توابع چگالی حاشیه‌ای آماره‌های ترتیبی: برهانی ساده و چند اتحاد مفید

سید محمود میرجلیلی[۱]، جابر کاظم‌پور[۲]، بهشید یساولی [۳]

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۰۹/۲۶
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۱۲/۲۶

چکیده:
در این مقاله، تابع چگالی احتمال و تابع توزیع تجمعی حاصل‌ضرب چند متغیر تصادفی مستقل دارای توزیع توانی با پارامترهای دوبه‌دو متفاوت و هم‌چنین تابع مولد گشتاور و تابع مشخصه این متغیرها در حالتی خاص محاسبه‌شده‌اند. به‌عنوان نتایجی از این محاسبات تابع چگالی احتمال و تابع توزیع تجمعی حاصل‌ضرب چند متغیر تصادفی مستقل دارای توزیع پارتو و مجموع چند متغیر تصادفی مستقل دارای توزیع نمایی با پارامترهای دوبه‌دو متفاوت ارائه‌شده‌اند. کاربردهای نظری دیگری از این محاسبات نیز در پیدا کردن تابع چگالی حاشیه‌ای آماره‌های ترتیبی با توابع چگالی احتمال مطلقاً پیوسته و چند اتحاد ترکیباتی جالب پدیدار گشته است.

واژه‌های کلیدی: توزیع توانی استاندارد، آماره‌های ترتیبی، حاصل‌ضرب و مجموع چند متغیر تصادفی مستقل، تابع چگالی احتمال حاشیه‌ای.

۱ مقدمه

آماره‌های ترتیبی نقش مهمی در آمار ریاضی و سایر زمینه‌ها مانند بررسی بلایای طبیعی [۳، ۹] ، طول عمر سیستم‌های مهندسی [۱۳، ۱۶] ، آماره‌های فرین(مقادیر غایی) [۱۸، ۱۹] ، مشاهدات رکوردی [۲] ، سری‌های زمانی [۱] ، بحث در مورد دامنه‌ی نمونه‌ها [۶، ۱۱] ، و غیره دارد. در تمام این زمینه‌ها ملزم به استفاده از توابع چگالی حاشیه‌ای یا توابع چگالی حاشیه‌ای توأم این آماره‌ها هستیم. به‌علاوه محاسبه‌ی توابع مولد گشتاور، امید ریاضی‌های توأم، توابع مشخصه و دیگر توابع مربوطه به آماره‌ها نیز به توابع چگالی حاشیه‌ای توأم آماره‌های ترتیبی برخاسته از نمونه‌های مستقل و هم‌توزیع نیاز دارد.

آماره‌های ترتیبی برخاسته از نمونه‌های مستقل و هم‌توزیع، روابط و ویژگی‌های نظری آن‌ها و خصوصیات مرتبط با اکثر توزیع‌های آماری توسط محققین فراوانی بررسی‌شده است که از جمله می‌توان به [۱، ۳] ، اشاره کرد. روابط و ویژگی‌های آماره‌های ترتیبی برخاسته از نمونه‌های غیرمستقل یا غیر هم‌توزیع یا هر دو نیز می‌تواند در [۷، ۱۲] ، یافت شود.

در بسیاری از بحث‌های نظری که نیازمند پیدا کردن توابع چگالی حاشیه‌ای است، (مانند محاسبه‌ی توابع چگالی حاشیه‌ای آماره‌های ترتیبی و سانسور فزاینده نوع ۲ در نمونه‌های مستقل هم‌توزیع دارای تابع چگالی احتمال مطلقاً پیوسته) به محاسبه‌ی تابع چگالی احتمال مجموع چند متغیر تصادفی مستقل و هم‌توزیع از توزیع نمایی با پارامترهای دوبه‌دو متفاوت نیازمندیم که این کار نخستین بار توسط لیکس [۱۴] ، انجام شد. همچنین، وی تابع چگالی حاصل‌ضرب چند متغیر تصادفی مستقل دارای توزیع پارتو با پارامترهای دوبه‌دو متفاوت را نیز به دست آورد. ما نیز در این مقاله ابتدا در بخش ۲، تابع چگالی احتمال حاصل‌ضرب چند متغیر تصادفی مستقل هم‌توزیع دارای توزیع توانی استاندارد با پارامترهای دوبه‌دو متفاوت را به کمک یک گزاره در یک لم ارائه می‌دهیم. در بخش ۳ به کمک لم اثبات‌شده در بخش ۲ محاسبات انجام‌شده توسط لیکس [۱۴] ، را نتیجه می‌گیریم. در بخش ۴ این مقاله، توابع چگالی حاشیه‌ای آماره‌های ترتیبی در نمونه‌های مستقل هم‌توزیع دارای توابع توزیع تجمعی مطلقاً پیوسته را به‌عنوان نتیجه‌ی دیگری از مطالب بخش ۲، ارائه می‌دهیم؛ سرانجام چند اتحاد ترکیباتی جالب و مفید نیز به‌عنوان کاربردهای نظری دیگری از همین مطالب پیوست شده‌اند.

[۱] گروه آمار، دانشکده علوم پایه، دانشگاه ولایت، ایرانشهر
[۲] گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی، مشهد (نویسنده مسئول: kazempoorjaber@gmail.com)
[۳] گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی، مشهد

۲ حاصل‌ضرب چند متغیر تصادفی مستقل دارای توزیع توانی با پارامترهای دوبه‌دو متفاوت

در این بخش، به ترتیب تابع چگالی احتمال، تابع توزیع تجمعی و در حالتی خاص تابع مولد گشتاور و تابع مشخصه حاصل‌ضرب چند متغیر تصادفی مستقل دارای توزیع توانی با پارامترهای دوبه‌دو متفاوت را بررسی می‌کنیم.

۱.۲ تابع چگالی احتمال و تابع توزیع تجمعی

ابتدا به ارائه یک گزاره می‌پردازیم که به کمک آن خواهیم توانست تابع چگالی احتمال حاصل‌ضرب چند متغیر تصادفی مستقل دارای توزیع توانی با پارامترهای دوبه‌دو متفاوت را محاسبه کنیم.

گزارهٔ ۱.۲ *اگر $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ $(n \geq 1)$، اعداد حقیقی ناصفر و دوبه‌دو متفاوتی باشند، آنگاه:*

$$\sum_{k=i}^{j} c_{i,k}^{j} = 0 \qquad 1 \leq i < j \leq n, \tag{1}$$

که در آن [4]

$$c_{i,k}^{j} = \frac{\prod_{w=i}^{j}(\alpha_w)}{\prod_{w=i,w\neq k}^{j}(\alpha_w - \alpha_k)}. \tag{2}$$

اثبات. ابتدا چندجمله‌ای درون‌افزای لاگرانژ[5] تابع $p(x) = x, \forall x \in R$ را در نقاط به ازای هر $1 \leq i < j \leq n$ ،$\alpha_i, \cdots, \alpha_j$ می‌نویسیم. اکنون با توجه به اینکه
$p^{(r)}(x) = 0, r = 2, 3, \cdots, \forall x \in R$، پس

$$p(x) = \sum_{k=i}^{j} \prod_{w=i,w\neq k}^{j} \frac{(\alpha_w - x)}{(\alpha_w - \alpha_k)} p(\alpha_k)$$

اکنون با محاسبه $p(0)$ برهان کامل می‌شود. □

در اینجا تابع چگالی احتمال حاصل‌ضرب چند متغیر تصادفی مستقل دارای توزیع توانی با پارامترهای دوبه‌دو متفاوت را محاسبه می‌کنیم.

لم ۲.۲. اگر $X_1, \cdots, X_n$ $(n \geq 1)$، متغیرهای تصادفی مستقل دارای توزیع توانی با پارامترهای دوبه‌دو متفاوت α_i، و تابع چگالی احتمال

$$f_{X_i}(x) = \alpha_i x^{\alpha_i - 1}, \alpha_i \geq 0, 0 \leq x \leq 1, i = 1, 2, \cdots, n \tag{3}$$

باشند، آنگاه:

$$f_{\prod_{k=i}^{j} X_k}(x) = \sum_{k=i}^{j} c_{i,k}^{j} x^{\alpha_k - 1}, \qquad 1 \leq i \leq j \leq n, \quad 0 \leq x \leq 1. \tag{4}$$

اثبات. لم را به استقرا ثابت می‌کنیم. واضح است که قضیه به ازای $i = j$ برقرار است، زیرا:

$$f_{X_i}(x) = \alpha_i x^{\alpha_i - 1}, \alpha_i \geq 0, 0 \leq x \leq 1, i = 1, 2, \cdots, n$$

حال فرض می‌شود رابطه (۴)، به ازای $j = s - 1$ برقرار است و این رابطه را به ازای $j = s$ ثابت می‌کنیم. ازآنجایی‌که رابطه‌ی (۴) به ازای $j = s - 1$ برقرار است، بنابراین:

$$f_{\prod_{k=i}^{s-1} X_k}(x) = \sum_{k=i}^{s-1} c_{i,k}^{s-1} x^{\alpha_k - 1}, \qquad 1 \leq i \leq s-1 \leq n-1, \quad 0 \leq x \leq 1. \tag{5}$$

حال با توجه به اینکه $\prod_{k=i}^{s} X_k = X_s \prod_{i=k}^{s-1} X_k, 1 \leq i < s \leq n$ و با توجه به پیچش حاصل‌ضرب چند متغیر تصادفی مستقل و هم‌توزیع[6]، داریم:

$$\begin{aligned}
f_{\prod_{k=i}^{s} X_k}(x) &= \int_x^1 f_{\prod_{k=i}^{s-1} X_k, \prod_{k=i}^{s} X_k}(y, x) dy \\
&= \int_x^1 f_{\prod_{k=i}^{s-1} X_k, X_s \prod_{k=i}^{s} X_k}(y, x) dy \\
&= \int_x^1 \frac{1}{y} f_{\prod_{k=i}^{s-1} X_k}(y) f_{X_s}(\frac{x}{y}) dy \\
&= \alpha_s x^{\alpha_s - 1} \int_x^1 y^{-\alpha_s} f_{\prod_{k=i}^{s-1} X_k}(x)
\end{aligned}$$

[4] این نماد در سراسر مقاله با همین تعریف به کار می‌رود.

[5] Lagrange Interpolation Polynomial

[6] برای اطلاعات بیشتر به پیوست ۱ مراجعه کنید.

اکنون با توجه به رابطه (۵)، داریم:

$$
\begin{aligned}
f_{\prod_{k=i}^{s} X_k}(x) &= \alpha_s x^{\alpha_s-1}\int_x^1 y^{-\alpha_s}\sum_{k=i}^{s-1} c_{i,k}^{s-1} y^{\alpha_k-1}dy\\
&= \alpha_s x^{\alpha_s-1}\sum_{k=i}^{s-1} c_{i,k}^{s-1}\int_x^1 y^{\alpha_k-\alpha_s-1}dy\\
&= \alpha_s x^{\alpha_s-1}\sum_{k=i}^{s-1} c_{i,k}^{s-1}\left(\frac{1}{\alpha_k-\alpha_s}-\frac{x^{\alpha_k-\alpha_s}}{\alpha_k-\alpha_s}\right)\\
&= \alpha_s x^{\alpha_s-1}\sum_{k=i}^{s-1} c_{i,k}^{s-1}\left(\frac{1}{\alpha_k-\alpha_s}\right)\\
&- \alpha_s x^{\alpha_s-1}\sum_{k=i}^{s-1} c_{i,k}^{s-1}\left(\frac{x^{\alpha_k-\alpha_s}}{\alpha_k-\alpha_s}\right)\\
&= x^{\alpha_s-1}c_{i,s}^{s}+\sum_{k=i}^{s-1} c_{i,k}^{s} x^{\alpha_k-1}\\
&= \sum_{k=i}^{s} c_{i,k}^{s} x^{\alpha_k-1}
\end{aligned}
$$

با توجه به رابطه به ترتیب (۱) و (۲) می‌توان نتیجه گرفت که $c_{i,k}^{s} = \frac{\alpha_s}{(\alpha_s-\alpha_k)}c_{i,k}^{s-1}; k = i, i+1, \cdots, s-1$ و همچنین $\sum_{k=i}^{s-1} c_{i,k}^{s} = -c_{i,s}^{s}$ و برهان کامل است. □

اکنون با استفاده از لم ۲.۲، تابع چگالی احتمال حاصل‌ضرب چند متغیر تصادفی مستقل دارای توزیع توانی با پارامترهای دوبه‌دو متفاوت و پارامترهای مقیاس دلخواه را به دست می‌آوریم.

قضیهٔ ۳.۲. اگر $Y_1, \cdots, Y_n$ $(n \ge 1)$، متغیرهای تصادفی مستقل دارای توزیع توانی با تابع چگالی احتمال

$$
f_{Y_i}(y) = \frac{\alpha_i y^{\alpha_i-1}}{\lambda_i^{\alpha_i}}, \qquad (۶)
$$
$$
\alpha_i \ge 0, \lambda_i > 0, 0 \le y \le \lambda_i, i = 1, 2, \cdots, n.
$$

باشند[7]، آنگاه:

$$
f_{\prod_{k=i}^{j} Y_k}(y) = \sum_{k=i}^{s} c_{i,k}^{s}\frac{y^{\alpha_k-1}}{(\prod_{k=i}^{j}\lambda_k^{\alpha_k})} \qquad (۷)
$$
$$
\alpha_i \ge 0, \lambda_i > 0, 0 \le y \le (\prod_{k=i}^{j}\lambda_k), 1 \le i \le j \le n.
$$

و

$$
F_{\prod_{k=i}^{j} Y_k}(y) = \sum_{k=i}^{s} \frac{c_{i,k}^{s}}{\alpha_k}\frac{y^{\alpha_k}}{\prod_{k=i}^{j}\lambda_k^{\alpha_k}}, \qquad (۸)
$$
$$
\alpha_i \ge 0, \lambda_i > 0, 0 \le y \le (\prod_{k=i}^{j}\lambda_k), 1 \le i \le j \le n.
$$

اثبات. اگر $X_1, \cdots, X_n$ $(n \ge 1)$، متغیرهای تصادفی مستقلی باشند که تابع چگالی آن‌ها در (۳) آمده است، واضح است که $\prod_{k=i}^{j} Y_k \overset{d}{=} \prod_{k=i}^{j}\lambda_k \prod_{i=k}^{j} X_k; 1 \le i \le j \le n$ و با توجه به رابطه (۴) برای $1 \le i \le j \le n$ داریم:

$$
\begin{aligned}
f_{\prod_{k=i}^{j} Y_k}(y) &= f_{\prod_{k=i}^{j}\lambda_k \prod_{i=k}^{j} X_k}(y)\\
&= \frac{f_{\prod_{k=i}^{j} X_k}(\frac{y}{\prod_{k=i}^{j}\lambda_k})}{(\prod_{k=i}^{j}\lambda_k)}\\
&= \sum_{k=i}^{s} c_{i,k}^{s}\frac{y^{\alpha_k-1}}{(\prod_{k=i}^{j}\lambda_k^{\alpha_k})}
\end{aligned}
$$

□

رابطه (۸)، با توجه به رابطه (۷)، به‌سادگی قابل‌محاسبه است.[8]

۲.۲ تابع مولد گشتاور و تابع مشخصه

در اینجا با ارائه یک لم، تابع مولد گشتاور و تابع مشخصه حاصل‌ضرب چند متغیر تصادفی مستقل دارای توزیع توانی با پارامترهای دوبه‌دو متفاوت و متعلق به اعداد طبیعی و پارامترهای مقیاس دلخواه را به دست می‌آوریم.

لم ۴.۲. اگر $n = 0, 1, 2, \cdots$ باشد، آنگاه:

$$
\int x^n e^{tx}dx = \sum_{u=0}^{n}\frac{n!(-1)^{n-u}x^u e^{tx}}{u!t^{n-u+1}}
$$

اثبات. لم را به استقرا نشان می‌دهیم. حالت $n = 0$ واضح است، زیرا:

$$
inte^{tx}dx = \frac{e^{tx}}{t}.
$$

حال فرض کنید حالت $n = k - 1$ برقرار باشد، با استفاده از انتگرال‌گیری جز به جزء داریم:

$$
\begin{aligned}
\int x^k e^{tx}dx &= \frac{x^k e^{tx}}{t} - \frac{k}{t}\int x^{k-1}e^{tx}dx\\
&= \frac{x^k e^{tx}}{t} - \frac{k}{t}\sum_{u=0}^{k-1}\frac{(k-1)!(-1)^{k-1-u}x^u e^{tx}}{u!t^{k-u}}\\
&= \frac{x^k e^{tx}}{t} + \sum_{u=0}^{k-1}\frac{(k)!(-1)^{k-u}x^u e^{tx}}{u!t^{k-u+1}}\\
&= \sum_{u=0}^{k}\frac{k!(-1)^{k-u}x^u e^{tx}}{u!t^{k-u+1}}
\end{aligned}
$$

با توجه به درست بودن لم در $n = k$ با فرض درست بودن آن در حالت $n = k - 1$ برهان کامل می‌شود. □

[7] پارامترهای λ_i، دلخواه و پارامترهای α_i دوبه‌دو متفاوت هستند.

[8] برای اثبات یک اتحاد مهم با استفاده از این قضیه، پیوست ۳ را ببینید.

لم ۵.۲. اگر $Y_1, \cdots, Y_n$ $(n \geq 1)$، متغیرهای تصادفی مستقل دارای توزیع توانی با تابع چگالی احتمال داده‌شده در (۶)باشند، به‌طوری‌که

$$\alpha_i = N_i, \qquad N_i \in N, N_i \neq N_j, \quad i,j = 1,2,\cdots,n,$$

آنگاه:

$$M_{\prod_{k=i}^{j} Y_k}(t) = E\left[e^{t\prod_{k=i}^{j} Y_k}\right] = \sum_{k=i}^{j} c_{i,k}^{j} \frac{H\left(N_k - 1\right)}{\left(\prod_{k=i}^{j} \lambda_k^{\alpha_k}\right)}$$

و

$$\varphi_{\prod_{k=i}^{j} Y_k}(t) = E\left[e^{zt\prod_{k=i}^{j} Y_k}\right] = \sum_{k=i}^{j} c_{i,k}^{j} \frac{H^{'}\left(N_k - 1\right)}{\left(\prod_{k=i}^{j} \lambda_k^{\alpha_k}\right)},$$

که در آن

$$H(n) = \frac{(-1)^{n+1} n!}{t^{n+1}} + \sum_{u=0}^{n} \frac{n!(-1)^{n-u} e^t}{u! t^{n-u+1}}$$

و

$$H^{'}(n) = H(zn), z^2 = -1, t \in R,$$
$$n = 0, 1, 2, \cdots$$

اثبات. با توجه به رابطه (۶) و خاصیت خطی بودن امید ریاضی، کافی است مقادیر $H(n), n = 0, 1, 2, \cdots$ را محاسبه کنیم. اکنون با توجه به لم ۴.۲، داریم:

$$\int_0^1 x^n e^{tx} dx = \frac{n!(-1)^n e^{tx}}{t^{(n+1)}}\Big|_0^1 + \sum_{u=1}^{n} \frac{n!(-1)^{(n-u)} x^u e^{tx}}{u! t^{(n-u+1)}}\Big|_0^1 = H(n),$$
$$n = 0, 1, 2, \cdots$$

اکنون با کمی محاسبات برهان کامل می‌شود. □

مثال ۶.۲. در قضیه ۳.۲، فرض می‌کنیم که،

$$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 3, \alpha_3 = 4, \alpha_4 = 2.5,$$
$$\frac{1}{\prod_{k=1}^{4} (\lambda_k^{\alpha_k})} = \Lambda_1, \frac{1}{\prod_{k=1}^{3} (\lambda_k^{\alpha_k})} = \Lambda_2,$$

بنابراین

$$c_{1,1}^{4} = \frac{30}{9}, c_{1,2}^{4} = 30, c_{1,3}^{4} = \frac{-20}{3}, c_{1,4}^{4} = \frac{80}{3}$$
$$H(0) = \frac{e^t - 1}{t}, H(1) = \frac{e^t(t-1)+1}{t^2},$$
$$H(2) = \frac{e^t(2 - 2t + t^2) - 2}{t^3}$$

و در نتیجه:

$$f_{\prod_{k=1}^{4} Y_k}(y) = \Lambda_1 \left(\frac{30}{9} + 30y^2 - \frac{20}{3}y^3 + \frac{80}{3}y^{1.5}\right),$$
$$0 \leq y \leq 1$$

و

$$F_{\prod_{k=1}^{4} Y_k}(y) = \Lambda_1 \left(\frac{30}{9}y + 30\frac{y^3}{3} - \frac{20}{3}\frac{y^4}{4} + \frac{80}{3}\frac{y^{2.5}}{2.5}\right),$$
$$0 \leq y \leq 1$$

و

$$M_{\prod_{k=1}^{4} Y_k}(y) = \Lambda_2 \left(\frac{30}{9}H(0) + 30H(2) - \frac{20}{3}H(3)\right),$$
$$t \in R$$

۳ حاصل‌ضرب چند متغیر تصادفی مستقل دارای توزیع پارتو و مجموع چند متغیر تصادفی مستقل دارای توزیع نمایی با پارامترهای دوبه‌دو متفاوت

در این بخش، به ترتیب تابع چگالی احتمال و تابع توزیع تجمعی حاصل‌ضرب چند متغیر تصادفی مستقل دارای توزیع پارتو و توزیع نمایی با پارامترهای دوبه‌دو متفاوت محاسبه‌شده‌اند.
اکنون به‌عنوان نتیجه‌ای از قضیه ۳.۲، تابع چگالی احتمال حاصل‌ضرب چند متغیر تصادفی مستقل دارای توزیع پارتو با پارامترهای دوبه‌دو متفاوت و پارامترهای مقیاس دلخواه را به دست می‌آوریم.

قضیهٔ ۱.۳. اگر $T_1, \cdots, T_n$ $(n \geq 1)$، متغیرهای تصادفی مستقل دارای توزیع پارتو با تابع چگالی احتمال

$$f_{T_i}(t) = \frac{\alpha_i \lambda_i^{\alpha_i}}{t^{(\alpha_i + 1)}}, \qquad (9)$$
$$\alpha_i \geq 0, \lambda_i > 0, \lambda_i \leq t, i = 1, 2, \cdots,$$

[9] پارامترهای λ_i، دلخواه و پارامترهای α_i، دوبه‌دو متفاوت هستند.

باشند[۹]، آنگاه:

$$f_{\prod_{k=i}^{j} T_k}(t) = \sum_{k=i}^{j} c_{i,k}^{j} \frac{\left(\prod_{k=i}^{j} \lambda_k\right)^{\alpha_k}}{t^{\alpha_k+1}}, \qquad (10)$$

$$\alpha_i > 0, \lambda_i > 0, \prod_{k=i}^{j} \lambda_k \le t, 1 \le i \le j \le n.$$

و

$$F_{\prod_{k=i}^{j} T_k}(t) = \sum_{k=i}^{j} \frac{c_{i,k}^{j}}{\alpha_k} \left(1 - \left(\frac{\prod_{k=i}^{j} \lambda_k}{t}\right)^{\alpha_k}\right), \qquad (11)$$

$$\alpha_i > 0, \lambda_i > 0, \prod_{k=i}^{j} \lambda_k \le t, 1 \le i \le j \le n.$$

اثبات. با استفاده از رابطه (۹)، داریم:

$$f_{\frac{1}{T_i}}(t) = \alpha_i \lambda_i^{\alpha_i} t^{\alpha_i - 1} \qquad \alpha_i \ge 0, \lambda_i > 0, 0 \le t \le \frac{1}{\lambda_i}, i = 1, 2, \cdots, n.$$

اکنون با استفاده از رابطه (۷)، داریم:

$$f_{\prod_{k=i}^{j} \frac{1}{T_k}}(t) = \sum_{k=i}^{j} c_{i,k}^{j} t^{\alpha_k - 1} \left(\prod_{k=i}^{j} \lambda_k\right)^{\alpha_k} \qquad 1 \le i \le k \le j \le n.$$

اکنون با کمی محاسبات برهان رابطه (۱۰)، کامل می‌شود. برهان رابطه (۱۱)، نیز با استفاده از رابطه (۱۰)، به‌سادگی قابل‌تکمیل است.
به‌عنوان نتیجه‌ای دیگر از قضیه ۱.۳، تابع چگالی احتمال و تابع توزیع تجمعی مجموع چند متغیر تصادفی مستقل دارای توزیع نمایی با پارامترهای دوبه‌دو متفاوت را به دست می‌آوریم.

□

قضیهٔ ۲.۳. اگر $W_1, \cdots, W_n$ ($n \ge 1$)، متغیرهای تصادفی مستقل دارای توزیع نمایی با تابع چگالی احتمال

$$f_{W_i}(w) = \alpha_i e^{-\alpha_i w},$$

$$w \ge 0, \alpha_i > 0, i = 1, 2, \cdots, n.$$

باشند، آنگاه:

$$f_{\sum_{k=i}^{j} W_k}(w) = \sum_{k=i}^{j} c_{i,k}^{j} e^{-\alpha_k w}, \qquad (12)$$

$$w \ge 0 \alpha_k \ge 0, 1 \le i \le j \le n,$$

و

$$F_{\sum_{k=i}^{j} W_k}(w) = \sum_{k=i}^{j} c_{i,k}^{j} \left(1 - e^{-\alpha_i w}\right), \qquad (13)$$

$$w \ge 0, \alpha_k \ge 0, 1 \le i \le j \le n.$$

اثبات. با کمی محاسبات می‌توان نشان داد که

$$f_{e^{-w_i}}(t) = \alpha_i t^{\alpha_i - 1}, \qquad \alpha_i \ge 0, 0 \le t \le 1, i = 1, 2, \cdots, n.$$

و با توجه به لم ۲.۲، داریم:

$$f_{e^{-\sum_{k=i}^{j} W_k}}(t) = f_{\prod_{k=i}^{j} e^{-W_k}}(t) = \sum_{k=i}^{j} c_{i,k}^{j} t^{\alpha_k - 1}.$$

اکنون با یک تغییر متغیر رابطه (۱۲)، به دست می‌آید. رابطه (۱۳)، با توجه به تعریف تابع توزیع تجمعی و رابطه (۱۲)، به‌راحتی محاسبه می‌شود. □

۴ توابع چگالی احتمال حاشیه‌ای آماره‌های ترتیبی در نمونه‌های مستقل هم‌توزیع

محاسبه توابع چگالی احتمال حاشیه‌ای آماره‌های ترتیبی در نمونه‌های مستقل هم‌توزیع کار چندان راحتی نیست. در اکثر منابع نیز حداکثر توابع چگالی احتمال و توابع توزیع تجمعی حاشیه‌ای سه‌تایی آماره‌های ترتیبی در این نمونه‌ها ارائه‌شده است و یا از اثبات روش محاسبه توابع چگالی احتمال و توابع توزیع تجمعی حاشیه‌ای آماره‌های ترتیبی با تعداد بیشتر از ۳ در این نمونه‌ها صرف‌نظر شده است. در این بخش به‌عنوان کاربردی دیگر از قضیه ۳.۲، به این مهم خواهیم پرداخت.
می‌دانیم که اگر $V_1, \cdots, V_n$ ($n \ge 1$)، متغیرهای تصادفی مستقل هم‌توزیع با تابع توزیع تجمعی F و تابع چگالی احتمال fباشند، به‌راحتی می‌توان نشان داد که:

$$f_{V_{1:n}, \cdots, V_{n:n}}(v_1, \cdots, v_n) = \prod_{i=1}^{n} i f(v_i), i = 1, 2, \cdots, n.$$

[۱۱] (فصل ۴، بخش ۶). مشکل از جایی شروع می‌شود که محاسبه توابع چگالی حاشیه‌ای با تعداد بیشتر از ۲ به‌سرعت پیچیده می‌شود. اکنون با ارائه‌ی روشی متفاوت و استفاده از دو لم دیگر و هم‌چنین بهره‌گیری از قضیه ۳.۲، برای محاسبه توابع چگالی احتمال حاشیه‌ای آماره‌های ترتیبی در نمونه‌های مستقل هم‌توزیع اقدام می‌کنیم که در ادامه ذکرشده است.

لم ۱.۴. [۱۵] ؛ اگر $U_1, \cdots, U_n$ ($n \ge 1$)، متغیرهای تصادفی مستقل

هم‌توزیع با تابع چگالی احتمال یکنواخت استاندارد باشند، آنگاه:

$$(U_{i_{1:n}},\cdots,U_{i_{k:n}})=(1-\prod_{j_1=n-i_1+1}^{n}V_{j_1},\cdots,1-\prod_{j_k=n-i_k+1}^{n}V_{j_k})$$
$$1\le i_1\le\cdots\le i_k\le n, k=1,2,\cdots,n$$

که در آن $V_1,\cdots,V_n$ $(n\ge 1)$، متغیرهای تصادفی مستقل با تابع چگالی داده‌شده در (۳) هستند[10] که

$$\alpha_i=i, i=1,2,\cdots,n.$$

اکنون به ارائه لم دیگری می‌پردازیم که ارتباط آماره‌های ترتیبی را در نمونه‌های مستقل هم‌توزیع با تابع چگالی احتمال یکنواخت استاندارد و توابع چگالی احتمال دیگر بیان می‌دارد.

لم ۲.۴. [۱۷] ؛ اگر $U_1,\cdots,U_n$ $(n\ge 1)$، متغیرهای تصادفی مستقل هم‌توزیع با تابع چگالی احتمال یکنواخت استاندارد و $X_1,\cdots,X_n$ $(n\ge 1)$،متغیرهای تصادفی مستقلی با تابع توزیع تجمعی مشترک F باشند، آنگاه:

$$(X_{i_{1:n}},\cdots,X_{i_{k:n}})\overset{d}{=}\left(F^{-1}(U_{i_{1:n}}),\cdots,F^{-1}(U_{i_{k:n}})\right)$$
$$1\le i_1\le\cdots\le i_k\le n, k=1,2,\cdots,n$$

که در آن $F^{-1}(y)=\inf\left(x:F(x)\ge y\right)$ است.

اکنون به ارائه تابع چگالی حاشیه‌ای آماره‌های ترتیبی می‌پردازیم.

قضیهٔ ۳.۴. اگر $X_1,\cdots,X_n$ $(n\ge 1)$، متغیرهای تصادفی مستقل هم‌توزیع با تابع توزیع تجمعی مطلقاً پیوسته F و تابع چگالی احتمال f باشند، آنگاه:

$$f_{X_{i_{1:n}},\cdots,X_{i_{k:n}}}(x_1,\cdots,x_n)=$$
$$\prod_{s=1}^{k}\frac{f(x_s)}{\bar F(x_s-1)}\times\sum_{j_s=n-(i_s)+1}^{n-(i_{s-1})}b\left(j_s,i_{(s-1)},i_{(s)}\right)$$
$$\times\left(\frac{\bar F(x_s)}{\bar F(x_{s-1})}\right)^{j_s-1}$$

که در آن

$$b\left(j_s,i_{(s-1)},i_{(s)}\right)=(n-(i_s-1))$$
$$\times\begin{bmatrix}n-i_{(s-1)}-1\\ j_s-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}j_s-1\\ n-i_s\end{bmatrix}(-1)^{j_s-n+i_s-1},$$

$$s=1,2,\cdots,k, i_0=0, \bar F(x_0)=1, j_{k+1}=0$$

اثبات. با توجه به لم ۱.۴ و ۲.۴ و خاصیت پیچش حاصل‌ضرب[11] چند متغیر تصادفی داریم:

$$f_{X_{i_{1:n}},\cdots,X_{i_{k:n}}}(x_1,\cdots,x_n)=f_{F^{-1}(U_{i_{1:n}}),\cdots,F^{-1}(U_{i_{k:n}})}(x_1,\cdots,x_k)$$
$$=f(x_1)\cdots f(x_k)f_{U_{i_{1:n}},\cdots,U_{i_{k:n}}}\left(F(x_1),\cdots,F(x_k)\right)$$
$$=f(x_1)\cdots f(x_k)$$
$$\times f_{(1-\prod_{j_1=n-i_1+1}^{n}V_{j_1},\cdots,1-\prod_{j_k=n-i_k+1}^{n}V_{j_k})}\left(F(x_1),\cdots,F(x_k)\right)$$
$$=f(x_1)\cdots f(x_k)$$
$$\times f_{(\prod_{j_1=n-i_1+1}^{n}V_{j_1},\cdots,\prod_{j_k=n-i_k+1}^{n}V_{j_k})}\left(\bar F(x_1),\cdots,\bar F(x_k)\right)$$
$$=\frac{f(x_1)\cdots f(x_k)}{\bar F(x_1)\cdots\bar F(x_{k-1})}$$
$$\times\prod_{s=1}^{k}f_{\prod_{j_s=(n-(i_s)+1)}^{(n-(i_{s-1}))}V_{j_s}}\left(\frac{\bar F(x_s)}{\bar F(x_{s-1})}\right)$$
$$=\frac{f(x_1)\cdots f(x_k)}{\bar F(x_1)\cdots\bar F(x_{k-1})}\prod_{s=1}^{k}\sum_{j_s=n-i_s+1}^{n-i_s-1}c_{n-i_s+1,j_s}^{n-i_{s-1}}\left(\frac{\bar F(x_s)}{\bar F(x_{s-1})}\right)^{j_s-1}$$
$$=\prod_{s=1}^{k}\frac{f(x_s)}{\bar F(x_{s-1})}\sum_{j_s=n-i_s+1}^{n-i_{s-1}}(n-(i_{s-1}))$$
$$=\begin{bmatrix}n-i_{(s-1)}-1\\ j_s-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}j_s-1\\ n-i_s\end{bmatrix}(-1)^{j_s-n+i_s-1}\left(\frac{\bar F(x_s)}{\bar F(x_{s-1})}\right)^{j_s-1}$$
$$=\prod_{s=1}^{k}\frac{f(x_s)}{\bar F(x_{s-1})}\sum_{j_s=n-i_s+1}^{n-i_{s-1}}(n-(i_{s-1}))\,b\left(j_s,i_{(s-1)},i_{(s)}\right)$$
$$\times\left(\frac{\bar F(x_s)}{\bar F(x_{s-1})}\right)^{j_s-1}$$

□

با توجه به متناهی بودن تمام سری‌های قضیه ۳.۴ می‌توان از معادل زیر برای نمایش تابع چگالی احتمال حاشیه‌ای آماره‌های ترتیبی استفاده کرد.

$$f_{X_{i_{1:n}},\cdots,X_{i_{k:n}}}(x_1,\cdots,x_n)$$
$$=\sum_{j_1=n-(i_1)+1}^{n}\sum_{j_2=n-(i_2)+1}^{n-(i_1)}\cdots\sum_{j_{k-1}=n-(i_{k-1})+1}^{n-(i_{k-2})}\sum_{j_k=n-(i_k)+1}^{n-(i_{k-1})}$$
$$\times\prod_{s=1}^{k}b\left(j_s,i_{(s-1)},i_{(s)}\right)f(x_s)\bar F(x_s)^{j_s-j_{(s+1)}-1},$$
$$i_0=0, \bar F(x_0)=1, j_{k+1}=0$$

---

[10] برای اطلاعات بیشتر به پیوست ۲ مراجعه کنید

[11] برای اطلاعات بیشتر به پیوست ۱ مراجعه کنید.

و با توجه به اینکه

$$F_{۱:n}(t) = ۱ - \bar{F}(t)^n, f_{۱:n}(t) = nf(t)\left(۱ - \bar{F}(t)^{n-۱}\right), \quad n = ۱, ۲, \cdots .$$

می‌توان از فرمول بازگشتی زیر به‌عنوان جایگزین فرمول بالا استفاده کرد.

$$\begin{aligned} & f_{X_{i_{۱:n}}, \cdots, X_{i_{k:n}}}(x_۱, \cdots, x_k) \\ &= \sum_{j_۱=n-(i_۱)+۱}^{n} \sum_{j_۲=n-(i_۲)+۱}^{n-(i_۱)} \cdots \sum_{j_{k-۱}=n-(i_{k-۱})+۱}^{n-(i_{k-۲})} \sum_{j_k=n-(i_k)+۱}^{n-(i_{k-۱})} \\ & \times \prod_{s=۱}^{k} b\left(j_s, i_{(s-۱)}, i_{(s)}\right) \left(\frac{f_{۱:j_s - j_{s+۱}}(x_s)}{j_s - j_{(s+۱)}}\right), \\ & \qquad i_۰ = ۰, \bar{F}(x_۰) = ۱, j_{k+۱} = ۰ \end{aligned}$$

مثال ۴.۴. در حالت خاص $i_۱ = i$ و $k = ۱$ داریم:

$$f_{i:n}(t) = \sum_{j=n-i+۱}^{n} \frac{n}{j} \begin{bmatrix} n-۱ \\ j-۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j-۱ \\ n-i \end{bmatrix} (-۱)^{j-n+i-۱} f_{۱:j}(t)$$

و

$$F_{i:n}(t) = \sum_{j=n-i+۱}^{n} \frac{n}{j} \begin{bmatrix} n-۱ \\ j-۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j-۱ \\ n-i \end{bmatrix} (-۱)^{j-n+i-۱} F_{۱:j}(t)$$

و

$$\bar{F}_{i:n}(t) = \sum_{j=n-i+۱}^{n} \frac{n}{j} \begin{bmatrix} n-۱ \\ j-۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j-۱ \\ n-i \end{bmatrix} (-۱)^{j-n+i-۱} \bar{F}_{۱:j}(t)$$

۵ پیوست

پیوست۱: اگر $X_۱, \cdots, X_n$ $(n = ۱, ۲, \cdots)$، متغیرهای تصادفی مستقل دارای تابع چگالی احتمال مشترک f باشند، آنگاه:

$$\begin{aligned} & f_{\prod_{k=۱}^{۱} X_k, \prod_{k=۱}^{۲} X_k, \cdots, \prod_{k=۱}^{n} X_k}(t_۱, \cdots, t_n) \\ &= \prod_{k=۱}^{n} \left(\frac{f_k(\frac{t_k}{t_{k-۱}})}{t_k}\right), t_۰ = ۱, n = ۱, ۲, \cdots \end{aligned}$$

پیوست۲: با توجه به اینکه در اینجا $\alpha_k = k, k = i, i+۱, \cdots, j$، داریم:

$$\begin{aligned} c_{i,k}^{j} &= \frac{\prod_{w=i}^{j}(\alpha_w)}{\prod_{w=i, w\neq k}^{j}(\alpha_w - \alpha_k)} = \frac{\prod_{w=i}^{j}(w)}{\prod_{w=i, w\neq k}^{j}(w-k)} \\ &= \frac{\frac{j!}{(i-۱)!}}{\prod_{s=۱, s\neq k-i+۱}^{j-i+۱}(s+i-k-۱)} \\ &= \frac{j!}{(i-۱)!(-۱)^{(k-i)}(j-k)!(k-i)!} \\ &= j \begin{bmatrix} j-۱ \\ k-۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k-۱ \\ i-۱ \end{bmatrix} (-۱)^{(k-i)}. \end{aligned}$$

پیوست۳: با قرار دادن چندجمله‌ای‌ها در بسط لاگرانژ می‌توان اتحادهای جالبی را به دست آورد، اما برای توابعی به غیر از چندجمله‌ای‌های لاگرانژ مفید نخواهند بود. در اینجا با استفاده از ۳.۲ اتحاد جالبی را نشان می‌دهیم که می‌تواند در محاسبات مشابه کاربرد داشته باشد.

اگر $\alpha_۱, \cdots, \alpha_n$ $(n \geq ۱)$، اعداد حقیقی ناصفر و دوبه‌دو متفاوتی باشند، آنگاه:

$$\sum_{k=i}^{j} \frac{c_{i,k}^{j}}{\alpha_k + s} = \prod_{k=i}^{j} \frac{\alpha_k}{\alpha_k + s}, \qquad s \geq -\alpha_k, ۱ \leq i \leq k \leq j \leq n.$$

اثبات. با توجه به قضیه ۲.۳:

$$E\left[(\prod_{k=i}^{j} y_k)^s\right] = E\left[\prod_{k=i}^{j} y_k^s\right] = \prod_{k=i}^{j} \lambda_k^s \prod_{k=i}^{j} \frac{\alpha_k}{\alpha_k + s}.$$

از طرف دیگر با توجه به رابطه (۱۲):

$$E\left[(\prod_{k=i}^{j} y_k)^s\right] = \sum_{k=i}^{j} \frac{c_{i,k}^{j}}{\alpha_k + s} \prod_{k=i}^{j} y_k^s.$$

با مساوی قرار دادن این دو عبارت برهان کامل می‌شود. به‌خصوص اگر $s = ۰$ آنگاه:

$$\sum_{k=i}^{j} \frac{c_{i,k}^{j}}{\alpha_k} = \prod_{k=i}^{j} \frac{\alpha_k}{\alpha_k} = ۱, \qquad ۱ \leq i \leq k \leq j \leq n.$$

و به‌ویژه اگر $\alpha_k = k, k = i, i+۱, \cdots, j$ باشد، آنگاه:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=i}^{j} \frac{c_{i,k}^{j}}{\alpha_k} = \sum_{k=i}^{j} \frac{j!}{k(i-۱)!(-۱)(k-i)(k-j)!(k-i)!} = ۱, \\ & \qquad ۱ \leq i \leq k \leq j \leq n. \end{aligned}$$

پیوست۴: در اینجا همانند پیوست ۳ یک اتحاد جالب را به کمک امید ریاضی مجموع چند متغیر تصادفی مستقل دارای توزیع نمایی اثبات می‌کنیم.

اگر $\alpha_۱, \cdots, \alpha_n$ $(n \geq ۱)$، اعداد حقیقی ناصفر و دوبه‌دو متفاوتی باشند، آنگاه:

$$\sum_{k=i}^{j} \frac{c_{i,k}^{j}}{\alpha_k^{۲}} = \sum_{k=i}^{j} \frac{۱}{\alpha_k}, \qquad ۱ \leq i \leq k \leq j \leq n.$$

اثبات. با توجه به رابطه (۵):

$$E\left(\sum_{k=i}^{j} W_k\right) = \sum_{k=i}^{j} E(W_k) = \sum_{k=i}^{j} \frac{1}{\alpha_k}$$

از طرف دیگر با توجه به رابطه (۶):

$$E\left(\sum_{k=i}^{j} W_k\right) = \frac{c_{i,k}^{j}}{\alpha_k^{2}}$$

با مساوی قرار دادن این دو عبارت برهان کامل می‌شود.

مراجع

[1] Ahsanullah, Mohammad and Nevzorov, Valery and Shakil, Mohammad (2013). *An intoduction to order statistics*, Springer.

[2] Barry, C. A., Balakrishnan, N. and Nagaraja, N. H. (2011). *Records*, John wiley & Sons.

[3] Barry, C. A., Balakrishnan, N. and Nagaraja, N. H. (2008). *A first course in order statistics*, SIAM.

[4] Bairamov, I. and Tavangar, M. (2015). Residual lifetomes of k-out-of-n systems with exchangeable components. *Journal of the Iranian Statistical Society*, **14(1)**, 63-87.

[5] Balakrishnan, N. Bendre, S. M., and Malik. H. J (1992). General relations and identities for order statostics from non-independent non-identical variables. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **44(1)**, 177-183.

[6] Balakrishnan, N., Zhao, P. (2013). Ordering properties of order statistics from heterogeneus population: a review with an emphasis on some recent developments. *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, **27(4)**, 403.

[7] Bayramoglu, I. (2018). A note on the ordering of distribution functions of inid random variables.*Journal of Computational and Applied Mathematics*, **343**, 49-54.

[8] Cooper, G. F. and Herskovits, E. (1992). A Bayesian method for the induction of probabilistic networks from data.*Machine learning*, **9(4)**, 309-347.

[9] David, H. A., Nagaraja, N. H. (2004). Order statistics. *Encyclopedia of statistical sciences*.

[10] Heckerman, D. (1998). *A tutorial on learning with Bayesian networks*. Springer Netherlands.

[11] Hogg, V. R., McKean, J., and Craig, T. A. (2005). *Introduction to mathematical statistics*, Pearson Education.

[12] Kazempoor, J., Habibrad. A., and Okhli, KH. (2020). Bounds for cdfs of order statistics arising from inid random variables. *Journal of the Iranian Statistical Society*, **19(1)**, 39-57.

[13] Kelkinnama, M., Tavangar, M., and Asadi, M. (2015). New developments on stachastic properties of coherent systems. *IEEE Transactions on Reliability*, **64(4)**, 1276-1286.

[14] Likes, J. (1967). Distributions of some statistics in samples from exponential and power-function populations. *Journal of the American Statistical Association*, **62(317)**, 259-271.

[15] Malmquist, S. (1950). On a property of order statistics from a rectangular distribution. *Scandinavian Actuarial Journal*, **(3-4)**, 214-222.

[16] Salehi, E., Tavangar, M. (2019). Stochastic comparisons on conditional residual lifetime and inactivity time of coherent systems with exchangeable components. *Statistics & Probability Letters*, **145**, 327-337.

[17] Scheffe. H., Tukey, W. J., and et al. (1945). Non-parametric estimation. I. Validation of order statistics. *The Annals of Mathematical Statistics*, **16(2)**, 187-192.

[18] Zhao, P., Li, X. (2009). Stochastic order of sample range from heterogeneous exponential random variables. *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, *23(1)*, 17.

[19] Zhao, P., Zhang, Y. (2012). On sample ranges in multiple-outlier models. *Journal of Multivariate Analysis*, **111**, 335-349.

Joint marginal densities of order statistics: simple proof and some useful identities

Seyed Mahmood Mirjalili[1], Jaber Kazempoor [2], and Behshid Yasavoli[3]

Abstract:

The cumulative distribution and density functions of a product of some random variables following the power distribution with different parameters have been provided. The corresponding characteristic and moment-generating functions are also derived. We extend the results to the exponential variables and furthermore, some useful identities have been investigated in detail.

Keywords: exponential distribution, joint distributions, marginal densities, order statistics, power distribution.

[1]Velayat university, Iranshahr
[2]Ferdowsi university of mashhad, Mashhad
[3]Ferdowsi university of mashhad, Mashhad