بهینه‌سازی برآورد پارامتر شدت ترافیک مدل صف‌بندی $M/M/1$ تحت روش‌های برآورد بیزی

شهرام یعقوب‌زاده شهرستانی [۱]، امراله جعفری [۲]

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۰۴/۰۷
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۱۲/۱۴

چکیده:

در این مقاله مدل صف‌بندی $M/M/1$ که در آن زمان‌های بین دو ورود متوالی مشتری‌ها دارای توزیع نمایی با پارامتر λ و زمان‌های سرویس دارای توزیع نمایی با پارامتر μ و مستقل از زمان‌های بین ورودهای متوالی هستند، در نظر گرفته می‌شود. همچنین فرض می‌شود که سیستم تا زمان T فعال است. تحت این زمان توقف (T) و تابع زیان آنتروپی عمومی و با در نظر گرفتن توزیع‌های پیشین گاما و ارلانگ به ترتیب برای پارامترهای λ و μ، برآوردهای بیز، E-بیز و بیز سلسله مراتبی پارامتر شدت ترافیک این مدل صف‌بندی به دست می‌آید. سپس به کمک تحلیل عددی و بر اساس شاخصی برحسب احتمال پایایی و تابع هزینه، روش‌های برآورد بیز، E-بیز و بیز سلسله مراتبی با یکدیگر مقایسه می‌شوند.

واژه‌های کلیدی: احتمال پایایی، تابع هزینه، برآورد E-بیز، برآورد بیز سلسله مراتبی، مدل صف‌بندی $M/M/1$.

۱ مقدمه

یکی از روش‌های برآورد پارامترهای توزیع‌های آماری، روش بیز است. انتخاب معقول توزیع‌های پیشین روی فضای پارامتر، نقش مهمی در کاهش خطای برآوردگر بیزی دارد. بنابراین با تعریف توزیع پیشین مناسب روی فضای پارامتر و اعمال شرایطی خاص روی ابرپارامترهای توزیع پیشین، برآوردهای بیزی به دست می‌آید که نقش مهمی در دقت برآورد دارد. برآوردهای E-بیز و بیز سلسله‌مراتبی از این نوع برآوردگرها هستند. توزیع پیشین بیز سلسله‌مراتبی ابتدا توسط لیندلی و اسمیت [۱۸] معرفی شد و سپس توسط هان [۱۴] موردبررسی بیشتری قرار گرفت. روش‌های برآورد E-بیز و بیز سلسله‌مراتبی برای برآورد پارامتر توزیع‌های مختلف توسط چند نویسنده مورداستفاده قرار گرفتند که از آن جمله می‌توان به هان [۱۵]، جاهین و اکاشا [۱۷] و وانگ و همکاران [۲۷] اشاره کرد. همچنین کاربرد روش بیز سلسله‌مراتبی در تحلیل داده‌ها توسط میچیس و ویکل [۲۰]، گرسی و تینگلی [۸]، آندو و زلنر [۵]، اوسی و دوکر [۲۱] و ریچارد [۲۳] انجام شد.

روش‌های برآورد ماکسیمم درستنمایی و بیزی در نظریه صف‌بندی موردتوجه بسیاری از پژوهشگران قرارگرفته است. برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامترهای مدل صف‌بندی $M/M/1$ در حالت‌پایا، توسط کلارک [۷]، برآورد بیزی نرخ‌های ورود و سرویس در مدل‌های صف‌بندی $M/M/1$ و $M/M/\infty$ توسط موداپور [۱۹]، برآورد بیز تجربی پارامترهای مدل‌های صف‌بندی $M/M/1$ و $M/M/\infty$ و خواص مجانبی آن‌ها توسط تیرووایرو و باسو [۲۶]، برآورد زمان انتظار در مدل صف‌بندی $M/M/1$ در حالت چوله به راست بودن توزیع آن توسط چاودهوری و موخرجی [۹]، برآوردهای ماکسیمم درستنمایی و بیزی پارامتر شدت ترافیک مدل صف‌بندی $M/M/1$ توسط چاودهوری و موخرجی [۱۰]، هم‌ارزی نتایج برآورد پارامترهای مدل صف‌بندی $M/M/1$ به روش‌های بیزی و ماکسیمم درستنمایی توسط سینگل و آچاریا [۲۴]، برآورد ناپارامتری زمان سرویس در مدل‌های صف‌بندی با سرویس‌دهندگان نامتناهی و با ورودی پواسون توسط گولدن‌شولگر و کوپس [۱۳]، برآورد ناپارامتری توزیع زمان سرویس در مدل‌های صف‌بندی زمان-گسسته توسط سچویر و ویشلهوس [۲۵]، برآوردهای ماکسیمم درستنمایی و بیزی پارامتر شدت ترافیک مدل صف‌بندی $M/D/1$ توسط چاندراسخار و وایدیاناتان [۱۱]، تعیین مدل بهینه

[۱] گروه آمار، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران. (نویسنده مسئول: yagoubzade@pnu.ac.ir)
[۲] گروه آمار، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران

در سیستم صف‌بندی $\{E_r/M/2, r=1,2,\ldots\}$ توسط یعقوب‌زاده شهرستانی [۲] و برآورد پارامتر شدت ترافیک و احتمال پایایی مدل صف‌بندی $M/M/c$ توسط یعقوب‌زاده شهرستانی[۳] ارائه‌شده‌اند.
در این مقاله هدف آن است که بین برآوردهای بیز، E-بیز و بیز سلسله مراتبی پارامتر شدت ترافیک مدل صف‌بندی $M/M/1$ تحت یک زمان توقف، برآوردی انتخاب شود که به ازای آن هزینه سیستم مینیمم و احتمال پایایی سیستم ماکسیمم گردد. بنابراین ابتدا برای مدل صف‌بندی $M/M/1$ بر اساس متوسط تعداد مشتری‌های در صف و سیستم، تابع هزینه معرفی و سپس بر اساس تابع هزینه و احتمال پایایی سیستم، شاخصی جدید معرفی می‌شود تا بر اساس آن، روش‌های برآورد پارامتر شدت ترافیک این مدل باهم مقایسه شوند. ساختار مقاله به این صورت است. در بخش دوم، برآوردهای E-بیز، بیز سلسله مراتبی و توزیع ارلانگ معرفی می‌شوند. در بخش سوم، مدل صف‌بندی $M/M/1$ و شکل کلی تابع هزینه این مدل معرفی می‌شود. در بخش چهارم برآوردهای بیز، E-بیز و بیز سلسله مراتبی پارامتر شدت ترافیک تحت تابع زیان آنتروپی عمومی به دست می‌آید. با استفاده از شبیه‌سازی مونت‌کارلو برآوردهای بیز، E-بیز و بیز سلسله مراتبی پارامتر شدت ترافیک و احتمال پایایی و مقدار هزینه سیستم بر پایه این برآوردگرها محاسبه می‌شوند. سپس شاخصی برای ارزیابی برآوردگرهای اشاره‌شده معرفی می‌شود تا بر اساس آن برآوردگر مناسب پارامتر شدت ترافیک تعیین شود.

۲ مفاهیم اولیه

اگر θ پارامتر توزیع دلخواهی باشد. با توجه به هان [۱۴] برآوردهای E-بیز و بیز سلسله مراتبی به ترتیب به‌صورت زیر تعریف می‌شوند.

تعریف ۱.۲. *فرض کنید b_1 و b_2 ابرپارامترهایی در توزیع پیشین θ و $\pi(b_1,b_2)$ توزیع پیشین توأم (b_1,b_2) و $\hat{\theta}_B(b_1,b_2)$ برآورد بیزθ باشند، آنگاه برآورد E-بیز θ که با نماد $\hat{\theta}_{EB}$ نشان داده می‌شود به‌صورت زیر است.*

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_{EB} &= E_{\pi(b_1,b_2)}(\hat{\theta}_B(b_1,b_2)) \\ &= \int_{\Lambda_1}\int_{\Lambda_2}\hat{\theta}_B(b_1,b_2)\pi(b_1,b_2)db_1db_2, \quad b_1\in\Lambda_1,, b_2\in\Lambda_2\end{aligned}$$

در حقیقت امید ریاضی برآورد بیز θ است.

تعریف ۲.۲. *اگر $\pi(\theta|\lambda)$ و $\pi'(\lambda)$ به ترتیب توزیع‌های پیشین متناظر پارامتر θ و ابرپارامتر λ باشند، آنگاه توزیع پیشین سلسله مراتبی θ عبارت است از*

$$\pi''(\theta) = \int_\Lambda \pi(\theta|\lambda)\pi'(\lambda)d\lambda, \quad \lambda\in\Lambda.$$

۱.۲ توزیع ارلانگ

ساده‌ترین مدل‌های صف‌بندی آن‌هایی هستند که بر اساس متغیر تصادفی نمایی ساخته‌شده‌اند. خاصیت بی‌حافظه بودن این متغیر تصادفی، تحلیل مدل‌های نمایی را بسیار آسان می‌سازد. بنابراین بیشتر مسائل صف‌بندی در چارچوب مدل‌های نمایی فرمول‌بندی می‌شوند؛ اما همه آن‌ها در این قالب جا داده نمی‌شود. متغیرهای تصادفی مانند مدت‌زمان سرویس و یا زمان بین دو ورود مشتری‌ها در سیستم‌های صف‌بندی از توزیع‌های متنوعی پیروی می‌کنند که توزیع ارلانگ یکی از معروف‌ترین آن‌هاست.

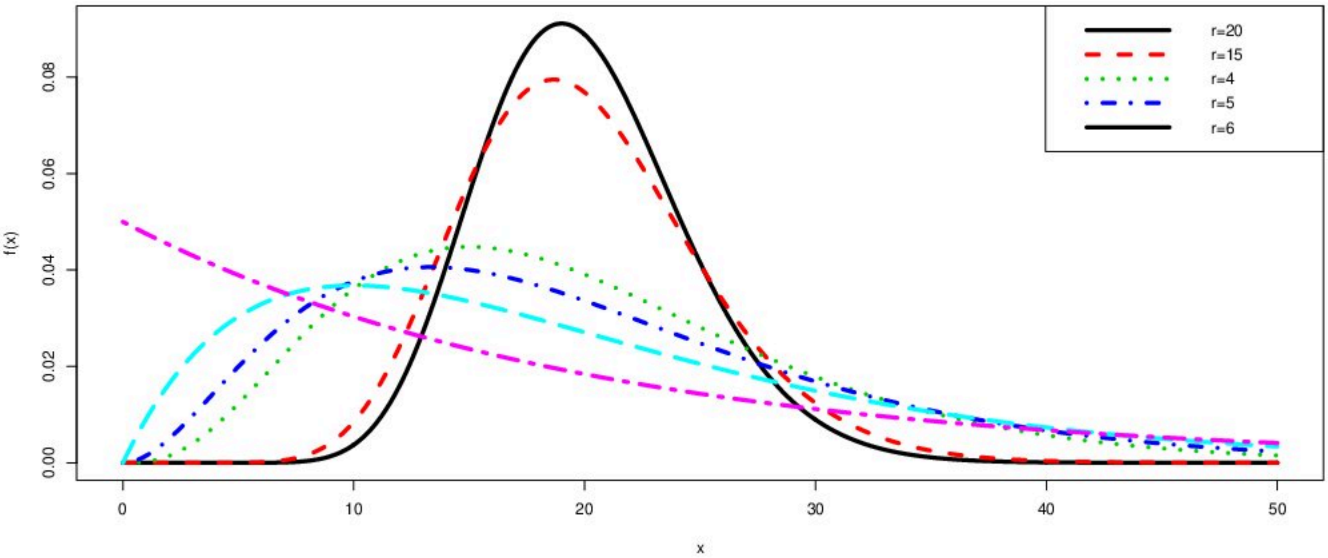
تعریف ۳.۲. *اگر متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال به‌صورت*

$$f(x)=\frac{\lambda^r}{\Gamma(r)}x^{r-1}e^{-\lambda x}, \quad x>0, \lambda>0, r\in\{1,2,\cdots\}$$

باشد، در این حالت توزیع X توزیع ارلانگ نام دارد.

توزیع ارلانگ به شکل فوق در این مقاله با نماد $Er(r,\lambda)$ نشان داده می‌شود. میانگین این متغیر تصادفی $\frac{r}{\lambda}$ و واریانس آن $\frac{r}{\lambda^2}$ است. در حالت خاص اگر $r=1$ باشد، توزیع ارلانگ به توزیع نمایی تبدیل می‌شود. با تغییر r در صورت ثابت ماندن میانگین، توابع مختلفی به دست می‌آید که در شکل (۱) نشان داده‌شده است. با توجه به شکل (۱) مشاهده می‌شود که مجموعه توابع ارلانگ بسیار متنوع هستند و داده‌های آماری بسیاری از متغیرهای تصادفی با یکی از توابع این مجموعه منطبق می‌شود. به‌عنوان‌مثال اگر داده‌های آماری متغیر تصادفی مدت‌زمان سرویس در یک سیستم صف‌بندی در اختیار باشد، به کمک این داده‌ها میانگین و واریانس این متغیر تصادفی تخمین زده می‌شود. با توجه به متنوع بودن توزیع ارلانگ، امکان زیادی وجود دارد که داده‌های موردنظر با آن تطبیق کند. یکی از محاسن توزیع ارلانگ همین خاصیت تنوع آن است که بسیاری از متغیرهای تصادفی در قالب آن جای داده می‌شود. اگرچه توزیع ارلانگ ازنظر محاسباتی در حد توزیع نمایی نیست، اما در مقایسه با سایر متغیرهای تصادفی به متغیر تصادفی نمایی نزدیک‌تر است و در مواردی با تبدیل آن به متغیرهای تصادفی نمایی از سهولت محاسباتی خاصیت بی‌حافظگی استفاده می‌کند. برای آن‌که بتوان از خاصیت بی‌حافظگی توزیع نمایی استفاده کرد، می‌توان متغیر تصادفی ارلانگ را به چند متغیر تصادفی نمایی تجزیه کرد. به‌عنوان‌مثال متغیر تصادفی ارلانگ با $r=2$ به‌صورت مجموع دو

متغیر تصادفی نمایی نوشته می‌شود. مزیت عمده آن نسبت به توزیع نمایی این است که در عمل پدیده‌های تصادفی بسیاری برحسب آن بیان می‌شود (مدرس و تیموری [۱]).



شکل۱. نمودار توزیع ارلانگ با r های متفاوت با فرض ثابت ماندن میانگین

۲.۲ زمان توقف

در این مقاله فرض می‌شود که سیستم تا زمان T فعال است. همچنین $\{U_k, k \geq 1\}$ به‌عنوان زمان‌های بین ورودها، دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع با چگالی نمایی با نرخ λ و $\{V_k, k \geq 1\}$ به‌عنوان زمان‌های سرویس، دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع با چگالی نمایی با نرخ μ در نظر گرفته می‌شوند، به‌طوری‌که λ و μ به ترتیب پارامترهای نرخ ورود و نرخ سرویس هستند. فرض می‌کنیم اولین متقاضی در زمان صفر وارد سیستم شده و سرویس نیز بعد از اولین ورود شروع می‌شود. با در نظر گرفتن $A(T)$ به‌عنوان تعداد متقاضیان واردشده به سیستم تا زمان T و $B(T)$ به‌عنوان تعداد متقاضیان سرویس شده تا زمان T، واضح است که در فاصله زمانی $(\sum_{i=1}^{A(T)} U_i, T)$ هیچ متقاضی وارد نشده و در فاصله زمانی $(\gamma(T) + \sum_{i=1}^{B(T)} V_i, T)$ که در آن $\gamma(T)$ کل اوقات بیکاری سرویس‌دهنده در نظر گرفته می‌شود، هیچ متقاضی سرویس نشده است. بر اساس سینگ و آچاریا [۲۴] چهار حالت برای T در نظر گرفته‌شده است.

۱- اگر سیستم تا زمان مشخص t فعال باشد، واضح است که $T = t$ و $A(T)$ و $B(T)$ متغیرهای تصادفی هستند.

۲- اگر سیستم تا موقعی کار کند که d متقاضی سرویس شود یعنی $B(T) = d$، در این حالت $T = \gamma(T) + \sum_{i=1}^{d} V_i$ و $A(T)$ متغیرهای تصادفی هستند.

۳- اگر سیستم تا موقعی کار کند که m متقاضی به سیستم واردشده باشند یعنی $A(T) = m$، در این حالت $T = \gamma(T) + \sum_{i=1}^{m} U_i$ و $B(T)$ متغیرهای تصادفی هستند.

۴- اگر سیستم تا موقعی کار کند که n متقاضی در سیستم باشد یعنی $A(T) + B(T) = n$. در این حالت T و $A(T)$ و $B(T)$ متغیرهای تصادفی هستند.

بنابراین تحت قانون ۴، اگر زمان توقف سیستم در زمان یک ورودی رخ دهد، آنگاه $T = \sum_{i=1}^{A(T)} U_i$ و در فاصله زمانی $(\gamma(T)+\sum_{i=1}^{B(T)} V_i, T)$ سرویسی انجام نمی‌شود. اگر زمان توقف سیستم در زمان یک سرویس رخ دهد، آنگاه $T = \gamma(T) + \sum_{i=1}^{B(T)} V_i$ و در فاصله زمانی $(\sum_{i=1}^{A(T)} U_i, T)$ هیچ متقاضی وارد نمی‌شود. همچنین با در نظر گرفتن نمونه

$$\mathbf{X} = \{A(T), B(T), U_1, \cdots, U_{A(T)}, V_1, \cdots, V_{B(T)}\} \qquad (1)$$

بر اساس سینگ و آچاریا [۲۴]، تحت هر یک از چهار حالت زمان توقف T معین، تابع درستنمایی به‌صورت زیر است

$$L_T(\lambda,\mu) = \prod_{i=1}^{A(T)} f(u_i,\lambda) \prod_{i=1}^{B(T)} g(v_i,\mu) = \lambda^{A(T)}\mu^{B(T)} e^{-(\lambda\sum_{i=1}^{A(T)} u_i + \mu\sum_{i=1}^{B(T)} v_i)}. \quad (۲)$$

در هر سیستم صف‌بندی وقتی‌که در لحظه مشخصی تعداد مشتری‌ها در سیستم n است، مدت‌زمانی که طول می‌کشد تا جمعیت سیستم به $n+1$ برسد، متغیر تصادفی دارای توزیع نمایی با پارامتر λ_n و وقتی‌که در لحظه مشخصی تعداد مشتری‌ها در سیستم n است، مدت‌زمانی که طول می‌کشد تا جمعیت سیستم به $n-1$ برسد، متغیر تصادفی دارای توزیع نمایی با پارامتر μ_n در نظر گرفته می‌شوند.

۳ مدل صف‌بندی $M/M/1$

مدل صف‌بندی $M/M/1$ سیستمی با ظرفیت نامتناهی و دارای یک خدمت دهنده هست که نرخ خدمت‌دهی آن برابر μ و مستقل از تعداد مشتری‌های در سیستم و نرخ مراجعه مشتری‌ها به سیستم نیز برابر λ و مستقل از وضعیت سیستم و μ است. در این مدل صف‌بندی، توزیع زمان بین ورودها و خدمت‌دهی‌ها، توزیع‌های نمایی به ترتیب با پارامترهای λ و μ فرض می‌شود به‌طوری‌که به ازای $\lambda_n = \lambda, n \geq 0$ و به ازای $\mu_n = \mu, n \geq 1$ هست. همچنین $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ پارامتر شدت ترافیک نام دارد که با توجه به آلن [۴] شرط پایایی این مدل صف‌بندی، $\rho < 1$ و متوسط تعداد مشتری‌ها در صف (L_q) و در سیستم (L_s) عبارت‌اند از

$$L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho}, \quad L_s = \frac{\rho}{1-\rho} \quad (۳)$$

و متوسط زمان انتظار هر مشتری در صف (W_q) و در سیستم (W_S) از روابط زیر به دست می‌آیند

$$W_q = \frac{\rho^2}{\lambda(1-\rho)}, \quad W_s = \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)}.$$

۱.۳ تابع هزینه مدل $M/M/1$

در هر سیستم صف‌بندی، هدف کاهش طول صف و زمان انتظار متقاضی است. وقت متقاضی ازنظر اجتماعی-اقتصادی ارزش دارد و اتلاف آن هزینه محسوب می‌شود. به‌طورکلی در یک سیستم صف‌بندی امید ریاضی کل هزینه‌ها در واحد زمان معیاری برای ارزیابی سیستم هست که هزینه‌ها بستگی به نوع و ماهیت آن دارد. در این مقاله به دلیل مهم بودن زمان انتظار متقاضی، تابع هزینه به‌صورت

$$C(\rho) = C_1 L_q + C_2(L_s - L_q) \quad (۴)$$

پیشنهاد می‌شود که در آن

۱) $C_1 L_q$، هزینه اتلاف وقت متقاضیان در صف تعریف می‌شود که میانگین کل این هزینه برابر با هزینه اتلاف وقت هر متقاضی در صف (C_1) در متوسط تعداد متقاضیان در صف یعنی L_q است.

۲) $C_2(L_s - L_q)$، هزینه اتلاف وقت متقاضیان در هنگام دریافت خدمت تعریف می‌شود که میانگین کل این هزینه برابر با هزینه اتلاف وقت هر متقاضی در حال دریافت خدمت (C_2) در متوسط تعداد متقاضیان در حال دریافت خدمت یعنی $(L_s - L_q)$ است.

بنابراین با جایگذاری رابطه (۳) در رابطه (۴)، تابع هزینه به‌صورت زیر نوشته می‌شود

$$C(\rho) = \frac{(C_1 - C_2)\rho^2 + C_2\rho}{1-\rho}. \quad (۵)$$

۴ برآوردهای بیز، E-بیز و بیز سلسله مراتبی

در این بخش برآوردهای بیز، E-بیز و بیز سلسله مراتبی پارامتر شدت ترافیک تحت تابع زیان آنتروپی عمومی به شکل

$$L(\hat{\theta},\theta) \propto (\frac{\hat{\theta}}{\theta})^p - p\ln(\frac{\hat{\theta}}{\theta}) - 1, \quad p \neq 0,$$

به دست می‌آید و سپس احتمال پایایی سیستم بر اساس برآوردگرهای یافته شده ρ محاسبه می‌شود.

به‌طورکلی برآورد بیز پارامتری مانند θ تحت تابع زیان آنتروپی عمومی به‌صورت

$$\hat{\theta}^B = [E(\theta^{-p}|\mathbf{X})]^{-\frac{1}{p}} \quad (۶)$$

است (دی و همکاران [۱۲]). همچنین در این بخش پارامترهای λ و μ مستقل و توزیع پیشین λ توزیع $\Gamma(a,b)$ با تابع چگالی احتمال

$$\pi(\lambda|a,b) = \frac{b^a}{\Gamma(a)}\lambda^{a-1}e^{-b\lambda}, \lambda > 0, a > 0, b > 0, \quad (۷)$$

و توزیع پیشین μ توزیع $Er(r,c)$ با تابع چگالی احتمال

$$\pi(\mu|r,c)=\frac{c^r}{\Gamma(r)}\mu^{r-1}e^{-c\mu}, \mu>0, r\in\{1,2,\cdots\}, c>0, \quad (8)$$

در نظر گرفته می‌شوند.

۱.۴ برآورد بیز

با توجه به رابطه (۲)

$$\begin{aligned}\pi(\lambda,\mu|\mathbf{X})=&\frac{(b+\sum_{i=1}^{A(T)}u_i)^{a+A(T)}(c+\sum_{i=1}^{B(T)}v_i)^{r+B(T)}}{\Gamma(a+A(T))\Gamma(r+B(T))}\\ &\times\lambda^{a+A(T)-1}\mu^{r+B(T)-1}\\ &\times e^{-\lambda(b+\sum_{i=1}^{A(T)}u_i)-\mu(c+\sum_{i=1}^{B(T)}v_i)} \quad (9)\end{aligned}$$

به دست می‌آید و با فرض $\phi(T)=\frac{\Gamma(a+A(T)-p)\Gamma(r+B(T)+p)}{\Gamma(a+A(T))\Gamma(r+B(T))}$، برآورد بیزی ρ تحت تابع زیان آنتروپی عمومی، با توجه به روابط (۶) و (۹) به‌صورت زیر است

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_T^B(b,c)&=\{E(\rho^{-p}|\mathbf{X})\}^{-\frac{1}{p}}\\ &=(\phi(T))^{-\frac{1}{p}}.\frac{c+\sum_{i=1}^{B(T)}V_i}{b+\sum_{i=1}^{A(T)}U_i}. \quad (10)\end{aligned}$$

در هر سیستم صف‌بندی حالت‌پایایی ویژگی مهمی است و تلاش می‌شود شرایطی فراهم گردد تا سیستم در وضعیت پایا قرار گیرد. بنابراین بر اساس برآورد بیز ρ، احتمال پایایی سیستم یعنی $P_B=P(\hat{\rho}_T^B<1)$ به روش شبیه‌سازی محاسبه می‌شود. نحوه محاسبه در بخش ۵ توضیح داده شد.

۲.۴ برآورد E-بیز

با توجه به هان [۱۴] در رابطه (۷)، a و b طوری در نظر گرفته می‌شوند که $\pi(\lambda|a,b)$ نسبت به λ کاهشی باشد. با مشتق‌گیری نسبت به λ از تابع چگالی (۷) رابطه زیر به دست می‌آید

$$\frac{d\pi(\lambda|a,b)}{d\lambda}=\frac{b^a\lambda^{a-2}e^{b\lambda}}{\Gamma(a)}\left((a-1)-b\lambda\right),$$

که در آن $b>0$ و $0<a\leq 1$ است. برگر [۶] نشان داد که بزرگ بودن b باعث کاهش استواری برآورد بیزی λ می‌شود. بنابراین ابر پارامتر b باید از بالاکران‌دار باشد یعنی $0<b<c_1$ که c_1 عددی ثابت است. هان [۱۶] نشان داد که مناسب‌ترین توزیع برای b توزیع یکنواخت است. لذا در این مقاله توزیع b یعنی $\pi(b)$ توزیع یکنواخت پیوسته در بازه $(0,c_1)$ در نظر گرفته می‌شود. همچنین با توجه به‌شرط $0<a\leq 1$، با در نظر گرفتن $a=1$ رابطه (۷) به‌صورت زیر است

$$\pi(\lambda|b)=be^{-b\lambda}, \quad \lambda>0, b>0. \quad (11)$$

تبدیل می‌شود. با استدلالی مشابه استدلال فوق درباره r و c در رابطه (۸)، توزیع c یعنی $\pi(c)$ توزیع یکنواخت پیوسته در بازه $(0,c_2)$ که c_2 عددی ثابت است در نظر گرفته می‌شود. همچنین با فرض $r=1$ رابطه (۸) به‌صورت

$$\pi(\mu|c)=ce^{-c\mu}, \quad ,\mu>0, c>0 \quad (12)$$

با توجه به تعریف ۲.۱ و با استفاده از روابط (۱۰) تا (۱۲) برآورد E-بیز ρ به‌صورت زیر به دست می‌آید

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_T^{EB}&=\frac{1}{c_1c_2}\int_0^{c_2}\int_0^{c_1}\hat{\rho}_T^B(b,c)\pi(b,c)dbdc\\ &=\frac{(\phi(T))^{-\frac{1}{p}}}{2c_1c_2}\left\{\left(c_2+\sum_{i=1}^{B(T)}V_i\right)^2-\left(\sum_{i=1}^{B(T)}V_i\right)^2\right\}\\ &\log\left(\frac{c_1+\sum_{i=1}^{A(T)}U_i}{\sum_{i=1}^{A(T)}U_i}\right). \quad (13)\end{aligned}$$

بر اساس برآورد E-بیز ρ، احتمال پایایی سیستم یعنی $P_{EB}=P(\hat{\rho}_T^{EB}<1)$ به روش شبیه‌سازی محاسبه می‌شود. نحوه محاسبه در بخش ۵ توضیح داده شد.

۳.۴ برآورد بیز سلسله مراتبی

با توجه به روابط (۱۲) و (۱۳) و با استفاده از تعریف ۲.۲، توزیع‌های پیشین سلسله مراتبی پارامترهای λ و μ به ترتیب عبارت‌اند از

$$\pi(\lambda)=\int_0^{c_1}\pi(\lambda|b)\pi(b)db=\frac{1-(1+c_1\lambda)e^{-c_1\lambda}}{c_1\lambda^2} \quad (14)$$

و

$$\pi(\mu)=\int_0^{c_2}\pi(\mu|c)\pi(c)dc=\frac{1-(1+c_2\mu)e^{-c_2\mu}}{c_2\mu^2}. \quad (15)$$

بنابراین با توجه به روابط (۲)، (۱۴) و (۱۵) توزیع پسین سلسله مراتبی λ و μ به‌صورت زیر به دست می‌آید

$$\pi^{**}(\lambda,\mu|\mathbf{X})=\frac{\lambda^{a+A(T)-3}\mu^{r+B(T)-3}e^{-\lambda(b+\sum_{i=1}^{A(T)}U_i)-\mu(c+\sum_{i=1}^{B(T)}V_i)}S(\lambda,\mu)}{\int_0^\infty\int_0^\infty \lambda^{a+A(T)-3}\mu^{r+B(T)-3}e^{-\lambda(b+\sum_{i=1}^{A(T)}U_i)-\mu(c+\sum_{i=1}^{B(T)}V_i)}S(\lambda,\mu)d\lambda d\mu}, \tag{۱۶}$$

که در آن

$$S(\lambda,\mu)=\left(1-c_1\lambda e^{-c_1\lambda}-e^{-c_1\lambda}\right)\left(1-c_2\mu e^{-c_2\mu}-e^{-c_2\mu}\right).$$

است. با استفاده از رابطه (۱۶)، برآورد بیز سلسله مراتبی ρ تحت تابع زیان آنتروپی عمومی از رابطه زیر به دست می‌آید

$$\hat{\rho}_T^{HB}=\left\{\frac{\int_0^\infty\int_0^\infty \lambda^{a+A(T)-(p+3)}\mu^{r+B(T)+p-3}e^{-\lambda(b+\sum_{i=1}^{A(T)}U_i)-\mu(c+\sum_{i=1}^{B(T)}V_i)}S(\lambda,\mu)d\lambda d\mu}{\int_0^\infty\int_0^\infty \lambda^{a+A(T)-3}\mu^{r+B(T)-3}e^{-\lambda(b+\sum_{i=1}^{A(T)}U_i)-\mu(c+\sum_{i=1}^{B(T)}V_i)}S(\lambda,\mu)d\lambda d\mu}\right\}^{-\frac{1}{p}}. \tag{۱۷}$$

احتمال پایایی سیستم بر اساس $\hat{\rho}_T^{HB}$ یعنی $P_{HB}=P(\hat{\rho}_T^{HB}<1)$ نیز به روش شبیه‌سازی به دست می‌آید.

۵ تحلیل عددی

فرض می‌شود سیستم تا زمان مشخصی مانند T_0 فعال است؛ به‌عبارت‌دیگر زمان توقف سیستم، T_0 در نظر گرفته‌شده و سپس تحت این زمان توقف، نحوه محاسبه برآوردهای E-بیز و بیز سلسله مراتبی ρ و مقادیر تابع هزینه و احتمال پایایی سیستم در روش‌های برآورد اشاره‌شده به روش شبیه‌سازی مونت‌کارلو ارائه می‌شود.

۱.۵ روش شبیه‌سازی

گام اول: از توزیع نمایی با پارامتر $\lambda=3$ یک نمونه به‌اندازه $A(T_0)$ $(U_1,\cdots,U_{A(T_0)})$ و از توزیع نمایی با پارامتر $\mu=5$ یک نمونه تصادفی به‌اندازه $B(T_0)$ $(V_1,\cdots,V_{B(T_0)})$ تولید می‌شود.

گام دوم: به ازای $a=3$، $b=4$، $c=5$، $r=3$ و p های مختلف، برآورد بیز ρ از رابطه (۱۰) و همچنین با فرض $c_1=6$ و $c_2=7$ برآورد E-بیز و برآورد بیز سلسله مراتبی ρ به ترتیب از روابط (۱۳) و (۱۷) به دست می‌آید.

گام سوم: به ازای $C_1=250$ و $C_2=200$ از رابطه (۵) مقدار تابع هزینه به ازای برآوردهای بیز، E-بیز و بیز سلسله مراتبی ρ محاسبه می‌شود.

گام‌های اول تا سوم ۲۰۰۰ بار تکرار شده و میانگین مقادیر برآوردهای بیز، E-بیز، بیز سلسله مراتبی و تابع هزینه در این ۲۰۰۰ بار به‌عنوان مقادیر نهایی $\hat{\rho}_B$، $\hat{\rho}_T^{EB}$، $\hat{\rho}_T^{HB}$ و $C(\rho)$ در نظر گرفته می‌شود.

اگر $X[\hat{\rho}_B]$، $X[\hat{\rho}_{EB}]$ و $X[\hat{\rho}_{HB}]$ به ترتیب تعداد $\hat{\rho}_B$، $\hat{\rho}_{EB}$ و $\hat{\rho}_{HB}$ های کوچک‌تر از ۱ در ۲۰۰۰ تکرار آزمایش باشند، آنگاه برآورد احتمال پایایی، بر اساس $\hat{\rho}_B$، $\hat{\rho}_{EB}$ و $\hat{\rho}_{HB}$ عبارت‌اند از

$$\hat{P}_B=\frac{X[\hat{\rho}_B]}{2000},\quad \frac{X[\hat{\rho}_{EB}]}{2000},\quad \hat{P}_{HB}=\frac{X[\hat{\rho}_{HB}]}{2000}.$$

نتایج شبیه‌سازی در جدول ۱ آورده شده است.

۲.۵ نحوه انتخاب برآوردگر

وقتی هدف یافتن مدل یا الگویی مناسب برای پارامتری در بین چند الگو بر اساس دو کمیت باشد، طوری‌که یک کمیت مینیمم و یک کمیت ماکسیمم مقدار را داشته باشد، روشی وجود دارد (پرادو و دلافونته [؟]) که ابتدا به نرمال‌سازی این کمیت‌ها می‌پردازد و البته نرمال‌سازی این دو کمیت متفاوت است. سپس با استفاده از یک رابطه که ترکیبی از این دو کمیت است، مدل یا الگوی مناسب انتخاب می‌شود. در این بخش به‌کمک روش پرادو و دلافونته [۲۲]، برآورد مناسب پارامتر شدت ترافیک مدل صف‌بندی $M/M/$ بر اساس دو کمیت هزینه سیستم و احتمال پایایی تعیین می‌شود که تشریح روش اشاره‌شده بدین‌صورت است.

در جدول ۱ به ازای هر p، برآوردهای احتمال پایایی محاسبه‌شده تحت روش‌های بیز، E-بیز و بیز سلسله مراتبی، نرمال‌سازی می‌شوند. بدین‌صورت که هرکدام از این مقادیر بر بزرگ‌ترین مقدارشان تقسیم‌شده و به ترتیب با نمادهای $\hat{P}_{NB}$، $\hat{P}_{NEB}$ و $\hat{P}_{NHB}$ نشان داده می‌شوند. با این کار، برآوردی که بالاترین احتمال پایایی را داشته باشد، بالاترین مقدار یعنی عدد ۱ به آن اختصاص داده می‌شود. برای نرمال‌سازی مقادیر تابع هزینه محاسبه‌شده تحت روش‌های بیز، E-بیز و بیز سلسله مراتبی، کوچک‌ترین مقدار بر هریک از مقادیر تقسیم‌شده و به ترتیب با نمادهای $C_N(\hat{\rho}_B)$، $C_N(\hat{\rho}_B)$ و $C_N(\hat{\rho}_B)$ نشان داده می‌شوند. تحت این روش، بالاترین مقدار یعنی عدد ۱ به برآوردی اختصاص داده می‌شود که کمترین مقدار هزینه را داشته باشد. در واقع نرمال‌سازی هردو معیار

به نحوی انجام می‌شود که هرچقدر هزینه سیستم پایین‌تر و احتمال پایایی بالاتر باشد، معیارهای نرمال‌شده مربوطه مقدار بالاتری به خود اختصاص می‌دهند. در ادامه به‌منظور تعیین برآوردگر مناسب، شاخصی برحسب هزینه سیستم نرمال‌شده و احتمال پایایی نرمال‌شده به‌عنوان شاخص تصمیم‌گیری به‌صورت

$$AE = (w_1 P_N) + (w_2 C_N) \qquad (18)$$

معرفی می‌شود. شاخص AE به‌طور مستقیم با هر دو معیار نرمال‌شده در ارتباط است. بدین‌صورت که هرچقدر احتمال پایایی بالاتر و هزینه سیستم پایین‌تر باشد، شاخص AE مقدار بالاتری به خود اختصاص می‌دهد. بنابراین برآوردگری مناسب‌تر است که دارای شاخص AE بزرگ‌تری باشد. با فرض $w_1 = 0/6$ و $w_2 = 0/4$ مقدار شاخص AE برای مقادیر نرمال‌شده احتمال پایایی و تابع هزینه محاسبه‌شده است. نتایج نرمال‌سازی و محاسبه AE به ازای هر p در جدول ۲ ثبت‌شده است. با توجه به شاخص AE در جدول ۲ می‌توان نتیجه گرفت که به ازای مقادیر مختلف p برآوردگر E–بیز پارامتر شدت ترافیک در حالت $p = -3/5$ و $p = -2/5$ از برآوردگرهای بیز و بیز سلسله مراتبی بهتر است، اما در بقیه حالت‌ها برآوردگر بیز از برآوردهای E–بیز و بیز سلسه مراتبی بهتر است و تحت مقادیر مختلف p در نظر گرفته‌شده در این مقاله، همواره برآوردگر E–بیز از برآوردگر بیز سلسله مراتبی بهتر است. به‌طورکلی مقایسه سه برآوردگر اشاره‌شده در این مقاله به مقدار p وابسته است. نتایج مراحل اشاره‌شده، در جدول ۱ آورده شده است.

جدول ۱. برآورد پارامتر شدت ترافیک، احتمال پایایی و تابع هزینه تحت روش‌های برآورد بیز، E–بیز و بیز سلسله مراتبی

	$p=-4$	$p=-3/5$	$p=-3$	$p=-2/5$	$p=2$	$p=2/5$	$p=3$	$p=4$	$p=4/5$
$\hat{\rho}_B$	۰٫۳۴۸۹	۰٫۵۲۷۶	۰٫۳۲۶۹	۰٫۵۳۵۴	۰٫۲۱۱۲	۰٫۳۱۲۴	۰٫۲۶۸۹	۰٫۲۳۳۲	۰٫۱۷۲۱
$\hat{\rho}_{EB}$	۰٫۵۲۴۴	۰٫۴۲۴۹	۰٫۵۲۱۷	۰٫۶۱۹۵	۰٫۳۴۸۹	۰٫۴۴۸۹	۰٫۵۴۱۸	۰٫۳۳۶۳	۰٫۵۴۱۹
$\hat{\rho}_{HB}$	۰٫۹۸۹۱	۰٫۹۹۶۱	۰٫۹۶۱۶	۰٫۹۶۷۴	۰٫۶۷۴۲	۰٫۶۹۲۱	۰٫۷۲۴۲	۰٫۷۷۰۷	۰٫۶۸۸۲
$\hat{P}_B$	۰٫۵۴۸۷	۰٫۵۹۸۲	۰٫۶۳۲۷	۰٫۶۷۴۹	۰٫۶۹۳۱	۰٫۷۰۱۲	۰٫۷۲۳۷	۰٫۷۶۵۱	۰٫۷۷۲۸
$\hat{P}_{EB}$	۰٫۷۵۶۱	۰٫۷۸۲۱	۰٫۷۹۵۱	۰٫۸۱۶۸	۰٫۸۸۹۴	۰٫۹۰۱۲	۰٫۹۴۵۶	۰٫۹۵۶۷	۰٫۹۷۳۱
$\hat{P}_{HB}$	۰٫۶۲۳۱	۰٫۶۸۷۵	۰٫۷۰۱۳	۰٫۷۵۶۵	۰٫۷۷۹۲	۰٫۷۶۵۱	۰٫۷۸۶۱	۰٫۷۹۸۱	۰٫۸۰۱۶
$C(\hat{\rho}_B)$	۱۱۶٫۵	۲۵۲٫۸	۱۰۵٫۱	۲۶۱٫۳	۵۶٫۳۸	۹۷٫۹۶	۸۶٫۲۴	۶۴٫۳۷	۴۳٫۳۶
$C(\hat{\rho}_{EB})$	۲۴۸٫۴	۱۶۳٫۵	۲۴۶٫۶	۳۷۶٫۱	۱۱۶٫۵	۱۸۱٫۲	۲۶۸٫۵	۱۰۹٫۹	۲۶۸٫۶
$C(\hat{\rho}_{HB})$	۲۲۶۳۶	۶۳۸۰۲	۶۲۱۲	۷۳۷۰	۴۸۳٫۶	۵۲۷٫۳	۶۲۰٫۲	۸۰۱٫۷	۵۱۷٫۴

جدول ۲. مقادیر نرمال‌شده احتمال پایایی و تابع هزینه و مقادیر شاخص AE تحت روش‌های برآورد بیز، E–بیز و بیز سلسله مراتبی

	$p=-4$	$p=-3/5$	$p=-3$	$p=-2/5$	$p=2$	$p=2/5$	$p=3$	$p=4$	$p=4/5$
$\hat{P}_{NB}$	۰٫۷۲۵۷	۰٫۷۵۳۴	۰٫۷۹۵۷	۰٫۸۲۶۳	۰٫۷۷۹۳	۰٫۷۷۸۱	۰٫۷۶۵۳	۰٫۷۹۹۷	۰٫۷۹۴۲
$\hat{P}_{NEB}$	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱
$\hat{P}_{NHB}$	۰٫۸۲۴۱	۰٫۸۷۹۰	۰٫۸۸۲۰	۰٫۹۲۶۲	۰٫۸۷۶۱	۰٫۸۴۸۹	۰٫۸۳۱۳	۰٫۸۳۴۲	۰٫۸۲۳۸
$C_N(\hat{\rho}_B)$	۱	۰٫۶۴۶۸	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱
$C_N(\hat{\rho}_{EB})$	۰٫۴۶۹۰	۱	۰٫۴۲۶۲	۰٫۶۹۴۸	۰٫۴۸۳۹	۰٫۵۴۰۶	۰٫۳۲۱۲	۰٫۵۸۵۷	۰٫۱۶۱۴
$C_N(\hat{\rho}_{HB})$	۰٫۰۰۵۱	۰٫۰۰۲۶	۰٫۰۱۶۹	۰٫۰۳۵۵	۰٫۱۱۶۶	۰٫۱۸۵۸	۰٫۱۳۹۱	۰٫۰۸۰۳	۰٫۰۸۳۸
$(AE)_B$	۰٫۸۳۵۴	۰٫۷۲۵۹	۰٫۸۷۷۴	۰٫۸۹۵۸	۰٫۸۶۷۶	۰٫۸۶۶۹	۰٫۸۵۹۲	۰٫۸۷۹۸	۰٫۸۷۶۵
$(AE)_{EB}$	۰٫۷۸۷۶	۱	۰٫۷۷۷۰	۱	۰٫۷۹۳۶	۰٫۸۱۶۲	۰٫۷۲۸۵	۰٫۸۳۴۳	۰٫۶۶۴۶
$(AE)_{HB}$	۰٫۴۹۶۵	۰٫۵۲۸۴	۰٫۵۳۵۹	۰٫۵۶۹۹	۰٫۵۷۲۳	۰٫۵۸۳۷	۰٫۵۵۴۴	۰٫۵۳۲۶	۰٫۵۲۷۸

۶ بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله برآورد پارامتر شدت ترافیک در مدل صف‌بندی $M/M/۱$ به روش‌های بیز، E-بیز و بیز سلسله مراتبی تحت تابع زیان آنتروپی عمومی موردمطالعه قرار گرفت. سپس برای ارزیابی روش‌های برآورد، شاخصی (AE) بر اساس احتمال پایایی و هزینه سیستم طوری تعریف می‌شود که هرچقدر هزینه سیستم مینیمم و احتمال پایایی آن ماکسیمم باشد، مقدار آن شاخص نیز بزرگ‌تر شود. بنابراین در این مقاله، برآوردگری که دارای شاخص AE بزرگ‌تری باشد، برآورد مناسب پارامتر شدت ترافیک مدل صف‌بندی $M/M/۱$ انتخاب می‌شود. در انتهای مقاله برآوردگرهای پارامتر شدت ترافیک، به ازای p های مختلف، بر اساس شاخص پیشنهادی با یکدیگر مقایسه شدند. مشخص شد که همواره برآوردهای بیز و E-بیز از برآورد بیز سلسله مراتبی بهترند؛ اما عملکرد برآوردگرهای بیز و E-بیز وابسته به مقدار p است. به ازای برخی مقادیر p، برآوردگر E-بیز بهتر و در برخی موارد برآوردگر بیز بهتر عمل می‌کند.

تقدیر و تشکر

نویسندگان مقاله از سردبیر و داوران محترم مجله در ارزیابی مقاله و پیشنهادهای ارزنده‌شان قدردانی و تشکر می‌کنند.

مراجع

[۱] مدرس، م؛ و تیموری، ا. (۱۳۹۴). *نظریه صف*، تهران: مرکز نشر آثار علمی دانشگاه علم و صنعت.

[۲] یعقوب‌زاده شهرستانی، ش. (۱۴۰۱)، تعیین مدل بهینه در سیستم صف‌بندی $\{E_r/M/۲, r = ۱, ۲, ...\}$، *اندیشه آماری*، دوره‌ی ۲۷، شماره‌ی ۲، صص ۳۳-۳۹.

[۳] یعقوب‌زاده شهرستانی، ش. (۱۴۰۲)، برآورد پارامتر شدت ترافیک و احتمال پایایی مدل صف‌بندی $M/M/c$ تحت یک زمان توقف در سیستم ، *مجله علوم آماری*، دوره‌ی ۱۷، شماره‌ی ۱، صص ۲۱۹-۲۳۳.

[4] Allen, A. (1990). *Probability, statistics and queueing theory with computer science applications*, 2nd ed. Academic Press, Boston.

[5] Ando, T. and Zellner, A. (2010). Hierarchical Bayesian analysis of the seemingly unrelated regression and simultaneous equations models using a combination of direct monte carlo and importance sampling techniques, *Bayesian Analysis*, **5**, 65-96.

[6] Berger, J. O. (1985). *Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis*, second ed., Springer-Verlag, New York.

[7] Clarke, A. B. (1957). Maximum likelihood estimates in a simple queue, *Annals of Mathematical Statistics*, **28**, 1036-1040.

[8] Cressie, N. and Tingley, M. P. (2010). Comment: Hierarchical statistical modeling for paleoclimate reconstruction, *Journal of the American Statistical Association*, **105**, 895-900.

[9] Chowdhury, S. and Mukherjee, S. P. (2011). Estimation of waiting time distribution in an $M/M/1$ queue, *OPSEARCH*, **48**, 306-317.

[10] Chowdhury, S. and Mukherjee, S. P. (2013). Estimation of trafc intensity based on queue length in a single $M/M/1$ Queue, *Communication in Statistics–Theory and Methods*, **42**, 2376-2390.

[11] Chandrasekhar, P., Vaidyanathan, V. S., Durairajan, T. M., and Yadavalli, V. S. S. (2021). Classical and Bayes estimation in the $M/D/1$ queueing system, *Communications in Statistics - Theory and Methods*, **22**, 5411-5421.

[12] Dey, D. K., Ghosh, M., and Srinivasan, C. (1987). Simultaneous Estimation of parameters under entropy loss, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **15**, 347-363.

[13] Goldenshluger, A. and Koops, D. T. (2019). Nonparametric Estimation of service time characteristics in infinite-server queues with nonstationary poisson input, *Stochastic Systems*, **9**, 183-207.

[14] Han, M. (1977). The structure of hierarchical prior distribution and its applications, *Chinese Operations Research and Management Science*, **6**, 31-40.

[15] Han, M. (2009). E-Bayesian estimation and hierarchical bayesian estimation of failure rate, *Applied Mathematical Modelling*, **33**, 1915-1922.

[16] Han, M. (2011). E-Bayesian estimation of the reliability derived from binomial distribution, *Applied Mathematical Modelling*, **35**, 2419-2424.

[17] Jaheen, Z. F. and Okasha, H. M. (2011). E-Bayesian estimation for the burr type XII model based on type-2 censoring, *Applied Mathematical Modelling*, **35**, 4730-4737.

[18] Lindley, D. V. and Smith, A. F. (1972). Bayes estimation for the linear model, *Journal of the Royal Statistical Society-Series B*, **34**, 1-41.

[19] Muddapur, M. V. (1972). Bayesian estimates of parameters in some queueing models, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **24**, 327-331.

[20] Micheas, A. C. and Wikle, C. K. (2009). A Bayesian Hierarchical nonoverlapping random disc growth model, *Journal of the American Statistical Association*, **104**, 274-283.

[21] Osei, F. B. and Duker, A. A. (2011). Hierarchical Bayesian modeling of the space-time diffusion patterns of cholera epidemic in Kumasi, *Ghana. Statistica Neerlandica*, **65**, 84-100.

[22] Parado, M. J. and De la Fuente, D. (2008). Optimal selection of the service Rate for a finite input source fuzzy queuing system, *Fuzzy Sets and Systems*, **159(3)**, 325-342.

[23] Richard, D. M. (2011). A Bayesian hierarchical model for the measurement of working memory capacity, *Journal of Mathematical Psychology*, **55**, 8-24.

[24] Sing, S.K. and Acharya, S.K. (2018). Equivalence between bayes and the maximum likelihood estimator in $M/M/1$ queue, *Communication in Statistics-Theory and Methods*, **48**, 4780-4793.

[25] Schweer, S. and Wichelhaus, C. (2020). Nonparametric Estimation of the service time distribution in discrete-time queueing networks, *Stochastic Processes and their Applications*, **130**, 4643-4666.

[26] Thiruvaiyaru, D. and Basawa, I. V. (1992). Empirical Bayes estimation for queueing systems and networks, *Queueing System*, **11**, 179–202.

[27] Wang, J., Li, D., and Chen, D. (2012). E-Bayesian estimation and hierarchical bayesian estimation of the system reliability parameter, *Systems Engineering Procedia*, **3**, 282-289.

Optimizing the Estimation of the Traffic Intensity Parameter of Queuing Model $M/M/1$ under Bayeian estimation methods

shahram Yaghoobzadeh Shahrastani[1] and Amrollah Jafari[2]

Abstract:

In this article, the queuing model $M/M/1$ is considered, in which the inter-arrival of customers follows an exponential distribution with the parameter λ, and the service times follow an exponential distribution with the parameter μ, which are independent of the inter-arrival times. It is also assumed that the system is active until T. Then, under this stopping time (T), Bayesian, E-Bayesian, and hierarchical Bayesian estimations of the traffic intensity parameter of this queuing model are obtained under the general entropy loss function, considering the gamma and Erlang prior distributions for parameters λ and μ, respectively. Using numerical analysis and based on an index calculated according to reliability probability and cost function, Bayesian, E-Bayesian, and hierarchical Bayesian estimations are compared.

Keywords: Stationary probability, Cost function, E-Bayesian estimation, Hierarchical Bayesian estimation,The $M/1/1$ queuing system.

[1] **Department of Statistics, Payame Noor University, Tehran, Iran**

[2] **Department of Statistics, Payame Noor University, Tehran, Iran**