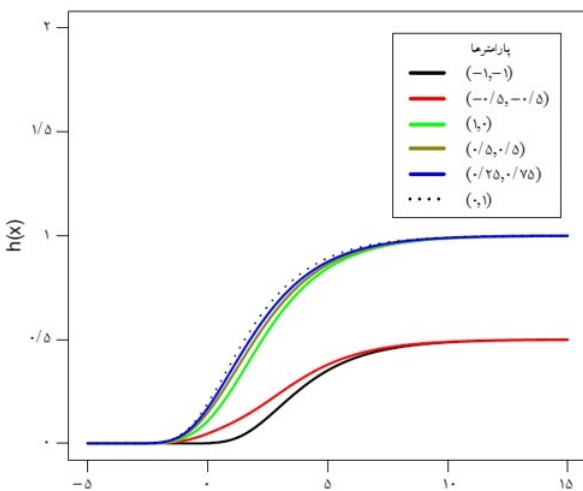
در نهایت:

$$\frac{\partial l}{\partial \lambda_2} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{2e^{-z_i} - 3e^{-2z_i}}{(1 + \lambda_1) + 2^{\beta t} (\lambda_2 - \lambda_1) e^{z_i} - 3\lambda_2 e^{-z_i}} \right),$$

و با مساوی صفر قرار دادن آن، داریم:

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{2e^{-z_i} - 3e^{-2z_i}}{(1 + \lambda_1) + 2^{\beta t} (\lambda_2 - \lambda_1) e^{z_i} - 3\lambda_2 e^{-z_i}} \right) = 0, \quad (20)$$

برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامترهای $\theta = (\mu, \beta, \lambda_1, \lambda_2)$ با حل کردن معادلات غیرخطی (۱۷)، (۱۸)، (۱۹) و (۲۰) به دست می‌آیند.

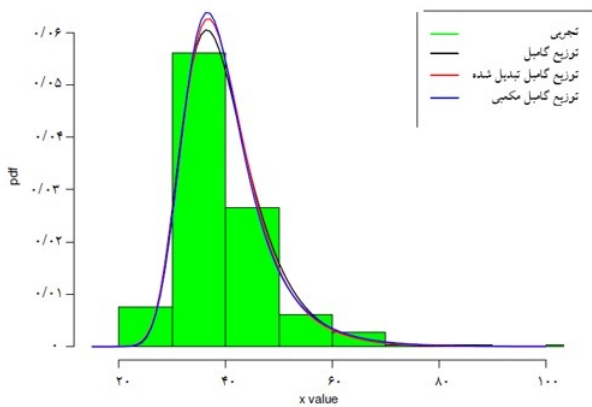


شکل ۴. تابع خطر تابع چگالی گامبل تبدیل شده مکعبی

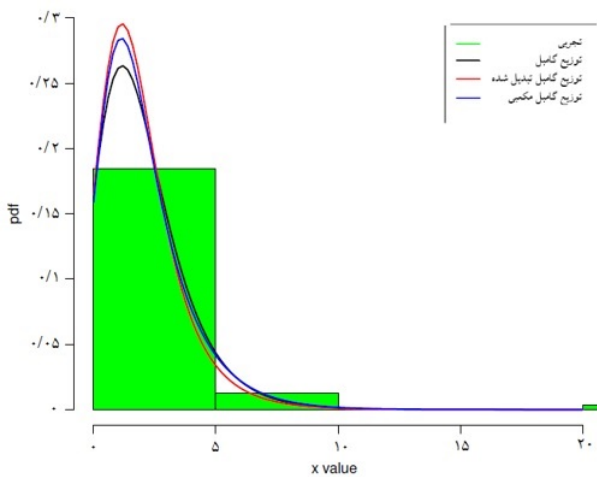
۴ کاربرد توزیع گامبل تبدیل شدهی مکعبی

در این بخش، کاربرد توزیع گامبل تبدیل شدهی مکعبی برای دو مجموعه از داده‌ها ارائه شده است. مجموعه داده‌های اول در جدول ۳ ارائه شده‌اند. این داده‌ها مربوط به سرعت باد بوده و شامل ۲۴۶ مشاهده از ماکسیمم ماهیانه سرعت باد در ساحل پالم در کشور آمریکا از ژانویه ۱۹۸۴ تا دسامبر ۲۰۰۵ به دست آمده است.

داده‌ها در سایت <https://www.ncdc.noaa.gov/> قابل دسترس هستند. مجموعه داده‌ها دوم، در جدول ۴ ارائه شده‌اند. این داده‌ها شامل ۶۳ عدد مربوط به تجمع برف (برحسب اینچ) در فرودگاه ملی رالی-دورهام، در شمال کالیفرنیا از سال



شکل ۵. تابع چگالی توزیع گامبل، توزیع گامبل تبدیل شده و توزیع گامبل تبدیل شده مکعبی برای داده‌های سرعت باد



شکل ۶. تابع چگالی توزیع گامبل، توزیع گامبل تبدیل شده و توزیع گامبل تبدیل شده مکعبی برای داده‌های تجمع برف

۱۹۴۸ تا سال ۲۰۰۰ می‌باشند. آماره‌های توصیفی برای دو مجموعه از داده‌ها در جدول ۵ گزارش شده‌اند. همچنین برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامترها، مقدار لگاریتم تابع درست‌نمایی، مقدار آماره کلو موگروف-اسمیرنوف $(k - s)$ و مقدار احتمال این آماره برای توزیع‌های برازنده شده به دو مجموعه از داده‌ها (توزیع گامبل، توزیع گامبل مکعبی و توزیع گامبل تبدیل شده مکعبی) محاسبه و در جداول ۶ و ۷ ارائه شده‌اند. یولاندا و همکاران (۲۰۱۹)، از داده‌های جداول ۳ و ۴ برای برازنده کردن توزیع گامبل، توزیع اسلش و توزیع گامبل اسلش شده استفاده کردند. همان‌طور که از جدول ۶ ملاحظه می‌شود، توزیع گامبل تبدیل شده مکعبی بهترین توزیع برازنده به داده‌ها در مقایسه با دو توزیع دیگر است. بر اساس ملاک $-2\text{Log}(L)$ توزیع گامبل تبدیل شده مکعبی کمترین مقدار را نسبت به دو توزیع دیگر دارد و البته شکل ۵ هم گویای این وضعیت است. همان‌طور که از جدول ۷ ملاحظه می‌شود، هر سه توزیع برازنده به داده‌های تجمع برف، خوب هستند، اما بر اساس ملاک $-2\text{Log}(L)$ توزیع گامبل تبدیل شده مکعبی، توزیع بهتری نسبت به دو توزیع دیگر است. اگرچه طبق شکل ۶، توزیع گامبل تبدیل شده، توزیع بهتری به نظر می‌رسد.

جدول ۱. میانگین توزیع گامبل تعمیم یافته مکعبی برای مقادیر مختلف پارامترها و $\mu = -2$

		$\lambda_1 = -1$	$\lambda_1 = -0.5$	$\lambda_1 = 1$	$\lambda_1 = 0.5$	$\lambda_1 = 0$
$\beta = 1$	$\lambda_2 = -1$	-0/3242	-0/6707	-1/7105	-1/3639	-1/0173
	$\lambda_2 = -0.5$	-0/5269	-0/8735	-1/9132	-1/5666	-1/2201
	$\lambda_2 = 0$	-0/7296	-1/0762	-2/1159	-1/7694	-1/4228
	$\lambda_2 = 0.5$	-0/9324	-1/2789	-	-1/9721	-1/6255
	$\lambda_2 = 1$	-1/1351	-1/4817	-	-	-1/8282
$\beta = 3$	$\lambda_2 = -1$	-3/0275	-1/9878	-1/1314	-0/0917	-0/947
	$\lambda_2 = -0.5$	2/4193	1/3796	-1/7396	-0/6999	0/398
	$\lambda_2 = 0$	1/8111	0/7714	-2/3478	-1/3081	-0/2684
	$\lambda_2 = 0.5$	1/2029	0/1632	-	-1/9163	-0/8766
	$\lambda_2 = 1$	0/5947	-0/4450	-	-	-1/4847

ادامه جدول ۰۱ میانگین توزیع گامبل تعمیم یافته مکعبی برای مقادیر مختلف پارامترها و $\mu = 0$

		$\lambda_1 = -1$	$\lambda_1 = -0.5$	$\lambda_1 = 1$	$\lambda_1 = 0.5$	$\lambda_1 = 0$
$\beta = 1$	$\lambda_2 = -1$	۱/۶۷۵۸۹	۱/۳۲۹۳	۰/۲۸۹۵	۰/۶۳۶۱	۰/۹۸۲۷
	$\lambda_2 = -0.5$	۰/۴۷۳۱	۱/۱۲۶۵	۰/۰۸۶۸	۰/۴۳۳۴	۰/۷۷۹۹
	$\lambda_2 = 0$	۱/۲۷۰۴	۰/۹۲۳۸	-۰/۱۱۵۹	۰/۲۳۰۶	۰/۵۷۷۲
	$\lambda_2 = 0.5$	۱/۰۶۷۶	۰/۷۲۱۱	-	۰/۰۲۷۹	۰/۳۷۴۵
	$\lambda_2 = 1$	۰/۸۶۴۹	۰/۵۱۳۸	-	-	۰/۱۷۱۸
$\beta = 3$	$\lambda_2 = -1$	۵/۰۲۷۵	۳/۹۸۷۸	۰/۸۶۸۶	۱/۹۰۸۳	۲/۹۵۸
	$\lambda_2 = -0.5$	۴/۴۱۹۳	۳/۳۷۹۶	۰/۲۶۰۴	۱/۳۰۰۱	۲/۳۳۹۸
	$\lambda_2 = 0$	۳/۸۱۱۱	۲/۷۷۱۴	-۰/۳۴۷۸	۰/۶۹۱۹	۱/۷۳۱۶
	$\lambda_2 = 0.5$	۳/۲۰۲۹	۲/۱۶۳۲	-	۰/۰۸۳۷	۱/۱۲۳۴
	$\lambda_2 = 1$	۲/۵۹۴۷	۱/۵۵۵۰	-	-	۰/۵۱۵۳

ادامه جدول ۰۱ میانگین توزیع گامبل تعمیم یافته مکعبی برای مقادیر مختلف پارامترها و $\mu = 2$

		$\lambda_1 = -1$	$\lambda_1 = -0.5$	$\lambda_1 = 1$	$\lambda_1 = 0.5$	$\lambda_1 = 0$
$\beta = 1$	$\lambda_2 = -1$	۳/۶۷۵۸	۰/۹۲۳۸	۲/۲۸۹۵	۲/۶۳۶۱	۲/۹۸۲۷
	$\lambda_2 = -0.5$	۳/۴۷۳۱	۳/۱۲۶۵	۲/۰۸۶۸	۲/۴۳۳۴	۲/۷۷۹۹
	$\lambda_2 = 0$	۲/۲۷۰۴	۲/۹۲۳۸	۲/۸۸۴۱	۲/۲۳۰۶	۲/۵۷۷۲
	$\lambda_2 = 0.5$	۳/۰۶۷۶	۲/۷۲۱۱	-	۲/۰۲۷۹	۲/۳۷۴۵
	$\lambda_2 = 1$	۲/۸۶۴۹	۲/۵۱۸۳	-	-	۲/۱۷۱۸
$\beta = 3$	$\lambda_2 = -1$	۷/۰۲۷۵	۵/۹۸۷۸	۲/۸۶۸۶	۳/۹۰۸۳	۴/۹۵۸
	$\lambda_2 = -0.5$	۶/۴۱۹۳	۵/۳۷۹۶	۲/۲۶۰۴	۳/۳۰۰۱	۴/۳۳۹۸
	$\lambda_2 = 0$	۵/۸۱۱۱	۴/۷۷۱۴	۱/۶۵۲۲	۲/۶۹۱۹	۳/۷۳۱۶
	$\lambda_2 = 0.5$	۵/۲۰۲۹	۴/۱۶۳۲	-	۲/۰۸۳۷	۳/۱۲۳۴
	$\lambda_2 = 1$	۴/۵۹۴۷	۳/۵۵۵۰	-	-	۲/۵۱۵۳

جدول ۰۲. واریانس توزیع گامبل تعمیم یافته مکعبی برای مقادیر مختلف پارامترها و $\mu = -2$

		$\lambda_1 = -1$	$\lambda_1 = -0.5$	$\lambda_1 = 1$	$\lambda_1 = 0.5$	$\lambda_1 = 0$
$\beta = 1$	$\lambda_2 = -1$	۱/۶۴۴۹	۲/۰۴۶۱	۱/۸۰۸۲	۲/۱۲۷۷	۲/۲۰۷۰
	$\lambda_2 = -0.5$	۱/۶۸۶۰	۱/۹۴۶۷	۱/۲۸۷۲	۱/۷۴۷۳	۱/۹۶۷۱
	$\lambda_2 = 0$	۱/۶۴۴۹	۱/۷۶۵۰	۰/۶۸۴۰	۱/۲۸۴۶	۱/۶۴۵۱
	$\lambda_2 = 0.5$	۱/۵۲۱۶	۱/۵۰۱۲	-	۰/۷۳۹۷	۱/۲۴۰۶
	$\lambda_2 = 1$	۱/۳۱۶۱	۱/۱۵۵۲	-	-	۰/۷۵۴۰
$\beta = 3$	$\lambda_2 = -1$	۱/۸۰۴۴	۱۸/۴۱۴۸	۱۶/۲۷۳۹	۱۹/۱۴۹۶	۱۹/۸۶۳۳
	$\lambda_2 = -0.5$	۱۵/۱۷۴۳	۱۷/۵۲۰	۱۱/۵۸۵۰	۱۵/۷۲۵۴	۱۷/۷۰۳۷
	$\lambda_2 = 0$	۱۴/۸۰۴۴	۱۵/۸۸۵۴	۶/۱۵۶۳	۱۱/۵۴۱۳	۱۴/۸۰۴۴
	$\lambda_2 = 0.5$	۱۳/۶۹۴۷	۱۳/۵۱۱۰	-	۶/۶۵۷۵	۱۱/۱۶۵۳
	$\lambda_2 = 1$	۱۱/۸۴۵۲	۱۰/۳۹۶۸	-	-	۶/۷۸۶۳

ادامه جدول ۰۲. واریانس توزیع گامبل تعمیم یافته مکعبی برای مقادیر مختلف پارامترها و $\mu = 0$

		$\lambda_1 = -1$	$\lambda_1 = -0.5$	$\lambda_1 = 1$	$\lambda_1 = 0.5$	$\lambda_1 = 0$
$\beta = 1$	$\lambda_2 = -1$	۱/۶۹۴۹	۲/۰۴۶۱	۱/۸۰۸۲	۲/۱۲۷۷	۲/۲۰۷۰
	$\lambda_2 = -0.5$	۱/۶۸۶۰	۱/۹۴۶۷	۱/۲۸۷۲	۱/۷۴۷۳	۱/۹۶۷۱
	$\lambda_2 = 0$	۱/۶۴۴۹	۱/۷۶۵۰	۰/۶۸۴۰	۱/۲۸۴۶	۱/۶۴۴۹
	$\lambda_2 = 0.5$	۱/۵۲۱۶	۱/۵۰۱۲	-	۰/۷۳۹۷	۱/۲۴۰۶
	$\lambda_2 = 1$	۱/۱۳۶۱	۱/۱۵۵۲	-	-	۰/۷۵۴۰
$\beta = 3$	$\lambda_2 = -1$	۱۴/۸۰۴۴	۱۸/۴۱۴۸	۱۶/۲۷۳۹	۱۹/۱۴۹۶	۱۹/۸۶۳۳
	$\lambda_2 = -0.5$	۱۵/۱۷۴۳	۱۷/۵۲۰	۱۱/۵۸۵۰	۱۵/۷۲۵۴	۱۷/۷۰۳۷
	$\lambda_2 = 0$	۱۴/۸۰۴۴	۱۵/۸۸۵۴	۶/۱۵۶۳	۱۱/۵۴۱۳	۱۴/۸۰۴۴
	$\lambda_2 = 0.5$	۱۳/۹۶۴۷	۱۳/۵۱۱۰	-	۶/۶۵۷۵	۱۱/۱۶۵۳
	$\lambda_2 = 1$	۱۱/۸۴۵۲	۱۰/۳۹۶۸	-	-	۶/۷۸۶۳

ادامه جدول ۰۲. واریانس های توزیع گامبل تعمیم یافته مکعبی برای مقادیر مختلف پارامترها و $\mu = 2$

		$\lambda_1 = -1$	$\lambda_1 = -0.5$	$\lambda_1 = 1$	$\lambda_1 = 0.5$	$\lambda_1 = 0$
$\beta = 1$	$\lambda_2 = -1$	۱/۶۴۴۹	۲/۰۴۶۱	۱/۸۰۸۲	۲/۱۲۷۷	۲/۲۰۷۰
	$\lambda_2 = -0.5$	۱/۶۸۸۰	۱/۹۴۶۷	۱/۲۸۷۲	۱/۷۴۷۳	۱/۹۶۷۱
	$\lambda_2 = 0$	۱/۶۴۴۸	۱/۷۶۵۰	۰/۶۸۴۰	۱/۲۸۴۶	۱/۶۴۴۸
	$\lambda_2 = 0.5$	۱/۵۲۱۶	۱/۵۰۱۲	-	۰/۷۳۹۷	۱/۲۴۰۶
	$\lambda_2 = 1$	۱/۳۱۶۱	۱/۱۵۵۲	-	-	۰/۷۵۴۰
$\beta = 3$	$\lambda_2 = -1$	۱۴/۸۰۴۴	۱۸/۴۱۴۸	۱۶/۲۷۳۹	۱۹/۱۴۹۶	۱۹/۸۶۳۳
	$\lambda_2 = -0.5$	۱۵/۱۷۴۳	۱۷/۵۲۰	۱۱/۵۸۵۰	۱۵/۷۲۵۴	۱۷/۷۰۳۷
	$\lambda_2 = 0$	۱۴/۸۰۴۴	۱۵/۸۸۵۴	۶/۱۵۶۳	۱۱/۵۴۱۳	۱۴/۸۰۴۴
	$\lambda_2 = 0.5$	۱۳/۶۹۴۷	۱۳/۵۱۱۰	-	۶/۶۵۷۵	۱۱/۱۶۵۳
	$\lambda_2 = 1$	۱۱/۸۴۵۲	۱۰/۳۹۶۸	-	-	۶/۷۸۶۳

جدول ۰۳. داده های سرعت باد در ساحل پالم در کشور آمریکا از ژانویه ۱۹۸۴ تا دسامبر ۲۰۰۵

۳۳	۴۰	۴۶	۴۱	۳۱	۳۷	۴۱	۵۶	۴۵	۳۱	۴۰	۳۵	۳۳	۴۳	۳۶
۳۶	۴۸	۴۵	۵۱	۴۴	۳۸	۳۶	۴۰	۳۲	۵۱	۳۷	۴۳	۳۳	۳۵	۴۴
۴۱	۴۱	۳۳	۴۵	۳۸	۴۳	۶۲	۴۵	۵۱	۳۹	۳۵	۵۸	۴۸	۳۵	۴۳
۴۹	۴۳	۳۹	۳۹	۴۰	۳۹	۴۵	۴۸	۴۳	۴۵	۳۶	۴۰	۳۶	۴۷	۳۵
۴۰	۳۹	۴۴	۳۷	۳۶	۳۸	۳۷	۴۱	۳۸	۳۶	۳۶	۴۸	۳۷	۴۰	۳۷
۳۷	۳۷	۳۸	۴۹	۶۶	۳۹	۴۵	۳۷	۳۵	۳۹	۵۲	۶۶	۵۱	۳۹	۶۴
۵۹	۳۶	۳۶	۳۶	۴۱	۴۱	۳۹	۴۵	۴۰	۳۷	۳۳	۶۶	۳۸	۵۹	۳۸
۴۱	۴۵	۳۵	۴۳	۳۹	۷۴	۶۳	۳۷	۴۵	۵۲	۴۳	۴۴	۵۲	۳۵	۴۳

ادامه جدول ۰۳. داده های سرعت باد در ساحل پالم در کشور آمریکا از ژانویه ۱۹۸۴ تا دسامبر ۲۰۰۵

۴۶	۴۰	۴۳	۲۹	۳۹	۵۳	۳۲	۴۱	۵۲	۳۱	۴۶	۴۸	۴۹	۴۱	۳۲
۳۷	۲۹	۴۳	۴۰	۴۷	۴۵	۳۸	۲۸	۳۰	۴۰	۳۶	۳۷	۳۸	۳۷	۳۳
۳۰	۳۴	۳۸	۴۵	۴۰	۳۱	۳۹	۳۱	۳۱	۳۸	۳۲	۳۴	۴۵	۳۹	۳۱
۲۹	۳۹	۳۶	۳۴	۵۵	۳۸	۳۷	۳۶	۳۴	۴۴	۳۲	۵۴	۳۰	۳۹	۳۰
۴۱	۳۳	۳۶	۳۹	۳۳	۳۳	۳۰	۴۰	۴۴	۶۱	۳۴	۲۶	۳۸	۲۶	۳۴
۳۶	۲۸	۳۶	۴۳	۳۵	۴۳	۳۷	۴۰	۳۵	۳۶	۲۸	۴۱	۳۰	۳۱	۴۸
۴۳	۴۳	۴۹	۳۶	۳۸	۳۰	۳۳	۳۵	۳۶	۴۵	۲۹	۴۳	۳۳	۳۹	۳۸
۲۹	۳۸	۴۱	۳۱	۳۵	۴۰	۳۳	۵۱	۳۳	۴۰	۴۵	۳۲	۲۹	۳۵	۳۷
۳۵	۳۰	۳۲	۳۹	۳۲	۳۹	۳۸	۳۹	۸۳	۳۰	۳۳	۳۹	۳۳	۳۶	۳۹
۴۴	۳۱	۴۳	۴۴	۴۳	۴۱	۱۰۱	۳۷	۳۳						

جدول ۰۴. داده‌های تجمع برف (برحسب اینچ) در فرودگاه ملی رالی-دورهام

۱	۲/۵	۱/۲	۱/۲	۴/۱	۹	۳	۱	۱/۴	۲	۳	۱/۷	۱/۲	۱/۲	۱/۱
۱/۵	۵	۱/۶	۲	۰/۱	۰/۴	۰/۸	۳/۷	۱/۳	۳/۸	۰/۱	۰/۱	۰/۲	۲	۷/۶
۰/۱	۱/۸	۰/۵	۰/۵	۰/۵	۱/۱	۱/۴	۱	۱	۰/۷	۵/۷	۰/۴	۰/۳	۱/۸	۰/۴
۱	۱/۲	۲/۶	۱	۵	۱/۷	۲/۴	۰/۱	۰/۵	۷/۱	۰/۱	۲/۷	۲/۹	۰/۴	۲
														۲۰/۳

جدول ۰۵. آمار توصیفی برای دو مجموعه از داده‌ها

	n	کمترین داده	بیشترین داده	میانگین	میانه	چولگی	کشیدگی
داده‌های سرعت باد	۲۶۴	۲۶	۱۰۱	۴۰/۱۱	۳۹	۲/۳۲۳۸	۱۳/۰۳۰
داده‌های تجمع برف	۶۳	۱۰/۰	۳/۲۰	۲/۱۲۵	۱/۱۲	۴/۰۱۰۲	۲۳/۲۵۰

جدول ۰۶. برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامترها، مقدار لگاریتم تابع درستنمایی، مقدار آماره کلموگروف-اسمیرنوف $(k - s)$ و مقدار احتمال

آماره برای داده‌های سرعت باد

توزیع‌ها	مقدار برآورد پارامترها				$-Log(L)$	$(k - s)$	مقدار احتمال
توزیع گامبل	$\beta = 1/3293$	$\mu = 1/7363$			۱۲۶/۰۳۶	۰/۱۴۸۶	۰/۳۶۱۲
توزیع گامبل تبدیل شده	$\beta = 1/5036$	$\mu = 1/5711$	$\lambda = 0/5592$		۱۲۴/۰۸۹	۰/۱۳۳۵	۰/۲۱۱۵
توزیع گامبل تبدیل شدهی مکعبی	$\beta = 1/5419$	$\mu = 1/6799$	$\lambda_1 = 0/7089$	$\lambda_2 = -0/2859$	۱۲۳/۲۱۷	۰/۱۴۷۵	۰/۱۲۸۸

جدول ۰۷. برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامترها، مقدار لگاریتم تابع درستنمایی، مقدار آماره کلموگروف-اسمیرنوف $(k - s)$ و مقدار احتمال

آماره برای داده‌های تجمع برف

توزیع‌ها	مقدار برآورد پارامترها				$-Log(L)$	$(k - s)$	مقدار احتمال
توزیع گامبل	$\beta = 6/0802$	$\mu = 36/466$			۸۹۸/۸۸۰	۰/۰۶۷۱	۰/۱۸۴۸
توزیع گامبل تبدیل شده	$\beta = 7/260$	$\mu = 38/837$	$\lambda = 0/6233$		۸۹۶/۷۵۲	۰/۰۶۱۲	۰/۲۷۵۹
توزیع گامبل تبدیل شدهی مکعبی	$\beta = 7/5512$	$\mu = 39/7094$	$\lambda_1 = 0/99$	$\lambda_2 = -0/360$	۸۹۵/۸۹۴	۰/۰۶۲۹	۰/۲۴۵۶

۵ بحث و نتیجه‌گیری

تعمیم جدیدی از توزیع گامبل به نام توزیع گامبل تبدیل شدهی مکعبی معرفی شد. ویژگی‌های آماری این توزیع مورد مطالعه قرار گرفت و پارامترهای توزیع با روش ماکسیمم درستنمایی برآورد شدند. همچنین با دو مثال عددی، کاربرد توزیع گامبل تبدیل شده مکعبی نشان داده شد و با توزیع گامبل و توزیع گامبل تبدیل شده، مقایسه گردید. نشان داده شد که برای داده‌های مورد بررسی شده، توزیع گامبل تبدیل شده مکعبی، توزیع بهتری نسبت دو توزیع دیگر است.

۶ تقدیر و تشکر

نویسندهی مقاله از سردبیر محترم نشریه اندیشه آماری و داوران محترم به خاطر مطالعه دقیق مقاله و نظرات ارزشمندشان در پیشرفت کمی و کیفی آن، کمال تشکر و قدردانی را دارد. مقاله به روح پدر و مادر عزیزم تقدیم می‌شود.

مراجع

- [1] Abed Al-Kadim, K. (2018). Proposed generalized formula for transmuted distribution, *Journal of University of Babylon, Pure and Applied Sciences*, 26(4), 66-74.

- [2] Ansari, S. I., Samuh, M. and Bazyari, A. (2019). *Cubic transmuted power function distribution*, *Gazi University Journal of Science*, **32(4)**, 1322–1337.
- [3] Aryal, G. and Tsokos, C. P. (2008). Airline spill analysis using Gumbel and Moyal distributions, *Neural, Parallel and Scientific Computations*, **16**, 35–43.
- [4] Aryal, G. R. and Tsokos, C. P. (2009). On the transmuted extreme value distribution with application, *Nonlinear Analysis*, **71**, e1401-e1407, doi: 10.1016/j.na.2009.01.168.
- [5] Cardeiro, G. M., Nadarajah, S. and Ortega E. M. M. (2012). The Kumaraswamy Gumbel distribution, *Statistical Methods and Applications*, **21**, 139–168.
- [6] Granzatto, D., Louzada, F. and Balakrishnan, N., (2017). Cubic rank transmuted distributions: inferential issues and applications, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **14**, 2760–2778.
- [7] Gumbel, E. J. (1958). *Statistics of Extremes*, Columbia University Press, New York.
- [8] Kotz, S. and Nadarajah, S. (2000). *Extreme value distributions: theory and applications*, World Scientific.
- [9] Koutsoyiannis, D. (2004). On the appropriateness of the Gumbel distribution for modelling extreme rainfall, *Hydrological Risk: Recent advances in peak river flow modelling, prediction and real-time forecasting, assessment of the impacts of land-use and climate changes*, *Editoriale Bios, Castrolibere, Bologna, Italy*, 303–319.
- [10] Rahman, M., Al-Zahrani, B. and Shahbaz, M. (2018). A general transmuted family of distributions, *Pakistan Journal of Statistics and Operation Research*, **14**, 451–469.
- [11] Rahman M., Al-Zahrani, B. and Shahbaz, M. (2020). Cubic transmuted Pareto distribution, *Annals of Data Science*, **7**, 91–108.
- [12] Rahman, M., Al-Zahrani, B. and Shahbaz, M. (2019). Cubic Transmuted Weibull Distribution: Properties and Applications, *Annals of Data Science*, **6**, 83–102.
- [13] Shaw, W. and Buckley, I. (2009). The alchemy of probability distributions: beyond Gram–Charlier expansions, and a skew kurtotic-normal distribution from a rank transmutation map, *Conference on Computational Finance*, IMA, 0901–0434, Research Report.
- [14] Yolanda M., Heleno, B. and Hector, W. (2019). Gumbel distribution with heavy tails and applications to environmental Data, *Mathematics and Computers in Simulation*, **157**, 115–129.

Cubic Transmuted Gumbel Distribution Based on Cubic Ranking Transformation Map: Inference and it's Application

Abouzar Bazyari¹

Abstract:

In this paper, a generalization of the Gumbel distribution as the cubic transmuted Gumbel distribution based on the cubic ranking transmutation map is introduced. It is shown that for some of the parameters, the proposed density function is mesokurtic and for others parameters the density function is platykurtic function. The statistical properties of new distribution, consist of survival function, hazard function, moments and moment generating function have been studied. The parameters of cubic transmuted Gumbel distribution are estimated using the maximum likelihood method. Also, the application of the cubic transmuted Gumbel distribution is shown with two numerical examples and compared with Gumbel distribution and transmuted Gumbel distribution. Finally, it is shown that for a data set, the proposed cubic transmuted Gumbel distribution is better than Gumbel distribution and transmuted Gumbel distribution.

Keywords: Cubic transmuted Gumbel distribution, Likelihood function, Maximum likelihood estimation, Moment generating function.

¹ Department of Statistics, Faculty of Intelligent Systems Engineering and Data Science, Persian Gulf University, Bushehr, Iran