

مروری بر احتمال ورشکستگی برخی از مدل‌های ریسک بیمه غیرزندگی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۰۲/۱۶

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۱۲/۲۵

حسین صمیمی حق گذار^۱، آناهیتا نظری زاده^۲

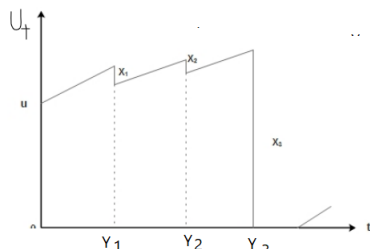
چکیده:

ریسک به معنی شرایطی است که در آن امکان انحراف از یک نتیجه پیش‌بینی شده وجود دارد. بیمه یکی از روش‌های مواجهه با ریسک است که منجر به انتقال تمام یا بخشی از ریسک از بیمه‌گذار به بیمه‌گر می‌شود. بیمه‌نامه‌ها معمولاً به دو صورت بیمه زندگی و غیرزندگی دسته‌بندی می‌شوند. بر اساس این دسته‌بندی هر بیمه‌نامه‌ای که موضوع آن سلامت فرد یا افراد بیمه‌شده باشد، بیمه‌نامه زندگی در غیر این صورت بیمه‌نامه غیرزندگی خواهد بود. بسیاری از بیمه‌های موجود در صنعت بیمه، جزء بیمه‌های غیرزندگی طبقه‌بندی می‌شوند. بیمه‌های آتش‌سوزی، اتومبیل، مهندسی، باربری، نفت و انرژی از مصداق‌های این بیمه هستند. تبیین و محاسبه سه موضوع در مدل‌های ریسک اهمیت زیادی دارد: احتمال ورشکستگی، زمان ورشکستگی و مقدار ورشکستگی. در این مقاله نتایج اصلی و شناخته‌شده‌ای که تاکنون در زمینه بیمه‌های غیرزندگی به دست آمده است؛ با تأکید بر احتمال ورشکستگی، همراه با مثال‌های مختلف آورده می‌شود. امیدواریم که این مقاله بتواند منبع مفید و کاملی در این حوزه علمی فراهم کند. همچنین انگیزه‌ای برای محققین جهت رشد و ارتقاء مدل‌های آورده شده و نیز ارائه مدل‌های جدید باشد.

واژه‌های کلیدی: مدل ریسک کرامر-لاندبرگ، مدل ریسک اسپاراندروسون، فرایند پواسون ناهمگن، فرایند پواسون مرکب، احتمال ورشکستگی

۱ مقدمه

فرایند تصادفی سرمایه شرکت بیمه یا فرایند تصادفی ریسک به صورت زیر تعریف می‌شود:



شکل (۱-۱): فرایند ریسک

$$U(t) = u + Ct - S(t) \quad (1)$$

که در آن

همان‌طور که ضابطه $U(t)$ و شکل (۱-۱) نشان می‌دهد:

- متغیرهای تصادفی $Y_1, Y_2, \dots$ نمایانگر نقاط زمانی است که در

$U(0) = u$ سرمایه اولیه،

آنها خسارت رخ داده است.

- در فاصله Y_1 و Y_2 هیچ خسارتی رخ نداده است.

C عددی ثابت که نشان‌دهنده مقدار حق بیمه‌های دریافتی در

واحد زمان،

- اگر در یک لحظه تصادفی $T = Y_k$ یک خسارت رخ دهد، $U(t)$

$S(t)$ فرایند خسارت‌های کلی است.

به اندازه‌ی مقدار خسارت k ام کاهش می‌یابد.

- طبق شکل (۱-۱)، در لحظه $T = Y_2$ کل مقدار خسارت‌ها یعنی

در واقع Ct مقدار دریافت یا درآمد شرکت و $S(t)$ هزینه یا پرداختی

شرکت تا لحظه t است.

$x_1 + x_2 + x_3$ از مجموع $u + Ct$ بیشتر شده است، در نتیجه $U(Y_2) < 0$

که به این حالت ورشکستگی گفته می‌شود.

فرض کنیم $\{N(t) \geq 0\}_{t \geq 0}$ یک فرایند شمارشی برای تعداد

^۱ دانشگاه گیلان، دانشکده علوم ریاضی، گروه آمار. (نویسنده مسئول: samimi@guilan.ac.ir)

^۲ دانشگاه گیلان، دانشکده علوم ریاضی، گروه ریاضی محض

۳.۲ مدل ریسک پواسون آمیخته مرکب

همان‌طور که می‌دانید، این یک نقطه‌ضعف مدل پواسون مرکب است که توزیع همیشه دارای انحراف مثبت است. در عمل نیز اغلب معلوم می‌شود که مدل اجازه نوسان‌های کافی را نمی‌دهد. برحسب مثال $E(N(t)) = \text{var}(N(t))$. یک راه ساده برای اجازه دادن به نوسان‌های بیشتر این است که اجازه دهید پارامتر Λ تصادفی باشد. فرض کنید $H(\cdot)$ ، تابع توزیع Λ را نشان دهد:

$$P(N(t) = n) = E(P(N(t) = n | \Lambda)) = E\left(\frac{(\Lambda t)^n}{n!} e^{(-\Lambda t)}\right) \\ = \int_0^\infty \frac{(lt)^n}{n!} e^{(-lt)} dH(l)$$

فرایند تصادفی $S(t)$ را فرایند پواسون آمیخته مرکب و مدل (۱) را مدل پواسون آمیخته مرکب گویند.

برای مطالعه بیشتر مدل‌های ریسک به [۱۰]، مراجعه شود.

۳ احتمال ورشکستگی

در مدل (۱) فرایند سرمایه خسارت $\{R(t), t \geq 0\}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$R(t) = S(t) - Ct.$$

همچنین اگر قرار دهیم

$$T = \min\{t, t \geq 0; U(t) \leq 0\} = \min\{t, R(t) \geq u\},$$

T زمان ورشکستگی؛ یعنی اولین زمانی است که فرایند سرمایه ریسک منفی یا به طور معادل زمانی که فرایند سرمایه خسارت بیشتر از مقدار u می‌شود. ($T = \infty$) نشان می‌دهد که به ازای هر $t \geq 0$ ، $U(t) > 0$ ، یعنی، ورشکستگی هرگز اتفاق نمی‌افتد. بزرگ‌ترین مقدار $R(t)$ را برابر M قرار می‌دهیم؛ یعنی،

$$M = \max_{t \geq 0} R(t).$$

بنابراین داریم

$$M = \max_{t \geq 0} \left\{ \sum_{k=1}^{N(t)} (X_k - CT_k) \right\},$$

که در آن $T_1, T_2, \dots$ دنباله‌ای از متغیرهای مستقل و هم‌توزیع مثبت هستند و T_1 زمان انتظار برای رخ دادن اولین خسارت و برای $i \geq 2$ ، T_i فاصله زمانی بین خسارت $i-1$ ام و خسارت i ام است. احتمال ورشکستگی با سرمایه اولیه u به صورت زیر می‌باشد:

$$\psi(u) = P\{T < \infty\} = P(M > u)$$

خسارت‌ها باشد، به طوری که برای $t > 0$ متغیر تصادفی $N(t)$ نشان‌دهنده تعداد خسارت‌های رخ داده در فاصله زمانی $[0, t]$ است. مقادیر خسارت‌ها به صورت دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع $\{X_i\}_{i \geq 0}$ مدل‌سازی می‌شود که X_i مقدار خسارت i ام است. در این صورت مقدار خسارت کل تا زمان t که با $S(t)$ نشان داده می‌شود به صورت

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i, \quad (2)$$

می‌باشد.

۲ مدل‌های ریسک

۱.۲ مدل ریسک پواسون مرکب

در مدل (۲)، اگر $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ یک فرایند پواسون با نرخ Λ و $X_1, X_2, \dots$ یک نمونه تصادفی از توزیع نامنفی با تابع توزیع $F(\cdot)$ و میانگین μ و همچنین نمونه تصادفی و فرایند پواسون از هم مستقل باشند، فرایند تصادفی $S(t)$ را فرایند پواسون مرکب و مدل (۱) را مدل پواسون مرکب گویند.

۲.۲ مدل ریسک دوجمله‌ای مرکب

مدل ریسک دوجمله‌ای مرکب از مدل‌های زمان گسسته ریسک کلاسیک است. فرض کنید فاصله زمانی $(0, \infty)$ به صورت دوره‌های زمانی $[m-1, m]$ ، $m = 1, 2, 3, \dots$ چنان افراز شده باشد که در هر یک از این دوره‌ها حداکثر یک خسارت رخ دهد. وقوع و عدم وقوع خسارت در دوره‌های زمانی از هم مستقل و احتمال وقوع خسارت در هر یک از آن‌ها برابر p و احتمال عدم وقوع $q = 1-p$ است. اگر $N(m)$ تعداد خسارت‌ها تا لحظه m و $X_1, X_2, \dots$ دنباله مقدار خسارت‌ها باشد،

$$S(m) = \sum_{i=1}^{N(m)} X_i \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

مجموع خسارت‌ها تا لحظه m است که در آن $N(m)$ توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای (m, p) دارد.

فرض می‌کنیم

• فرایند تصادفی $\{N(m)\}_{m \geq 0}$ و دنباله $\{X_i\}_{i \geq 1}$ مستقل هستند.

• دنباله تصادفی $X_1, X_2, \dots$ مستقل و هم‌توزیع هستند.

فرایند تصادفی $S(m)$ را فرایند دوجمله‌ای مرکب و مدل (۱) را

مدل ریسک دوجمله‌ای مرکب گویند [۱۳].

هدف اصلی مدل لاندبرگ و تعمیم‌ها آن، تعیین احتمال ورشکستگی نهایی بود؛ یعنی احتمال اینکه سطح سرمایه بیمه‌گر به زیر صفر برسد، در نتیجه شرکت از نظر مالی ورشکسته شود. مدل لاندبرگ حدود ۳۰ سال بعد توسط هارالد کرامر^۴ (۱۹۳۰) بیم‌سنج و احتمال شناس مشهور سوئدی موردبررسی دقیق ریاضی قرار گرفت. به همین دلیل، این مدل را مدل کرامر-لاندبرگ (فرایند ریسک کلاسیک) نامیدند. کرامر به‌طور گسترده‌ای نظریه ریسک جمعی را که نظریه ورشکستگی نیز نامیده می‌شود، با استفاده از فرایند مبلغ کل خسارت $S(t)$ با ورودی‌های خسارت توزیع شده توسط پواسون گسترش داد. مدل کرامر-لاندبرگ به‌صورت

$$U(t) = u + Ct - \sum_{i=0}^{N(t)} X_i$$

ارائه شده است که در آن $U(t)$ دارایی شرکت بیمه در زمان t ،
 $U(0) = u$ دارایی یا سرمایه اولیه، C نرخ حق بیمه است. همچنین
 $\{X_i\}_{i \geq 1}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی نامنفی مستقل و هم‌توزیع با میانگین μ و با تابع توزیع $F_X(\cdot)$ که اندازه خسارت را نشان می‌دهد.
 $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ یک فرایند پواسون همگن با شدت Λ است که فرایند تعداد خسارت‌ها تا لحظه t را نشان می‌دهد. $\{X_i\}_{i \geq 1}$ و $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ مستقل هستند. در واقع $\sum_{i=0}^{N(t)} X_i$ (که معمولاً با $S(t)$ نشان داده می‌شود) یک فرایند پواسون مرکب است که کل خسارت‌های وارده به شرکت بیمه تا لحظه t را نشان می‌دهد. احتمال ورشکستگی در مدل ریسک کرامر-لاندبرگ به‌صورت معادله دیفرانسیلی-انتگرالی، تبدیل لاپلاس، کران‌های لاندبرگ و تقریب کرامر-لاندبرگ محاسبه می‌شود.

۱.۴ معادله دیفرانسیلی-انتگرالی

در این بخش احتمال بقا، $\bar{\psi}(u) = 1 - \psi(u)$ را مطالعه می‌کنیم. در مرجع [۹] نشان داده شده که $\bar{\psi}$ در همه جا روی $\mathbf{R}^+$ به‌جز روی حداکثر مجموعه‌ای از نقاط نامتناهی شمارا مشتق‌پذیر است. علاوه بر این نشان داده می‌شود که $\bar{\psi}$ در معادله دیفرانسیلی-انتگرالی صدق می‌کند.

قضیه ۱.۴. تابع بقا $\bar{\psi}(u)$ روی $\mathbf{R}^+$ پیوسته است و در معادله زیر صدق می‌کند:

$$C\bar{\psi}'_+(u) = \Lambda(\bar{\psi}(u) - \int_0^u \bar{\psi}(u-x)dF_X(x))$$

و

$$C\bar{\psi}'_-(u) = \Lambda(\bar{\psi}(u) - \int_0^{u-} \bar{\psi}(u-x)dF_X(x))$$

³Lundberg Filip

⁴Cramer Harald

در عمل اکثر بیمه‌گران تنها در یک دوره‌ی طولانی ولی متناهی مثلاً ۱۰ سال به محاسبه ورشکستگی علاقه‌مند هستند. احتمال ورشکستگی در زمان متناهی به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\psi(u, t) = P(T < t),$$

یعنی احتمال اینکه قبل از زمان t ورشکستگی رخ دهد. در ادامه راجع به احتمال ورشکستگی در یک افق نامتناهی، $\psi(u)$ ، بحث خواهیم کرد که از لحاظ ریاضی منعطف‌تر است. $\psi(u)$ کران بالا برای $\psi(u, t)$ است. $\bar{\psi}(u) = 1 - \psi(u)$ احتمال عدم وقوع ورشکستگی با سرمایه اولیه u است. این احتمال با عنوان احتمال بقا نیز شناخته می‌شود. بدیهی است که اگر $E(X - CT) > 0$ آنگاه شرکت با احتمال ۱ ورشکسته خواهد شد. چون این رابطه بدین معناست که پرداختی شرکت (اندازه خسارت) به‌طور متوسط، بیشتر از دریافتی شرکت (حق بیمه) است. همچنین نشان داده می‌شود که در حالت $E(X - CT) = 0$ نیز احتمال ورشکستگی برابر یک است [۸]. بنابراین برای محاسبه احتمال ورشکستگی همواره فرض می‌شود:

$$E(X) < CE(T),$$

که به آن، شرط سود خالص می‌گویند. احتمال ورشکستگی معیار مهمی جهت بررسی ریسک مالی یک شرکت بیمه است.

بخش‌بندی ادامه مقاله به‌صورت زیر است: بخش ۴ به مدل ریسک کلاسیک کرامر-لاندبرگ می‌پردازد. در زیربخش‌های آن روش‌های مختلف برای محاسبه احتمال ورشکستگی آمده است. در بخش ۵ مدل ریسک اسپاراندروسون، بخش ۶ مدل ریسک فرایند پواسون ناهمگن، بخش ۷ مدل ریسک فرایند کاکس، بخش ۸ مدل ریسک کرامر-لاندبرگ با حق بیمه‌های تصادفی و بخش ۹ شامل ریسک اسپاراندروسون با حق بیمه‌های تصادفی است. در بخش پایانی طی دو مثال احتمال ورشکستگی در مدل‌های مختلف محاسبه و با یکدیگر مقایسه می‌شوند.

۴ مدل ریسک کرامر-لاندبرگ

مبانی نظریه ریسک که به‌عنوان مدل کرامر-لاندبرگ (مدل ریسک پواسون مرکب، فرایند ریسک کلاسیک یا فرایند ریسک پواسون) شناخته شده است، توسط بیم‌سنج سوئدی فیلیپ لاندبرگ^۳ در سال ۱۹۰۳ معرفی شد. یکی از مشارکت‌های اصلی لاندبرگ، معرفی یک مدل ساده بود که قادر به توصیف پویایی یک سبد سهام بیمه همگن باشد.

که در آن $\bar{\psi}'_+(u)$ و $\bar{\psi}'_-(u)$ به ترتیب مشتق‌های راست و چپ تابع $\bar{\psi}(u)$ و $F_X(\cdot)$ تابع توزیع اندازه خسارت است.

برهان. به صفحه ۱۶۲ در [۹] مراجعه کنید.

از نتایج قضیه ۱۰۴ این است که $\bar{\psi}(u)$ همه‌جا مشتق‌پذیر است، به‌جز در مجموعه شمارا که در آن $F_X(\cdot)$ پیوسته نیست. اهمیت این نتیجه در این است که

$$\int_0^\infty \bar{\psi}'(v)dv = \bar{\psi}(u).$$

در نظریه اندازه این بدان معناست که $\bar{\psi}(u)$ نسبت به اندازه لبگ پیوسته مطلق است. [۱۱]

مثال ۲۰۴. احتمال ورشکستگی مدل کرامر-لاندبرگ به کمک معادله دیفرانسیلی-انتگرالی با فرض نمایی بودن توزیع خسارت‌ها با میانگین μ به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\psi(u) = \frac{\Lambda}{C\mu} \exp\left(-\left(\mu - \frac{\Lambda}{C}\right)u\right). \quad (۳)$$

در حالت کلی معادله دیفرانسیلی-انتگرالی قضیه ۱۰۴ قابل حل نیست؛ زیرا هم‌زمان دارای انتگرال و مشتق $\bar{\psi}(u)$ است؛ بنابراین به کمک روش‌های عددی باید حل شود.

۲۰۴ تبدیلات لاپلاس

در این بخش، تبدیلات لاپلاس را محاسبه می‌کنیم. قرار می‌دهیم:

$$\hat{L}_{\psi}(s) = \int_0^\infty \psi(u)e^{-su}du,$$

$$\hat{L}_{\bar{\psi}}(s) = \int_0^\infty \bar{\psi}(u)e^{-su}du.$$

توجه می‌کنیم که هر دو انتگرال به ازای $s \geq 0$ متناهی هستند. علاوه بر این داریم:

$$\hat{L}_{\psi(s)} = \int_0^\infty (1 - \bar{\psi}(u))e^{-su}du = \frac{1}{s} - \hat{L}_{\bar{\psi}(s)}.$$

قضیه ۳۰۴. تبدیلات لاپلاس $\hat{L}_{\psi}(s)$ و $\hat{L}_{\bar{\psi}}(s)$ با استفاده از روابط زیر به دست می‌آیند:

$$\hat{L}_{\bar{\psi}(s)} = \frac{C - \Lambda\mu}{Cs - \Lambda(1 - \hat{L}_X(s))}$$

و

$$\hat{L}_{\psi}(s) = \frac{1}{s} - \frac{C - \Lambda\mu}{Cs - \Lambda(1 - \hat{L}_X(s))},$$

که در آن $\hat{L}_X(\cdot)$ تبدیل لاپلاس X اندازه خسارت است.

برهان. به صفحه ۱۶۵ در [۹] مراجعه کنید.

برای مثال ۲۰۴، با استفاده از قضیه ۳۰۴، داریم

$$\begin{aligned} \hat{L}_{\bar{\psi}(s)} &= \frac{C - \Lambda\mu}{Cs - \Lambda(1 - \frac{\mu}{\mu+s})} \\ &= \frac{(C - \Lambda\mu)(\mu + s)}{s(C(\mu + s) - \Lambda)} \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} \hat{L}_{\psi}(s) &= \frac{1}{s} - \frac{C - \Lambda\mu}{Cs - \Lambda(1 - \frac{\mu}{\mu+s})} \\ &= \frac{(C - \Lambda\mu)(\mu + s)}{s(C(\mu + s) - \Lambda)} \\ &= \frac{\Lambda}{\mu C} \left(\frac{1}{\mu - \frac{\Lambda}{C} + s} \right). \end{aligned}$$

با استفاده از وارون تبدیل لاپلاس داریم:

$$\psi(u) = \frac{\Lambda}{\mu C} \exp\left(-\left(\mu - \frac{\Lambda}{C}\right)u\right),$$

که همان مقدار قبلی در (۳) است. اگرچه معادله انتگرالی راحت‌تر از معادله دیفرانسیلی-انتگرالی است، اما به‌طورکلی مشکل است که به‌صورت شکل بسته حل شود. با این وجود معادله انتگرالی منجر به فرمولی برای $\psi(u)$ در شکل سری‌های نامتناهی پیچش می‌شود. در این ارتباط نیاز به توزیع دمی یکپارچه F_X^s از F_X داریم. به‌صورت زیر داده می‌شود:

$$F_X^s(x) = \frac{1}{\mu} \int_0^x \bar{F}_X(y)dy,$$

که در آن $\bar{F}_X(\cdot) = 1 - F_X(\cdot)$

قضیه پولاسزک-خنچین^۵ روش دیگری برای محاسبه $\psi(u)$ است.

قضیه ۴۰۴. برای هر $u \geq 0$

$$\psi(u) = \left(1 - \frac{\Lambda\mu}{C}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\Lambda\mu}{C}\right)^n \overline{(F_X^s)^{*n}}(u),$$

که در آن $(F_X^s)^{*n}(\cdot)$ تابع پیچش از مرتبه n تابع $F_X^s(\cdot)$ است.

برهان. به صفحه ۱۶۷ در [۹] مراجعه کنید.

⁵ formula Pollaczek-Khinchin

۳.۴ کران‌های لاندبرگ

قضیه ۶.۴. فرض کنیم γ ضریب تعدیل، موجود باشد. آنگاه

$$a_- e^{-\gamma u} \leq \psi(u) \leq a_+ e^{-\gamma u},$$

به‌طوری‌که

$$a_+ = \sup_{x \in [0, x_0)} \frac{e^{\gamma x} \int_x^\infty \overline{F_X}(y) dy}{\int_x^\infty e^{\gamma y} \overline{F_X}(y) dy},$$

$$a_- = \inf_{x \in [0, x_0)} \frac{e^{\gamma x} \int_x^\infty \overline{F_X}(y) dy}{\int_x^\infty e^{\gamma y} \overline{F_X}(y) dy}.$$

که در آن $x_0 = \sup\{x; F_X(x) < 1\}$

برهان. به صفحه ۱۷۱ در [۹] مراجعه کنید.

نتایج قضیه ۴.۶ در نظریه ریسک به کران‌های دوطرفه لاندبرگ برای تابع ورشکستگی $\psi(u)$ معروف است.

۴.۴ تقریب کرامر-لاندبرگ

در بخش ۳.۴ کران‌های بالایی و پایینی را برای تابع $\psi(u)$ پیدا کردیم. حال علاقه‌مند به رفتارهای مجانبی $\psi(u)e^{\gamma u}$ هستیم. سؤال این است که آیا $\psi(u)e^{\gamma u}$ همگرا به یک حد است یا بین دو کران نوسان می‌کند. می‌توان نشان داد که $\lim_{u \rightarrow \infty} \psi(u)e^{\gamma u}$ موجود است. مقدار آن در قضیه زیر داده شده است.

قضیه ۷.۴. فرض کنیم $\gamma > 0$ ضریب تعدیل، موجود باشد. اگر $M'_X(\gamma) < \infty$ ، آنگاه

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \psi(u)e^{\gamma u} = \frac{C - \Lambda\mu}{\mu M'_X(\gamma) - C}.$$

و اگر $M'_X(\gamma) = \infty$ ، آنگاه

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \psi(u)e^{\gamma u} = 0,$$

که در آن X اندازه خسارت، $E(X) = \mu$ ، $M_X(\cdot)$ تابع مولدگشتاور، Λ نرخ ورود خسارت و C نرخ حق بیمه است.

برهان. به صفحه ۱۷۲ در [۹] مراجعه کنید.

۵ مدل ریسک اسپار اندرسون (تجدید)

مدل اسپار اندرسون تعمیمی از مدل کلاسیک است. در این مدل، فرایند ورود خسارت‌ها از یک فرایند تجدید پیروی می‌کند. همانند مدل کلاسیک فرض کنید C نرخ حق بیمه و $\{X_i\}_{i \geq 1}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع و مثبت، نشان‌دهنده خسارت‌های وارده به شرکت باشد. فرایند ورود خسارت‌ها، فرایند تجدید دلخواه با ورودی‌های $\sigma_1, \sigma_2, \dots$ و بین ورودی‌ها $T_1, T_2, \dots$ است که دنباله

$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$ مجموع خسارت‌ها تا لحظه t می‌باشد و $N(t)$ دارای توزیع پواسون با پارامتر Λ است. فرایند

$$R(t) = S(t) - Ct$$

فرایند پواسون انتقال‌یافته است که در صفحه ۱۷۰ مرجع [۹]، استفاده شده است.

از آنجاکه مقدار خسارت $R(t)$ در زمان $t \geq 0$ دارای توزیع پواسون مرکب انتقال‌یافته با مشخصه‌های $(\Lambda t, F_X(\cdot))$ و انتقال آن روی $-Ct$ است، تابع مولدگشتاور آن برابر زیر است

$$M_{R(t)}(s) = E(e^{sR(t)}) = e^{t(\Lambda(M_X(s) - 1) - Cs)}.$$

اگر $M_X(s)$ در یک همسایگی صفر موجود و مشتق مرتبه اول و دوم داشته باشد، آنگاه تابع

$$\theta(s) = (\Lambda(M_X(s) - 1) - Cs),$$

در یک همسایگی صفر موجود و مشتق اول و دوم دارد و

$$\theta'(s) = \Lambda M'_X(s) - C,$$

$$\theta''(s) = \Lambda M_X(s)^2 = \Lambda E(X^2 e^{sX}) > 0,$$

که نشان می‌دهد $\theta(s)$ یک تابع محدب است. همچنین برای $\theta'(s)$ در $s = 0$ داریم:

$$\theta'(0) = \Lambda M'_X(0) - C = \Lambda\mu - C < 0.$$

به آسانی دیده می‌شود $\theta(0) = 0$. علاوه بر این ممکن است ریشه دوم معادله $\theta(s) = 0$ نیز وجود داشته باشد. اگر یک ریشه مخالف صفر وجود داشته باشد، آنگاه یکتا و مثبت است و جواب معادله در صورت وجود ضریب تعدیل یا توان لاندبرگ نامیده می‌شود. برای جزییات بیشتر به [۹] مراجعه شود.

لم زیر، شرط وجودی ضریب تعدیل را بیان می‌کند.

لم ۵.۴. فرض کنیم $s_\infty \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ موجود باشد، به‌طوری‌که اگر $M_X(s) < 0$ ، $s < s_\infty$ و $\lim_{s \rightarrow s_\infty} M_X(s) = \infty$ آنگاه یک جواب مثبت یکتا برای معادله $\theta(s) = 0$ وجود دارد.

برهان. به صفحه ۱۷۰ در [۹] مراجعه کنید.

وجود ضریب تعدیل به این علت مهم است که اجازه می‌دهد کران‌های بالایی و پایینی نمایی برای تابع $\psi(u)$ یکنواخت باشد.

$T_1, T_2, \dots$ متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع و مثبت، نشان‌دهنده زمان بین خسارت‌های متوالی است. داریم

$$\sigma_1 = T_1,$$

$$\sigma_2 = T_1 + T_2,$$

$$\vdots$$

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^n T_i,$$

$$N(t) = \max\{n : \sum_{i=1}^n T_i \leq t\}.$$

به‌طور مشابه مدل کلاسیک، همه نمادها و مفاهیم مانند $S(t)$ ، $U(t)$ ، احتمال ورشکستگی و زمان ورشکستگی، در اینجا نیز تعریف می‌شود. با به‌کارگیری قضیه بعدی، احتمال ورشکستگی در مدل اسپار اندرسون را می‌توان در حالت خاص به دست آورد.

قضیه ۱۰۵. اگر X اندازه خسارت دارای توزیع نمایی با پارامتر θ ($E(X) = \frac{1}{\theta}$) باشد آنگاه با شرط سود خالص؛ یعنی $E(X - CT) < 0$ داریم

$$\psi(u) = (1 - \frac{\gamma}{\theta})e^{-\gamma u}, \quad (4)$$

که در آن γ ریشه مثبت معادله

$$M_{X-CT}(s) = 1 \quad (5)$$

است.

برهان. به صفحه ۲۵۱ در [۹] مراجعه کنید.

مثال ۲۰۵. فرض کنید اندازه خسارت توزیع نمایی با پارامتر $\theta = 1$ و $C = 2$ و توزیع زمان بین دو خسارت متوالی $T \sim \text{Erlang}(2, 1)$ باشد، در این صورت با استفاده از قضیه ۱۰۵، داریم

$$\psi(u) = (1 - \frac{\sqrt{3}}{2})e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}u}.$$

۶ مدل ریسک فرایند پواسون ناهمگن

تعریف ۱۰۶. فرایند تصادفی $N = \{N_t\}_{t \geq 0}$ یک فرایند پواسون ناهمگن است، هرگاه

(الف) $N(0) = 0$ (ب) فرایند دارای نمو مستقل باشد. (پ) تابع غیر نزولی و از سمت راست پیوسته

$$\mu : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty),$$

وجود داشته باشد به‌طوری‌که $\mu(0) = 0$ و برای هر $s < t$ ، $N(s, t]$ دارای توزیع پواسون با پارامتر $(\mu(t) - \mu(s))$ باشد. μ را تابع میانگین فرایند گویند که در آن $\mu(t) = \int_0^t \Lambda(s) ds$ (ت) مسیرهای فرایند با احتمال ۱ از راست پیوسته و از چپ دارای حد باشند. به این خاصیت کادلگ^۶ گویند.

تابع $\Lambda(\cdot)$ را تابع شدت یک فرایند تصادفی پواسون ناهمگن با تابع میانگین $\mu(\cdot)$ گویند هرگاه

$$\mu(t) = \int_0^t \Lambda(s) ds$$

و

$$\mu(t) - \mu(s) = \int_s^t \Lambda(s) ds.$$

فرایند پواسون همگن حالت خاص از فرایند پواسون ناهمگن است که در آن $\mu(t) = \Lambda t$. این مدل در معرفی احتمال ورشکستگی زمان متناهی به‌صورت معادله انتگرالی والترا^۷ داده‌شده است. در این حالت کلاس فرایند پواسون همگن به فرایند پواسون ناهمگن، با معرفی مفهوم عدم همگنی بسط داده می‌شود. این حالت اجازه نرخ ورود زمان وابسته را می‌دهد. برای مثال موقعیتی که زمان‌های ورود خسارت وابسته به زمانی از سال است. فرایند شمارش خسارت متناظر $\{N_t\}_{t \geq 0}$ نمو مستقل دارد اما نمو‌های مانا ندارد. همانند مدل ریسک کلاسیک، فرض می‌کنیم که شدت خسارت‌ها هم‌توزیع و مستقل با تابع توزیع تجمعی F_X هستند که مستقل از زمان و با میانگین متناهی μ می‌باشند. فرایند سرمایه ریسک روی بازه زمانی $[\tau, \tau + t]$ برای مدل پواسون مرکب ناهمگن مرکب به‌صورت زیر می‌باشد:

$$U[\tau, \tau + t] = u + Ct - \sum_{i=0}^{N[\tau, \tau + t]} X_i,$$

که در آن

$U[\tau, \tau + t]$ دارایی یا سرمایه شرکت بیمه در بازه زمانی $[\tau, \tau + t]$ ، $U(0) = u$ سرمایه اولیه، C نرخ حق بیمه، Ct میزان درآمد حق بیمه دریافتی توسط بیمه‌گر تا زمان t است. $\{X_i\}_{i \geq 1}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی نامنفی مستقل و هم‌توزیع با تابع توزیع F_X که اندازه خسارت را نشان می‌دهد. $N[\tau, \tau + t]$ فرایند شمارش خسارت،

^۶Cadlag

^۷Volterra

پواسون ناهمگن با تابع شدت Λ است. $\bullet N[\tau, \tau + t)$ و دنباله تصادفی به صورت زیر نمایش داده می شود:

$$U_{[\circ, t)}(u) = u + Ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i \quad \{X_i\}_{i \geq 1} \text{ مستقل هستند. قرار می دهیم}$$

$$T_\tau(u) = \inf\{t \geq \circ; U[\tau, \tau + t) < \circ\},$$

$$= u + C[t] + C(t - [t]) - \sum_{k=1}^{[t]} \sum_{i=1}^{M(k)} X_i^k - \sum_{i=1}^{N(t-[t])} X_i^{[t]+1}$$

$$= u + \sum_{k=1}^{[t]} (C - \sum_{i=1}^{M(k)} X_i^k) + C(t - [t]) - \sum_{i=1}^{N(t-[t])} X_i^{[t]+1}$$

که زمان ورشکستگی برای فرایند دارایی با مقدار اولیه u در زمان اولیه τ را نشان می دهد.

احتمال ورشکستگی قبل از زمان $t + \tau$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$\psi[\tau, \tau + t)(u) = P(T_\tau(u) \leq t)$$

$$= P(U[\tau, \tau + s)(u) < \circ; \circ < s \leq t).$$

احتمال ورشکستگی نهایی با مقدار اولیه u و زمان اولیه τ برابر

$$\psi(\tau, u) = \lim_{t \rightarrow \infty} \psi[\tau, \tau + t)(u)$$

است. ملاحظه می شود که این احتمال نه تنها وابسته به مقدار اولیه u و زمان متناهی دوره t است بلکه به زمان اولیه τ نیز وابسته است.

۱۰۶ معادله انتگرالی ولترا

قضیه ۲۰۶. احتمال ورشکستگی تا زمان t ، با شروع از سرمایه اولیه u و زمان اولیه τ در معادله زیر صدق می کند:

$$\psi[\tau, \tau + t)(u) = \int_0^t \Lambda(\tau + v) \exp^{-\mu(\tau + t) - \mu(\tau)} (1 - F_X(u + Cv)) dv$$

$$+ \int_0^t \Lambda(\tau + v) \exp^{-\mu(\tau + t) - \mu(\tau)}$$

$$* \int_0^{u+Cv} \psi[\tau + v, \tau + t)(u + Cv - y) dF_X(y) dv.$$

برهان. به صفحه ۲۲ در [۱۲] مراجعه کنید.

۲۰۶ مدل ریسک گسسته نشانیده

حل تحلیلی معادله انتگرالی فوق حتی در حالت اندازه خسارت نمایی دشوار است. حالت خاصی که تابع شدت Λ متناوب با دوره تناوب ۱ است را در نظر می گیریم. همانند مورد کلاسیک، کران دوطرفه برای احتمال ورشکستگی، $\psi_{[\circ, t)}$ را برای مدل ریسک گسسته نشانیده می توان به دست آورد. فرایند دارایی $U_{[\circ, t)}(u)$ با زمان اولیه صفر

که در آن $\bullet t - [t] \in [\circ, 1) \bullet$ دنباله های مستقل از متغیرهای تصادفی هم توزیع و مستقل در دوره k برای $k = 1, 2, 3, \dots$ با تابع توزیع اندازه خسارت مشترک هستند.

$\bullet M(k)$ و $N(t - [t])$ متغیرهای پواسون مستقل، به ترتیب با پارامتر $\mu(1)$ و $\mu(t - [t])$ هستند. $\bullet M(k)$ و $N(t - [t])$ مستقل از X_i^k هستند. قرار می دهیم

$$U_k = C - \sum_{i=1}^{M(k)} X_i^k, k = 1, 2, \dots,$$

$$U_\circ = u.$$

$\sum_{i=1}^{M(k)} X_i^k$ برای $k = 1, 2, \dots$ مجموع خسارت ها در طول k امین دوره است که از پواسون مرکب با پارامتر $\mu(1)$ پیروی می کند؛ بنابراین، دنباله متغیرهای تصادفی $\{U_k\}_{k \geq \circ}$ مستقل و هم توزیع با تابع مولد گشتاور مشترک زیر هستند.

$$M_U(r) = e^{rC - \mu(1)(M_X(r) - 1)}.$$

حال، قدم زدن تصادفی $\{(k, S_k(u)); k \geq \circ\}$ یا فرایند دارایی زمان گسسته را در نظر می گیریم که به صورت

$$S_k(u) = U_\circ + U_1 + U_2 + \dots + U_k,$$

تعریف می شود. قرار می دهیم

$$\tilde{T}(u) = \inf\{k \geq \circ; S_k(u) < \circ\}$$

اولین زمان عبور از مقدار منفی با مقدار اولیه u در زمان صفر (زمان ورشکستگی در مدل ریسک زمان گسسته). قرار می دهیم

$$\tilde{\psi}(u, k) = P(\tilde{T}(u) \leq k)$$

که نشان دهنده احتمال متناهی بودن زمان ورشکستگی با سرمایه اولیه u است؛ یعنی گام برداری تصادفی متناظر در طی k گام به یک مقدار منفی برسد.

از آنجایی که $U_{[\circ, t)}$ و $S_t(u)$ در اعداد صحیح t با هم مرتبط هستند؛ یعنی

$$U_{[\circ, t)} = S[t](u), \quad t \geq \circ,$$

برای مثال، همگنی جریان پواسون خسارت‌ها، ناگزیر مستلزم ثابت بودن پرتغوی است. در عین حال، از نقطه نظر عملی، این وضعیت نسبتاً غیرواقعی به نظر می‌رسد زیرا همیشه باید امکان تشدید یا محدود کردن تجارت بیمه را در نظر بگیریم. بنابراین، به این ضرورت می‌رسیم که نوسانات پرتغوی و نوسانات نرخ حقیقه را در نظر بگیریم. از طرف دیگر باید نوسانات شدت خسارت‌ها را نیز فرض کنیم. به عنوان مثال، در بیمه خودرو یا بیمه آتش‌سوزی، تغییرات فصلی شدت خسارت به وضوح مشاهده می‌شود؛ بنابراین، مطالعه نوسانات ریسک ضروری است. یک مدل مناسب برای محاسبه نوسانات ریسک، مدل کاکس مرکب با میانگین غیر صفر است. فرایند کاکس تعمیم فرایند پواسون ناهمگن است؛ یعنی علاوه بر اینکه تابع شدت در هر لحظه t به مقدار t بستگی دارد، تصادفی نیز است؛ به عبارت دیگر تابع شدت و تابع میانگین آن یک فرایند تصادفی است. به تابع میانگین، تابع شدت تجمعی نیز گفته می‌شود. به طور مشخص فرض کنید $\{\Lambda(t)\}_{t \geq 0}$ یک فرایند تصادفی نامنفی با مسیرهای انتگرال‌پذیر است. همچنین قرار دهید

$$\mu(a, b] = \int_a^b \Lambda(s) ds$$

و

$$\mu(t) = \int_0^t \Lambda(s) ds.$$

تعریف ۱.۷. فرایند شمارشی $N = \{N(t)\}_{t \geq 0}$ یک فرایند کاکس با فرایند شدت $\Lambda = \{\Lambda(t)\}_{t \geq 0}$ و فرایند شدت تجمعی $\mu = \{\mu(t)\}_{t \geq 0}$ است، هرگاه برای مقادیر دلخواه صحیح و نامنفی $k_1, k_2, \dots, k_n$ و

$$a_1 < b_1 \leq a_2 \leq b_2 \leq \dots \leq a_n < b_n,$$

داشته باشیم

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n \{N(a_i, b_i] = k_i\}\right) = E\left(\prod_{i=1}^n \frac{(\int_{a_i}^{b_i} \Lambda(s) ds)^{k_i}}{k_i!} e^{-\int_{a_i}^{b_i} \Lambda(s) ds}\right).$$

بنابراین برای هر t ، $N(t)|\mu(t)$ توزیع پواسون با پارامتر $\mu(t)$ دارد.

در حالت کلی $\mu(t)$ تعداد نقاط در فاصله $(0, t]$ در فرایند نقطه‌ای $N = \{N_t\}_{t \geq 0}$ است که خود تصادفی است و به t وابسته است. اگر در فرایند کاکس تابع شدت یک متغیر تصادفی باشد و به t بستگی نداشته باشد، فرایند را فرایند پواسون آمیخته گویند؛ بنابراین اگر برای یک متغیر تصادفی مثل X و برای هر $s \geq 0$ داشته باشیم $\Lambda(s) = X$ ، در این صورت $\mu(t) = tX$.

می‌توان از زمان ورشکستگی مدل ریسک گسسته نشانیده برای نزدیک شدن به زمان ورشکستگی مدل ریسک زمان پیوسته اصلی با فرایند شمارش خسارت‌های دوره‌ای فرایند پواسون ناهمگن استفاده کرد. یک نتیجه اساسی در قضیه زیر آمده است:

قضیه ۳.۶. زمان ورشکستگی مدل ریسک زمان پیوسته به طور تصادفی معادل زمان مربوط به ورشکستگی برای مدل گسسته نشانیده است، در حالتی که نامساوی‌های زیر برقرار باشند:

$$P\{\tilde{T}(u > [t] + 1)\} \leq P\{T_*(u) > t\} \leq P\{\tilde{T}(u) > [t]\},$$

به عبارت دیگر، برای احتمال ورشکستگی $\psi_{[\cdot, t)}(u)$ نامساوی زیر برقرار است:

$$\tilde{\psi}(u, [t]) \leq \psi_{[\cdot, t)}(u) \leq \tilde{\psi}(u, [t] + 1).$$

برهان. به صفحه ۲۶ در [۱۲] مراجعه کنید.

همان‌طور که در نامساوی اخیر در قضیه ۳.۶ نشان داده شده است یک کران دوطرفه برای احتمال ورشکستگی زمان متناهی $\psi_{[\cdot, t)}$ توسط احتمال ورشکستگی زمان متناهی متوالی متناظر برای مدل ریسک نشانیده، داده می‌شود. علاوه بر این، احتمال ورشکستگی زمان متناهی $\tilde{\psi}(u, k)$ در معادله بازگشتی زیر صدق می‌کند:

$$\tilde{\psi}(u, k+1) = 1 - F_U(u+C) + \int_0^{u+C} \tilde{\psi}(u+C-y, k) dF_U(y),$$

تحت شرط مرزی

$$\tilde{\psi}(u, 0) = 0, \quad u \geq 0.$$

که F_U تابع توزیع تجمعی مشترک U_k می‌باشد. همچنین می‌توان نشان داد [۱۲] که یک کران پایین برای احتمال ورشکستگی

$$\psi_*(u) = \lim_{t \rightarrow \infty} \psi_{[\cdot, t)}(u),$$

برابر

$$\psi_*(u) \geq \frac{e^{-\tilde{\gamma}u}}{E(e^{-\tilde{\gamma}S_{\tilde{T}(u)}} | \tilde{T}(u) < \infty)},$$

می‌باشد که در آن $\tilde{\gamma}$ ریشه مثبت معادله زیر است:

$$\mu(1)(M_X(r) - 1) - Cr = 0.$$

۷ مدل ریسک فرایند کاکس

مدل کرامر-لاندبرگ به نتایج بسیار خوب و عمیقی منجر می‌شود. با این حال، قدرت این نتایج به دلیل مفروضات نسبتاً قوی مدل است.

که فرایندهای $\{N(t)\}$ و $\{\mu(t)\}$ مستقل از متغیرهای تصادفی هم توزیع و مستقل $X_1, X_2, \dots$ هستند. فرایند فوق، یک فرایند ریسک کاکس تعمیم یافته نامیده می شود که توسط دنباله $\{X_j\}_{j \geq 0}$ ایجاد شده و توسط فرایند $\mu(t)$ کنترل می شود.

در [۲] ویژگی های مجانبی فرایند ریسک کاکس تعمیم یافته آمده است.

۸ مدل ریسک کرامر-لاندبرگ با حق بیمه های تصادفی

این مدل در مقاله [۳] معرفی و احتمال بقا آن به صورت معادله انتگرالی داده شده است. در این مدل حالتی بررسی می شود که علاوه بر اینکه ورود خسارت ها یک فرایند پواسون است، فرایند ورود حق بیمه ها نیز از یک فرایند پواسون پیروی می کند. مدل سرمایه زیر را در نظر می گیریم:

$$U(t) = u + \sum_{i=1}^{N_1(t)} X_i - \sum_{i=1}^{N_2(t)} Y_i, \quad (7)$$

که در آن

- $\{X_i\}$ دنباله ای از متغیرهای تصادفی نامنفی مستقل و هم توزیع با میانگین μ_1 و تابع توزیع F_X که اندازه حق بیمه ها را نشان می دهد.
- $N_1(t)$ یک فرایند پواسون همگن با شدت Λ_1 است که فرایند تعداد حق بیمه ها است.

- $\{X_i\}_{i \geq 1}$ و $\{N_1(t)\}_{t \geq 0}$ مستقل هستند.

- $\sum_{i=0}^{N_1(t)} X_i$ (معمولاً با $S_1(t)$ نشان داده می شود) یک فرایند پواسون مرکب است که کل حق بیمه های وارده به شرکت بیمه تا لحظه t را نشان می دهد.

- $\{Y_i\}$ دنباله ای از متغیرهای تصادفی نامنفی مستقل و هم توزیع با میانگین μ_2 و تابع توزیع G_Y که اندازه خسارت ها را نشان می دهد.
- $N_2(t)$ یک فرایند پواسون همگن با شدت Λ_2 است که فرایند تعداد خسارت ها است.

- $\{Y_i\}$ و $\{N_2(t)\}_{t \geq 0}$ مستقل هستند.

- $\sum_{i=0}^{N_2(t)} Y_i$ (معمولاً با $S_2(t)$ نشان داده می شود) یک فرایند پواسون مرکب است که کل خسارت های وارده به شرکت بیمه تا لحظه t را نشان می دهد.

مثال ۲۰۷. فرض کنید $N = \{N_t\}_{t \geq 0}$ یک فرایند پواسون آمیخته باشد که در آن Λ ، تابع شدت، توزیع گاما با پارامتر (α, β) دارد. در این صورت توزیع $N(t)$ را به صورت زیر می توان به دست آورد:

$$\begin{aligned} P(N(t) = k) &= \int_0^\infty P(N(t) = k | \Lambda = x) f_\Lambda(x) dx \\ &= \int_0^\infty \frac{e^{-xt} (tx)^k}{k!} \frac{1}{\Gamma(\alpha) \beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}} dx \\ &= \frac{t^k \Gamma(k + \alpha)}{\Gamma(\alpha) \beta^\alpha k! (t + \frac{1}{\beta})^{k+\alpha}} \\ &\quad * \int_0^\infty \frac{(t + \frac{1}{\beta})^{k+\alpha}}{\Gamma(k + \alpha)} x^{k+\alpha-1} e^{-x(t + \frac{1}{\beta})} dx \\ &= \frac{\Gamma(k + \alpha) (\beta t)^k}{k! \Gamma(\alpha) (1 + \beta t)^{k+\alpha}} \\ &= \binom{k + \alpha - 1}{k} \left(\frac{\beta t}{1 + \beta t} \right)^k \left(1 - \frac{\beta t}{1 + \beta t} \right)^\alpha. \end{aligned}$$

بنابراین $N(t)$ توزیع دوجمله ای منفی با پارامتر $(\alpha, \frac{\beta t}{1 + \beta t})$ است.

حال با استفاده از فرایند کاکس فرایند ریسک کلاسیک را تعمیم می دهیم. فرض کنیم $\{N_1(t)\}_{t \geq 0}$ فرایند پواسون استاندارد و $\mu(t)$ برای $t \geq 0$ یک اندازه تصادفی مستقل از $N_1(t)$ باشد. قرار می دهیم

$$N(t) = N_1(\mu(t)), t \geq 0.$$

$\{N(t)\}_{t \geq 0}$ فرایند کاکس با تابع شدت تجمعی $\mu(t)$ است [۱۲، ۹]. همچنین فرض کنید $\{X_j\}_{j \geq 0}$ دنباله ای از متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع باشد که مستقل از فرایند $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ است. فرایند ریسک زیر را در نظر می گیریم

$$U(t) = u + Ct - \sum_{j=1}^{N(t)} X_j. \quad (6)$$

مدل (۶) ویژگی غیر ثابت و حتی تصادفی شدت پرداخت های بیمه را تحت نرخ ثابت حق بیمه در نظر می گیرد. رفتارهای مجانبی فرایند ریسک مدل (۶) در [۲] آمده است.

درعین حال، معلوم می شود که با فرض احتمال نوسانات ریسک، از نظر عملی ثابت ماندن نرخ حق بیمه نسبتاً غیر منطقی است. مثال قانع کننده در [۷، ۵] آمده است. بنابراین، به طور طبیعی به تعمیم زیر از فرایند ریسک کلاسیک می رسم.

فرض کنید $N(t)$ ، $t \geq 0$ فرایند کاکس باشد که با یک اندازه گیری تصادفی $\mu(t)$ کنترل می شود، قرار می دهیم:

$$U(t) = u + C\mu(t) - \sum_{j=1}^{N(t)} X_j.$$

قضیه ۱۰.۸. تابع بقا در مدل (۷) در معادله انتگرالی زیر صدق می‌کند:

$$(\Lambda_1 + \Lambda_2)\bar{\psi}(u) = \Lambda_1 \int_0^u \bar{\psi}(u-x)dF(x) + \Lambda_2 \int_0^\infty \bar{\psi}(u+y)dG(y).$$

برهان. به صفحه ۲ در [۳] مراجعه کنید.

مثال ۲۰.۸. فرض می‌کنیم در مدل کرامر-لاندبرگ با حق بیمه‌های تصادفی، حق بیمه‌ها از توزیع نمایی با میانگین $\frac{1}{b}$ و خسارت‌ها از توزیع نمایی با میانگین $\frac{1}{a}$ پیروی می‌کنند. احتمال ورشکستگی با توجه به قضیه ۱۰.۸ به صورت زیر می‌باشد:

$$\psi(u) = \frac{(a+b)\Lambda_2}{(\Lambda_1 + \Lambda_2)a} \exp\left(-\frac{\Lambda_2 b - \Lambda_1 a}{\Lambda_1 + \Lambda_2}u\right). \quad (۸)$$

حل. به صفحه ۳ در [۳] مراجعه کنید.

۹ مدل ریسک اسپاراندروسون با حق بیمه‌های تصادفی

مدل اسپاراندروسون با حق بیمه‌های تصادفی تعمیم مدل کلاسیک با حق بیمه‌های تصادفی است. در این مدل، فرایند ورود خسارت‌ها و فرایند ورود حق بیمه‌ها به جای فرایند پواسون، از یک فرایند تجدید پیروی می‌کند. همانند مدل کلاسیک فرض کنید $\{Y_i\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع و مثبت، نشان‌دهنده خسارت‌های وارده به شرکت باشد و $\{X_i\}_{i \geq 1}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع و مثبت، نشان‌دهنده حق بیمه‌های وارده به شرکت باشد. فرایند ورود خسارت‌ها و ورود حق بیمه‌ها، فرایند تجدید دلخواه می‌باشد.

۱۰ مثال عددی

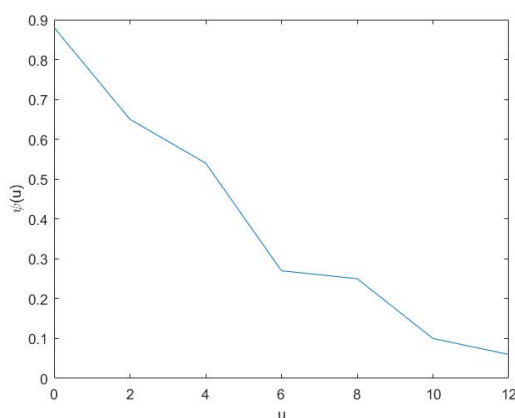
برای مقایسه احتمال ورشکستگی در مدل‌های ریسک کلاسیک، اسپاراندروسون، پواسون، کاکس، کلاسیک با حق بیمه‌های تصادفی و اسپاراندروسون با حق بیمه‌های تصادفی مثال‌های زیر آورده می‌شود تا نتایج با هم مقایسه گردند.

مثال ۱۰.۱۰. مدل‌های ریسک کلاسیک، اسپاراندروسون، پواسون، کاکس، کلاسیک با حق بیمه‌های تصادفی و اسپاراندروسون با حق بیمه‌های تصادفی را به صورت زیر در نظر می‌گیریم. (الف) در مدل

ریسک کلاسیک، توزیع زمان بین دو خسارت متوالی دارای توزیع نمایی با پارامتر $\frac{1}{\theta} = \frac{1}{3}$ اندازه خسارت دارای توزیع نمایی با میانگین $\mu = 1$ است و سرمایه اولیه u و نرخ حق بیمه $C = 2$ است. در مدل ریسک کلاسیک بنا به (۳) داریم:

$$\psi(u) = \frac{\Lambda}{C\mu} \exp\left(-\left(\mu - \frac{\Lambda}{C}\right)u\right).$$

بنا به مفروضات مثال و قرار دادن مقادیر $u = 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12$ نمودار ψ_u ، احتمال ورشکستگی، بر حسب u ، سرمایه اولیه، در شکل (۱۰-۱-۱) رسم شده است.



شکل (۱۰-۱-۱): نمودار احتمال ورشکستگی کرامر-لاندبرگ نسبت به سرمایه اولیه $u = 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12$ با اندازه خسارت نمایی با پارامتر $\theta = \frac{1}{3}$ و $C = 2, \Lambda = 2$.

ب) در مدل اسپاراندروسون، توزیع زمان بین دو خسارت متوالی دارای توزیع آمیخته نمایی

$$F(x) = 1 - \frac{1}{3}(\exp(-x) + \exp(-2x) + \exp(-3x)), \quad (۹)$$

با پارامتر $\theta = \frac{1}{11}$ و اندازه خسارت دارای توزیع نمایی با میانگین $\mu = 1$ باشد. برای مدل اسپاراندروسون، بنا به معادله (۵) داریم:

$$M_{X-CT}(s) = E(e^{s(X-CT)}) = E(e^{sX})E(e^{-CsT}) \\ = \frac{1}{1-s} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1+Cs} + \frac{2}{2+Cs} + \frac{3}{3+Cs} \right) = 1.$$

در نتیجه

$$\frac{1}{1+Cs} + \frac{2}{2+Cs} + \frac{3}{3+Cs} = 3(1-s),$$

که پس از ساده کردن، حاصل، یک معادله درجه سوم به صورت

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

با ضرایب زیر است:

$$a = -3C^3,$$

$$b = 3C^2 - 18C^3,$$

$$c = 12C^2 - 33C,$$

$$d = 11C - 18.$$

تابع شدت تجمعی به صورت زیر می باشد:

$$\begin{aligned}\mu(t) &= \int_0^t \Lambda(v) dv = \int_0^t \Lambda_* v^{(p-1)} (1-v)^{q-1} \\ &= \Lambda_* \{[t]B(p, q) + B(p, q, t - [t])\},\end{aligned}$$

که در آن

$$B(p, q) = \int_0^1 v^{(p-1)} (1-v)^{q-1} dv = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},$$

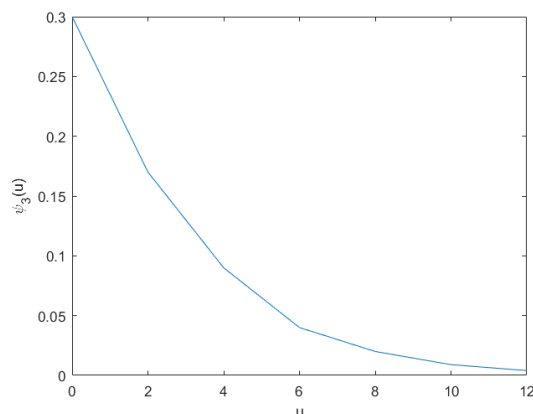
تابع بتا در $p, q > 0$ است و

$$B(p, q, t) = \int_0^t v^{(p-1)} (1-v)^{q-1} dv, t \in [0, 1).$$

در اولین سال دوره، ورشکستگی اتفاق می افتد اگر $S_1(u) < 0$ یعنی $\sum_{i=0}^{M_1} X_i > u + C$ که M_1 متغیر تصادفی پواسون با پارامتر $\mu(1) = \Lambda_* B(p, q)$ می باشد. خسارت ها دارای توزیع نمایی با پارامتر $\theta = 1$ می باشد. بنا به قانون کلی احتمال و این حقیقت که مجموع متغیرهای تصادفی نمایی مستقل، توزیع ارلانگ دارند

$$\psi_{[*,t)}(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(1)^n}{n!} e^{-\mu(1)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\frac{1}{\theta}(u+C)^k}{k!} e^{-\frac{1}{\theta}(u+C)}.$$

با در نظر گرفتن $\Lambda_* = 50$ و $p = q = 2$ و $E(X_1) = \theta = 1$ و $C = 10$ و مقادیر $u = 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12$ ، نمودار ψ_3 بر حسب u در شکل (۱۰-۳) نشان داده شده است.



شکل (۱۰-۳): نمودار احتمال ورشکستگی مدل ریسک پواسون ناهمگن نسبت به سرمایه اولیه $u = 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12$ ، و اندازه خسارت نمایی با پارامتر $\theta = 1$ و نرخ شدت خسارت با توزیع بتا $B(2, 2)$ و $C = 10$.

(ج) در مدل ریسک کلاسیک با حق بیمه های تصادفی، توزیع زمان بین دو خسارت متوالی دارای توزیع نمایی با پارامتر $\theta_1 = \frac{1}{3}$ ، توزیع زمان بین دو حق بیمه متوالی، نمایی با پارامتر $\theta_2 = \frac{1}{3}$ ، اندازه خسارت

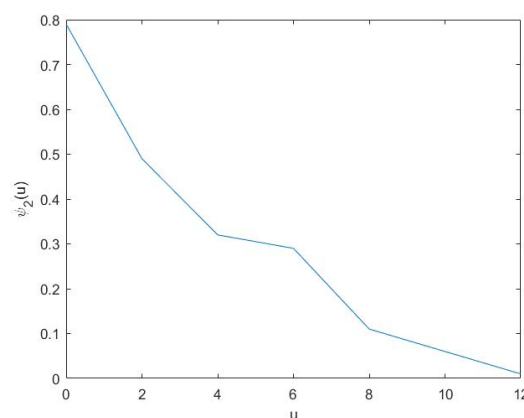
این معادله یک ریشه مثبت دارد که آن را γ می نامیم. γ تابعی از C است و آن را با $\gamma = g(C)$ نشان می دهیم. بنا به معادله (۴)

$$\psi_2(u) = (1 - \frac{g(C)}{\theta}) e^{-g(C)u}.$$

قرار می دهیم $C = 2$ در این صورت شرط سود خالص برقرار است

$$E(X - CT) = 1 - 2(\frac{11}{18}) < 0.$$

حال بنا به مفروضات مثال و توضیحات فوق نمودار ψ_2 به ازای مقادیر $u = 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12$ در شکل (۱۰-۲) رسم شده است.



شکل (۱۰-۲): نمودار احتمال ورشکستگی اسپاراندسون نسبت به سرمایه اولیه $u = 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12$ و با توزیع بین ورودی (۹) و اندازه خسارت نمایی با پارامتر $\theta = 2$ و $C = 2$.

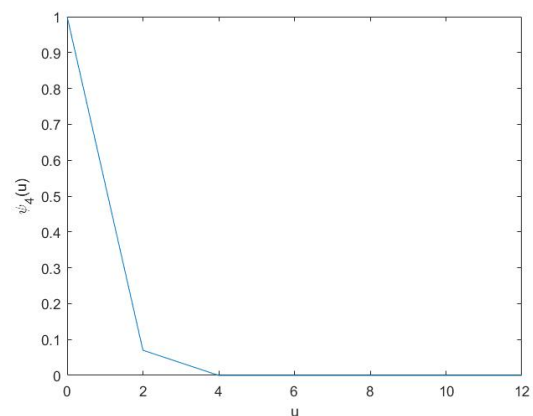
(ج) در مدل ریسک پواسون ناهمگن، احتمال ورشکستگی یک سال را برای مدل ریسک گسسته نشانیده به عنوان تابعی از سرمایه اولیه u و زمان اولیه τ با نرخ شدت خسارت با توزیع بتا و اندازه خسارت ها به طور نمایی با میانگین $\mu = 1$ در نظر می گیریم. حال در مدل ریسک پواسون ناهمگن تابع شدت را با توزیع بتا در نظر می گیریم

$$\Lambda(t) = \Lambda_*(t - [t])^{(p-1)} (1 - (t - [t]))^{q-1}.$$

دارای توزیع نمایی با پارامتر $a = 10$ و اندازه حق بیمه دارای توزیع نمایی با پارامتر $b = 100$ می‌باشد. در مدل ریسک کرامر-لاندبرگ با حق بیمه‌های تصادفی، بنا به معادله (۶) داریم:

$$\psi_4(u) = \frac{(a+b)\Lambda_2}{(\Lambda_1 + \Lambda_2)a} \exp\left(\frac{\Lambda_2 b - \Lambda_1 a}{\Lambda_1 + \Lambda_2}\right) u.$$

با توجه به مفروضات مثال و قرار دادن مقادیر $u = 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12$ نمودار ψ_4 برحسب u در شکل (۱۰-۴) رسم شده است.



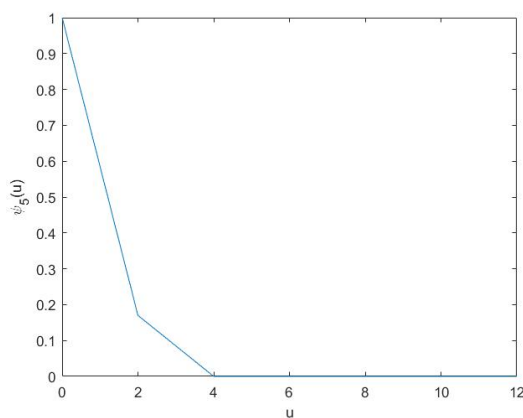
شکل (۱۰-۴): نمودار احتمال ورشکستگی مدل کرامر-لاندبرگ با حق بیمه‌های تصادفی نسبت به سرمایه اولیه $u = 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12$ ، $\Lambda_2 = 10$ ، $\Lambda_1 = 2$ خسارت‌ها نمایی با پارامتر 10 .

د) در مدل اسپاراندرسون با حق بیمه‌های تصادفی، توزیع زمان بین دو خسارت متوالی و دو حق بیمه متوالی، نمایی آمیخته با تابع توزیعی زیر

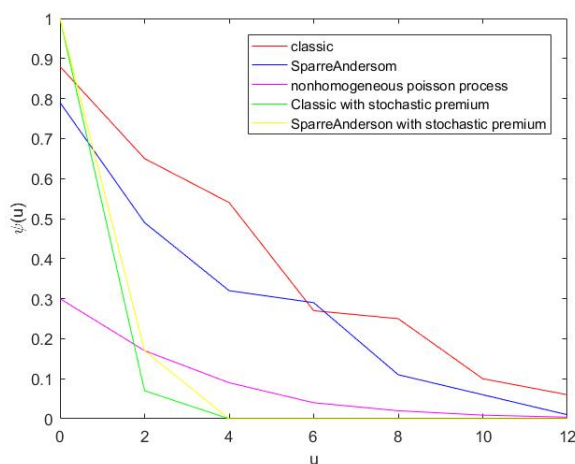
$$F(x) = 1 - \frac{1}{3}(\exp(-x) + \exp(-2x) + \exp(-3x)).$$

از طرف دیگر، اندازه خسارت دارای توزیع نمایی با پارامتر $a = 10$ و اندازه حق بیمه دارای توزیع نمایی با پارامتر $b = 100$ می‌باشد.

در مدل اسپاراندرسون با حق بیمه‌های تصادفی، با مفروضات مثال و قرار دادن مقادیر $u = 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12$ نمودار ψ_5 برحسب u در شکل (۱۰-۵) رسم شده است.



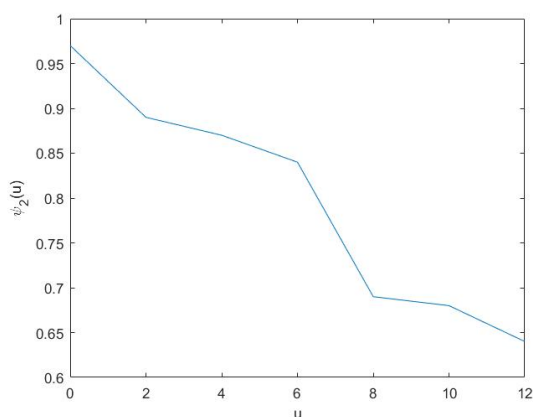
شکل (۱۰-۵): نمودار احتمال ورشکستگی مدل اسپاراندرسون با حق بیمه‌های تصادفی نسبت به سرمایه اولیه $u = 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12$ ، با توزیع بین ورودی خسارت‌ها و حق بیمه‌ها (۹)، توزیع حق بیمه‌ها نمایی با پارامتر 10 و توزیع خسارت‌ها نمایی با پارامتر 10 .



شکل (۱۰-۶): نمودار مقایسه احتمال ورشکستگی انواع مدل‌های ریسک

جدول ۱۰-۱. مقایسه احتمال ورشکستگی در انواع مدل‌های ریسک

u	۰	۲	۴	۶	۸	۱۰	۱۲
$\psi_1(u)$	۰.۸۸	۰.۶۵	۰.۵۴	۰.۴۷	۰.۴۵	۰.۴۱	۰.۳۶
$\psi_2(u)$	۰.۷۹	۰.۴۹	۰.۳۲	۰.۲۹	۰.۲۱	۰.۱۶	۰.۱۱
$\psi_3(u)$	۰.۳	۰.۱۷	۰.۰۹	۰.۰۴	۰.۰۲	۰.۰۱	۰.۰۰۵
$\psi_4(u)$	۱	۰.۳۷	۰	۰	۰	۰	۰
$\psi_5(u)$	۱	۰.۱۷	۰	۰	۰	۰	۰



شکل (۱۰-۲): نمودار احتمال ورشکستگی اسپاراندسون نسبت به سرمایه اولیه $u = 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12$ و با توزیع بین ورودی (۹) با اندازه خسارت لگ نرمال با پارامترهای $m = 0.25$, $\sigma = 1$, $C = 2$.

ج) در مدل ریسک پواسون ناهمگن، احتمال ورشکستگی در طول یک سال را برای مدل ریسک گسسته نشانیده به عنوان تابعی از دارایی اولیه u و زمان اولیه τ در نظر می‌گیریم. همچنین، فرض می‌شود که نرخ شدت خسارت از توزیع بتا و اندازه خسارت‌ها از توزیع لگ نرمال با میانگین $m = 0.25$, $\sigma = 1$ پیروی می‌کنند. بنابراین

$$\Lambda(t) = \Lambda_0(t - [t])^{(p-1)}(1 - (t - [t]))^{q-1},$$

در اولین سال دوره، ورشکستگی اتفاق می‌افتد اگر $S_1(u) < 0$ یعنی $\sum_{i=1}^{M_1} X_i > u + C$ که M_1 متغیر تصادفی پواسون با پارامتر $\mu(1) = \Lambda_0 B(p, q)$ می‌باشد. خسارت‌ها دارای توزیع لگ نرمال با پارامتر $m = 0.25$ و $\sigma = 1$ می‌باشد. بنا به قانون احتمال کل

$$\psi_{[0,t)}(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(1)^n}{n!} e^{-\mu(1)} P(X_1 + X_2 + \dots + X_n > u + C).$$

با توجه به اینکه توزیع مجموع متغیرهای تصادفی لگ نرمال شکل بسته‌ای ندارد، امکان محاسبه تحلیل این فرمول به سادگی وجود ندارد. لذا برای محاسبه این کمیت از تقریب تجربی توزیع مجموع متغیرهای تصادفی لگ نرمال کمک گرفته شد. برای این منظور ۱۰۰۰ بار از توزیع لگ نرمال نمونه‌های با اندازه n انتخاب و برآورد تجربی مقدار احتمال $P(X_1 + X_2 + \dots + X_n > u + C)$ بر اساس آن محاسبه شد. مقدار تجربی احتمال برای n ‌های مختلف محاسبه گردید و خروجی حاصل به صورت تقریبی به دست آمد. $\Lambda_0 = 50$ و $p = q = 2$ و $E(X_1) = 0.25$ و $C = 10$ و مقادیر $u = 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12$ ، در نظر می‌گیریم. نمودار ψ_2 برحسب u در شکل (۱۰-۳) رسم شده است.

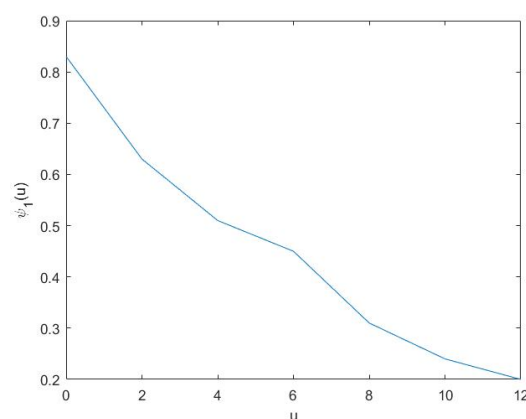
مثال ۲۰۸. مدل‌های ریسک کلاسیک، اسپاراندسون، پواسون ناهمگن، کلاسیک با حق بیمه‌های تصادفی و مدل اسپاراندسون با حق بیمه‌های تصادفی را به صورت زیر در نظر می‌گیریم.

الف) در مدل ریسک کلاسیک، توزیع زمان بین دو خسارت متوالی دارای توزیع نمایی با پارامتر $\theta = 1$ اندازه خسارت دارای توزیع لگ نرمال با پارامترهای $m = 0.25$, $\sigma = 1$ و سرمایه اولیه u و نرخ حق بیمه $C = 2$ باشد. در مدل ریسک کرامر-لاندبرگ بنا به مفروضات، اندازه خسارت‌ها دارای توزیع لگ نرمال هستند

$$X \sim \text{Lognormal}(m, \sigma^2),$$

$$f_X(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln(x) - m)^2}{2\sigma^2}\right).$$

به ازای مقادیر $u = 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12$ نمودار احتمال ورشکستگی ψ_1 برحسب سرمایه اولیه u در شکل (۱۰-۲) رسم شده است.



شکل (۱۰-۲): نمودار احتمال ورشکستگی کرامر-لاندبرگ نسبت به سرمایه اولیه $u = 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12$ با اندازه خسارت لگ نرمال با پارامترهای $m = 0.25$, $\sigma = 1$, $C = 2$.

ب) اگر در مدل اسپاراندسون، توزیع زمان بین دو خسارت متوالی نمایی آمیخته با تابع توزیع زیر باشد.

$$F(x) = 1 - \frac{1}{3}(\exp(-x) + \exp(-2x) + \exp(-3x)),$$

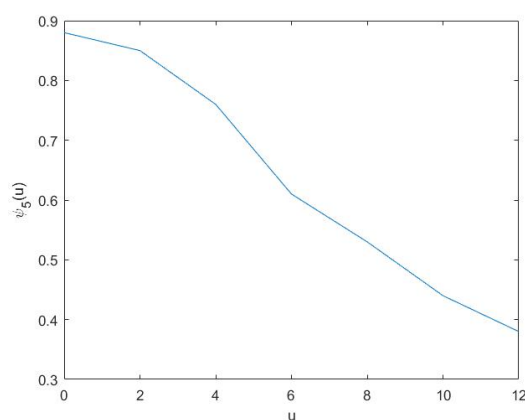
که در آن پارامتر $\theta = \frac{11}{11}$ و اندازه خسارت دارای توزیع لگ نرمال با پارامترهای $m = 0.25$, $\sigma = 1$ و سرمایه اولیه u و نرخ حق بیمه $C = 2$ است.

نمودار ψ_2 به ازای مقادیر $u = 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12$ ، در شکل (۱۰-۲) رسم شده است.

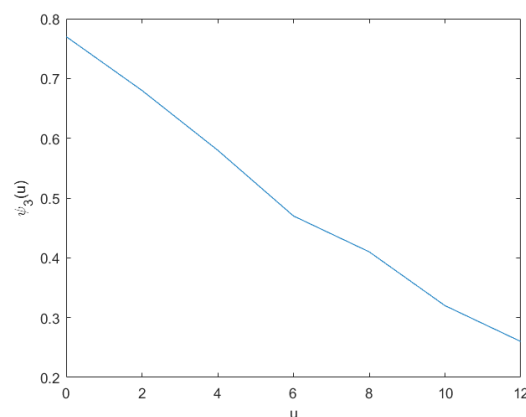
د) در مدل اسپاراندروسون با حق‌بیمه‌های تصادفی، توزیع زمان بین دو خسارت متوالی و دو حق‌بیمه متوالی، نمایی آمیخته به شکل زیر است.

$$F(x) = 1 - \frac{1}{3}(exp(-x) + exp(-2x) + exp(-3x)).$$

اندازه حق‌بیمه و اندازه خسارت دارای لگ‌نرمال با پارامترهای $m = 0.25$ و $\sigma = 1$ می‌باشد. نمودار احتمال ورشکستگی مدل ریسک اسپاراندروسون با حق‌بیمه‌های تصادفی، به ازای مقادیر $u = 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12$ در شکل (۵-۲-۱۰) رسم شده است.

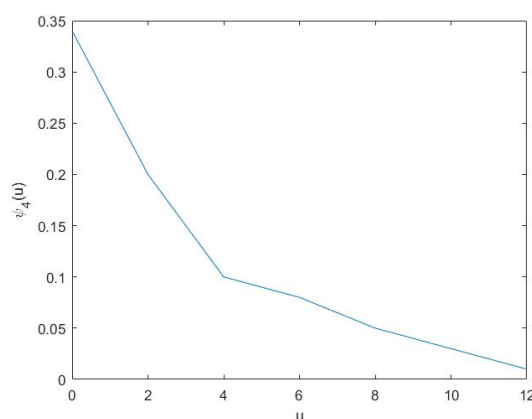


شکل (۵-۲-۱۰): نمودار احتمال ورشکستگی مدل اسپاراندروسون با حق‌بیمه‌های تصادفی نسبت به سرمایه اولیه $u = 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12$ ، با توزیع بین ورودی خسارت‌ها و حق‌بیمه‌ها (۹)، توزیع حق‌بیمه‌ها و توزیع خسارت‌ها لگ‌نرمال با پارامترهای $m = 0.25$ ، $\sigma = 1$



شکل (۳-۲-۱۰): نمودار احتمال ورشکستگی مدل ریسک پواسون ناهمگن نسبت به سرمایه اولیه $u = 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12$ ، و با اندازه خسارت لگ‌نرمال با پارامترهای $m = 0.25$ ، $\sigma = 1$ و نرخ شدت خسارت با توزیع بتا $B(2, 2)$ و $C = 10$.

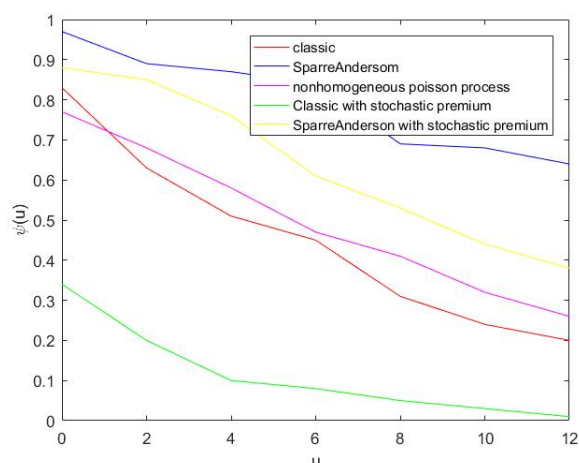
چ) در مدل ریسک کلاسیک با حق‌بیمه‌های تصادفی، توزیع زمان بین دو خسارت متوالی، نمایی با پارامتر $\theta_1 = 1$ ، توزیع زمان بین دو حق‌بیمه نمایی متوالی، نمایی با پارامتر $\theta_2 = \frac{1}{3}$ و اندازه حق‌بیمه و اندازه خسارت دارای توزیع لگ‌نرمال با پارامترهای $m = 0.25$ و $\sigma = 1$ می‌باشد. نمودار احتمال ورشکستگی مدل ریسک کلاسیک با حق‌بیمه‌های تصادفی، $u = 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12$ در شکل (۴-۲-۱۰) رسم شده است.



شکل (۴-۲-۱۰): نمودار احتمال ورشکستگی مدل کرامر-لاندبرگ با حق‌بیمه‌های تصادفی نسبت به سرمایه اولیه $u = 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12$ ، $\Lambda_1 = 1$ ، $\Lambda_2 = 30$ و توزیع حق‌بیمه‌ها و توزیع خسارت‌ها لگ‌نرمال با پارامترهای $m = 0.25$ ، $\sigma = 1$.

۱۱ بحث و نتیجه‌گیری

بررسی احتمال ورشکستگی در مدل‌های مختلف ریسک بیمه غیرزندگی از مباحث موردعلاقه محققین و متصدیان این حوزه است. در این مقاله برخی از مدل‌های مشهور، مثل کلاسیک، اسپاراندروسون، پواسون ناهمگن، کاکس، کلاسیک با حق‌بیمه‌های تصادفی و اسپاراندروسون با حق‌بیمه‌های تصادفی به اختصار معرفی شده و با مثال‌هایی در حالت‌های خاص، برای آن‌ها احتمال ورشکستگی محاسبه شده است. مثال‌ها نشان می‌دهند که احتمال ورشکستگی در مدل کلاسیک کرامر-لاندبرگ نسبت به سایر مدل‌ها بیشتر و در مدل کرامر-لاندبرگ با حق‌بیمه‌های تصادفی کمتر است، وقتی که مقدار خسارت‌ها از توزیع نمایی پیروی می‌کنند.



جدول ۱۰-۲ مقایسه احتمال ورشکستگی در انواع مدل های ریسک

u	۰	۲	۴	۶	۸	۱۰	۱۲
$\psi_1(u)$	۰.۸۳	۰.۶۳	۰.۵۱	۰.۴۵	۰.۳۱	۰.۲۴	۰.۲۰
$\psi_2(u)$	۰.۹۷	۰.۸۹	۰.۸۷	۰.۸۴	۰.۶۹	۰.۶۸	۰.۶۴
$\psi_3(u)$	۰.۷۷	۰.۶۸	۰.۵۸	۰.۴۷	۰.۴۱	۰.۳۲	۰.۲۶
$\psi_4(u)$	۰.۳۴	۰.۲۰	۰.۱	۰.۰۸	۰.۰۵	۰.۰۳	۰.۰۱
$\psi_5(u)$	۰.۸۸	۰.۸۵	۰.۷۶	۰.۶۱	۰.۵۳	۰.۴۴	۰.۳۸

شکل (۱۰-۲-۶): نمودار مقایسه احتمال ورشکستگی انواع مدل های

ریسک

مراجع

- [1] Albrecher, H. and Asmussen, S. (2010). *Ruin probabilities*. Second Edition. New Jersey, World Scientific.
- [2] Beging, V. E. and Korolev, V. U. (2002). *Generalized Poisson models and their applications in insurance and finance*, De Gruyter, Moscow State University.
- [3] Boikov, A.V. (2003). *The Cramér–Lundberg model with stochastic premium process. Theory of Probability and Its Applications*. **47**, 489–493.
- [4] Breuer, L. and Badescu, A.L. (2014). A generalised Gerber–Shiu measure for Markov-additive risk processes with phase-type claims and capital injections. *Scandinavian Actuarial Journal*, **2014(2)**, 93-115.
- [5] Buhlmann, H. (1989). *Tendencies of development in risk theory*. In; *Centennial celebration of the Actuarial Profession in North American* 2. The Society of Actuaries, Schaumburg, Illinois, 499-521.
- [6] David, C. M. D. (2016). *Insurance Risk and Ruin*, second Edition, Cambridge, United Kingdom.
- [7] Embrechts, P. and Kluppelberg, K. (1993). *Some Aspects of Insurance Mathematics Theory Probab.* Theory of Probability & Its Applications, App. **38**, 375-416.
- [8] Konstantinides, D. G. (2017). *Risk Theory A Heavy Tail Approach*. University of the Aegean, Greece.
- [9] Rolski, T., Schmidli, H., Schmidt, V. and Teugels, J. (1999). *Stochastic Processes for Insurance and Finance*, Wiley, New York.
- [10] Mikosch, T. (2009). *Non-Life Insurance Mathematics: An Introduction with the Poisson Process*, Second Edition, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- [11] Schmidli, H. (2018). *Risk Theory*. Institute of Mathematics University of Cologne.
- [12] Lu, Y. (2001). *Periodicity and ruin probabilities for compound Non-Homogeneous Poisson processes*, Concordia university, Montreal; Quebec; Canada.

- [13] Tuncel, A. and Tank, F. (2014). *Computational results on the compound binomial risk model with nonhomogeneous claim occurrences*, Journal of computational and Applied Mathematics. **263**, 69-77.

[۱۴] پاینده نجف آبادی، امیر تیمور (۱۳۹۹). نظریه ریسک در بیمه های غیرزندگی. تهران: بیمه مرکزی جمهوری اسلامی ایران، پژوهشکده بیمه. (۱۹۹۸).

An Review of The Probability of Ruin of Some Non-Life Insurance Risk Models

Hossien Samimi Haghgozar¹ and Anahita Nazarizadeh²

Abstract:

Risk refers to conditions in which there is a possibility of deviation from a predicted result. Insurance is one method of managing risk exposure, involving the transfer of all or part of the risk from the insured to the insurer. Insurance policies are typically classified into two types: life insurance and non-life insurance. Based on this classification, any insurance policy whose subject is the health of the insured person or persons is considered a life insurance policy; otherwise, it is categorized as a non-life insurance policy. Many insurance products within the industry fall under non-life insurance. Examples of these include fire, automobile, engineering, freight, oil, and energy insurance. Explanation and calculation of three issues in risk models are crucial: the ruin probability, the time of ruin, and the amount of ruin. This article presents the main and well-known results achieved thus far in the field of non-life insurance, with an emphasis on the possibility of ruin, accompanied by various examples. We hope that this article can serve as a useful and comprehensive resource in this scientific field. Furthermore, we hope it will inspire researchers to enhance and refine existing models, as well as develop new ones.

Keywords: Cramer-Landberg Risk Model, Sparre Anderson Risk Model, Nonhomogeneous Poisson Process, Compound Poisson Process, Ruin Probability.

¹ University of Guilan

² University of Guilan