مدل بهینه در خانواده سیستم‌های صف‌بندی با ظرفیت نامتناهی بر اساس توزیع ارلانگ

رضا زارعی[۱]، شهرام یعقوب‌زاده شهرستانی[۲]، امراله جعفری[۳]

چکیده:
تابع هزینه و احتمال پایایی سیستم دو معیار کلیدی در طراحی سیستم‌های صف‌بندی به شمار می‌آیند. در این مقاله هدف طراحی یک سیستم صف‌بندی تک باجه‌ای با ظرفیت نامتناهی است که در آن زمان‌های سرویس در مدل اول و زمان‌های بین ورود به سیستم در مدل دوم دارای توزیع ارلانگ می‌باشند. به این منظور، شاخصی جدید بر اساس تابع هزینه و احتمال پایایی سیستم معرفی می‌شود که بزرگ‌تر بودن آن نشان‌دهنده بهینه بودن مدل می‌باشد. چند مثال عددی و یک مثال کاربردی برای تشریح جزئیات محاسباتی روش پیشنهادی ارائه شده است.

واژه‌های کلیدی: توزیع ارلانگ، ظرفیت نامتناهی، تابع هزینه، احتمال پایایی، شاخص کارایی.

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۰۱/۰۸
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۱۱/۱۱

۱ مقدمه

نظریه صف‌بندی یکی از ابزارهای کلیدی برای مدل‌سازی و تجزیه‌وتحلیل کیفی و کمی انواع سیستم‌ها شامل سیستم‌های ارتباطی، شبکه‌های کامپیوتری، حمل‌ونقل و سایر سیستم‌های فنی است [۱۴]. یکی از مهم‌ترین و پرکاربردترین انواع سیستم‌های صف، شبکه‌های صف هستند که در حوزه‌های مختلفی مانند تکنولوژی اطلاعات، زنجیره تأمین، کنترل ترافیک، اینترنت و سیستم‌های تولیدی کاربرد دارند [۵]. شبکه‌های صف ترکیبی از چند سیستم فرعی بوده که ازنظر ورودی به یکدیگر وابسته هستند ولی به‌طور مستقل به ارائه خدمت می‌پردازند و مشتریان برای دریافت تعدادی از این خدمات ارائه شده به سیستم مراجعه می‌کنند؛ بنابراین، برای استقرار سیستمی مناسب، بهینه‌سازی چنین سیستم‌هایی با توجه به کاربرد فراوانی که دارند، حائز اهمیت است. نحوه بهینه‌سازی چند مدل صف‌بندی با ظرفیت متناهی، با رویکردهای مختلف توسط باسکت و همکاران [۴] و بهینه‌سازی مدل صف‌بندی $M/M/s/K$ با در نظر گرفتن متوسط نرخ مراجعه و نرخ سرویس مشتریان به‌عنوان متغیرهای فازی، توسط پارادو و دلافونته [۱۵] مطالعه شده است.

استنباط آماری نقش مؤثری در نظریه صف‌بندی دارد و با استفاده از این ابزار قدرتمند، محققان می‌توانند پارامترها و معیارهای ارزیابی مهمی مانند پارامتر شدت ترافیک، متوسط تعداد متقاضیان در صف و سیستم و متوسط زمان انتظار متقاضیان در صف و سیستم در مدل‌های صف‌بندی را به روش‌های مختلف برآورد کنند. یک گروه از این مدل‌ها، مدل‌های صف‌بندی دارای توزیع ارلانگ هستند که پارامترهای مختلفی در این‌گونه مدل‌ها توسط نویسندگان متعددی به روش‌های آماری برآورد شده است. برآورد پارامترها و بررسی خواص ریاضی آن‌ها در مدل $M/Er_K/1$ توسط گوپتا [۹] و برآورد زمان انتظار متقاضیان در سیستم صف‌بندی $Er_K/M/1$ توسط فیکسچر [۸] موردمطالعه قرارگرفته است. تحلیل بیزی پارامترهای مدل‌های $Er_K/M/1$ و $Er_K/M/c$ توسط وایپر [۱۹]، تحلیل بیزی پارامترهای مدل‌های $M/Er_K/1$ و $M/H_K/1$ توسط اینسیوا [۱۱]، برآورد پارامتر شدت ترافیک مدل $M/Er_K/1$ توسط هاریشچاندرا و رائو [۱۰] انجام‌شده است. تحقیقی هم در زمینه کنترل کیفیت در مدل $M/Er_K/1$ توسط جاین و دهیانی [۱۲] صورت گرفته است. برآورد بیزی پارامترها در مدل $M/Er_K/1$ توسط چادوری [۶]، برآورد بیزی پارامترها در انواع مدل‌های صف‌بندی توسط خوزه و مانوهاران [۱۳]، برآورد پارامترها در مدل $M/Er_K/1$ به روش‌های درستنمایی ماکسیمم و بیزی توسط وایدیاناتان و چاندرانسکار [۱۸] و برآورد بیزی پارامترها با استفاده از توزیع پیشین دومتغیره توسط دپسی و خوزه [۷] ارائه شده است.

در بیشتر مسائل واقعی هزینه به‌عنوان یکی از مهم‌ترین عوامل

[۱] گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه گیلان، رشت، ایران. (نویسنده مسئول: rezazarei.r@gmail.com)
[۲] گروه آمار، دانشگاه پیام نور تهران، تهران، ایران.
[۳] گروه آمار، دانشگاه پیام نور تهران، تهران، ایران.

تصمیم‌گیری در هر سیستم صف‌بندی به شمار می‌آید و همواره سعی می‌شود که هزینه سیستم مینیمم گردد. از طرفی حالت پایایی هر سیستم صف‌بندی یکی از ویژگی‌های مهم آن محسوب می‌شود. هرگاه یک سیستم صف‌بندی پس از مدت‌زمانی به حالت موازنه برسد، یعنی هرگاه تعداد واردشدگان به سیستم با تعداد خارج شدگان از آن، یکسان باشد، در این حالت گویند که سیستم در حالت پایا قرار دارد. در نظریه صف‌بندی همواره سعی می‌شود شرایطی فراهم گردد تا یک سیستم صف‌بندی در حالت پایا قرار گیرد. از احتمال پایایی سیستم می‌توان به‌عنوان معیاری برای مقایسه برآوردهای پارامتر شدت ترافیک استفاده کرد. برآوردهای ماکسیمم درستنمایی و بیزی پارامتر شدت ترافیک مدل صف‌بندی $M/M/c$ بر اساس احتمال پایایی توسط یعقوب‌زاده شهرستانی [۲] مقایسه شدند.

در این مقاله شاخصی جدید بر اساس تابع هزینه و احتمال پایایی سیستم معرفی و با استفاده از آن برای دو خانواده از مدل‌های صف‌بندی با ظرفیت نامتناهی $\{M/Er_K/1, K \in N\}$ و $\{Er_K/M/1, K \in N\}$، سیستم بهینه تعیین می‌شود. در واقع، شاخص نرخ کارایی سیستم مدلی را بهینه می‌داند که دارای کمترین هزینه و بیشترین احتمال پایایی است. ادامه مقاله به این صورت سازمان‌دهی شده است: در بخش دوم، برخی مفاهیم مقدماتی و توصیف دو مدل تحت بررسی در این مقاله ارائه شده است. در این بخش شاخص‌های کلیدی هر یک از مدل‌ها با جزئیات آورده شده است. در بخش سوم، ضمن معرفی شاخص نرخ کارایی سیستم، چگونگی فرآیند انتخاب مدل بهینه بر اساس این شاخص و مؤلفه‌های دو خانواده از مدل‌های صف‌بندی تحت بررسی، ارائه شده است. به‌منظور تشریح هرچه بیشتر مطالب ذکرشده در بخش دوم و سوم، مثال‌های عددی با ذکر جزئیات محاسباتی در بخش چهارم ارائه شده است. در پایان، نتیجه‌گیری و بحث در بخش پنجم آورده شده است.

۲ توصیف سیستم‌های تحت بررسی

در این بخش توزیع ارلانگ و خانواده مدل‌های صف‌بندی $\{M/Er_K/1, r \in N\}$ و $\{Er_K/M/1, k \in N\}$ به‌طور مختصر معرفی می‌شوند.

۱.۲ توزیع ارلانگ

سیستمی را در نظر بگیرید که دارای r جزء با عملکرد مشابه و دارای توزیع نمایی $T_i \sim E(\lambda)$ بوده و عملکرد سیستم مستلزم فعالیت یکی از اجزاء آن باشد. علاوه بر این، فرض کنید در صورت ازکارافتادگی جزء اول سیستم، جزء دوم به‌طور خودکار شروع به فعالیت نموده و این فرآیند برای تمام اجزای سیستم تکرار خواهد شد. با در نظر گرفتن $T = T_1 + ... + T_r$ به‌عنوان متغیر طول عمر کل سیستم، ثابت‌شده است که

$$F_T(t) = 1 - \sum_{i=1}^{r-1} \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^i}{i!}. \qquad (1)$$

با مشتق‌گیری از رابطه ۱، داریم

$$f_T(t) = \frac{\lambda^{r-1}}{\Gamma(r)} t^{r-1} e^{-\lambda t}, \qquad t > 0, \qquad \lambda > 0, \qquad r \in \{1, 2, \cdots\}.$$

این توزیع در متون آماری به توزیع ارلانگ معروف است و آن را با نماد $Er(r, \lambda)$ نشان می‌دهیم.

تذکر ۱.۲. *توزیع ارلانگ حالت خاص توزیع گاما $\Gamma(r, \lambda)$ می‌باشد که در آن پارامتر r فقط مقادیر گسسته و صحیح مثبت را اختیار می‌کند. علاوه بر این، در حالت خاص $r = 1$، توزیع ارلانگ به توزیع نمایی با پارامتر λ تبدیل می‌گردد.*

ساده‌ترین مدل‌های صف‌بندی آن‌هایی هستند که مؤلفه‌های اصلی آن‌ها بر اساس متغیر تصادفی نمایی صورت‌بندی شده‌اند. در واقع، خاصیت بی‌حافظه بودن توزیع نمایی تجزیه‌وتحلیل چنین مدل‌هایی را بسیار ساده نموده است. بیشتر مسائل صف‌بندی در چارچوب مدل‌های نمایی فرمول‌بندی می‌شوند. بااین‌وجود، تمامی مؤلفه‌های یک سیستم صف مانند مدت‌زمان سرویس و زمان بین دو ورود مشتری‌ها در سیستم‌های صف‌بندی، در شرایط مختلف می‌توانند از توزیع‌های متنوعی پیروی نمایند که توزیع ارلانگ یکی از پرکاربردترین این توزیع‌ها می‌باشد. با تغییر r، در صورت ثابت ماندن میانگین، توابع مختلفی به دست می‌آید که نشان‌دهنده تنوع بالای مجموعه توابع ارلانگ بوده و بر این اساس داده‌های آماری بسیاری از متغیرهای تصادفی با یکی از توابع این مجموعه منطبق می‌شود. به‌عنوان‌مثال، اگر داده‌های آماری متغیر تصادفی مدت‌زمان سرویس (خدمت) در یک سیستم صف‌بندی در اختیار باشد به کمک این داده‌ها میانگین و واریانس این متغیر تصادفی تخمین زده می‌شود. با توجه به متنوع بودن توزیع ارلانگ، امکان زیادی وجود دارد که داده‌های موردنظر با آن تطبیق کند. یکی از محاسن توزیع ارلانگ همین خاصیت تنوع آن است.

۲.۲ سیستم صف‌بندی $M/Er_K/1$

سیستم صف‌بندی را در نظر بگیرید که در آن مشتری‌ها با نرخ λ وارد سیستم شده و زمان بین ورودها، متغیرهای تصادفی مستقل دارای توزیع نمایی با پارامتر λ باشند. همچنین، در این سیستم فرض می‌کنیم زمان‌های سرویس دارای توزیع ارلانگ $Er(K, K\mu)$ با تابع چگالی احتمال زیر باشند

$$f(t|\mu, K) = \frac{(K\mu)^K}{\Gamma(K)} t^{K-1} e^{-K\mu t}, \quad t > 0, \mu > 0, K \in N,$$

که در آن مقادیر پارامترهای λ، μ و K نامعلوم در نظر گرفته می‌شوند.

در این مقاله برای برآورد مقادیر پارامترهای ذکرشده از رویکرد بیز استفاده‌شده است. به این منظور، فرض کنید Λ متغیری تصادفی دارای توزیع گاما $\Gamma(v_1, a)$ باشد و علاوه بر آن، توزیع پیشین توأم (μ, K) توزیعی با تابع چگالی زیر باشد [۱۶]

$$f(\mu, K) \propto \frac{\theta^{K-1} K (K\mu)^{Kv_2 - 1} e^{-bK\mu}}{\Gamma(K)^{v_2}},$$
$$\mu > 0, \quad \theta > 0, \quad b > 0, \quad K,\ v_2 \in N,$$

به‌طوری‌که b، θ و v_2 ثابت‌های معلوم و $\theta \left(\frac{v_2}{b}\right)^{v_2} < 1$ هستند.

در این صورت می‌توان نشان داد که تابع جرم احتمال K به‌صورت زیر به دست می‌آید [۱۹]

$$P_K(k) \propto \frac{\Gamma(kv_2)}{\Gamma(k)^{v_2}} (\frac{\theta}{b^{v_2}})^{k-1}, \quad k \in N.$$

با در نظر گرفتن $v_2 = 1$ و $\theta < b$، تابع جرم احتمال متغیر تصادفی K به‌صورت زیر می‌باشد

$$P_K(k) = (1 - \frac{\theta}{b})(\frac{\theta}{b})^{k-1}, \quad k = 1, 2, \cdots$$

همان‌طور که می‌دانیم در سیستم صف‌بندی $M/Er_K/1$، پارامتر شدت ترافیک سیستم، $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$، تحت شرط $\rho < 1$ پایا است [۱۱]. ازاین‌رو، با توجه به اهمیت حالت پایایی در یک سیستم صف، ضروری است که مقدار متوسط ρ تحت شرط $\rho < 1$ تعیین گردد. به‌عبارت‌دیگر

$$E(\rho|\rho < 1) = \frac{bv_1}{av_2 P_\rho} \sum_{k=1}^{\infty} P_K(k)(1 - \frac{1}{kv_1})^{-1} \times \left[1 - \sum_{i=0}^{v_1} \binom{kv_2 + i - 2}{i} p_k^{kv_2 - 1}(1 - p_k)^i\right], \qquad (۲)$$

که در آن $p_k = kb/(kb + a)$ و

$$\begin{aligned} P_\rho &= P(\rho < 1) \\ &= 1 - \sum_{k=1}^{\infty} P_K(k) \sum_{i=1}^{v_1 - 1} \binom{kv_2 + i - 1}{i} p_k^{kv_2}(1 - p_k)^i. \end{aligned}$$

بر اساس تعریف، احتمال پایایی برای هر یک از مدل‌های $\{M/Er_K/1, K \in N\}$ به‌صورت زیر به دست می‌آید

$$\begin{aligned} P_{\rho|K=k} &= P(\rho < 1|K = k) \\ &= 1 - \sum_{i=1}^{v_1 - 1} \binom{kv_2 + i - 1}{i} p_k^{kv_2}(1 - p_k)^i. \qquad (۳) \end{aligned}$$

علاوه بر این، توزیع تعداد مشتریان موجود در سیستم در حالت پایا نیز از رابطه زیر قابل‌محاسبه است

$$\pi_n = (1 - \rho) \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \frac{\tau^{n-i-1}}{(1 - \tau)^{Ki}} A_i, \qquad (۴)$$

که در آن

$$A_i = \left[\binom{Ki}{n - i}\tau + \binom{Ki}{n - i - 1}\right], \quad \tau = \frac{K\rho}{\rho + K}, \quad n \geq 0.$$

فرض کنید $\{X_i,\ i \geq 1\}$، یک دنباله از متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع و X_j تعداد متقاضیان واردشده به سیستم در طول زمان سرویس jام باشند. در این صورت تابع جرم احتمال X_j عبارت است از [۱۷]

$$P_X(x) = \binom{x + K - 1}{x} (\frac{\lambda}{\lambda + K\mu})^x (\frac{K\mu}{\lambda + K\mu})^K, x = 0, 1, 2, \cdots$$

توجه کنید که با فرض $p = \frac{K\mu}{\lambda + K\mu}$، هر یک از X_jها دارای توزیع دوجمله‌ای منفی $NB(K, p)$ می‌باشند.

۱.۲.۲ محاسبه شاخص‌های ارزیابی سیستم

در این زیربخش با استفاده از روابط (۲) تا (۴)، معیارهای ارزیابی سیستم صف‌بندی تحت بررسی محاسبه و ارائه می‌گردد.

بر اساس تعریف، متوسط تعداد متقاضیان در سیستم از رابطه زیر به دست می‌آید

$$\begin{aligned} L_s &= \sum_{i=0}^{\infty} iP(X = i) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} i \binom{i + K - 1}{i} (\frac{\lambda}{\lambda + K\mu})^i (\frac{K\mu}{\lambda + K\mu})^K, \qquad (۵) \end{aligned}$$

با استفاده از مشتق‌گیری نسبت به λ از رابطه

$$\sum_{i=0}^{\infty} \binom{i + K - 1}{i} (\frac{\lambda}{\lambda + K\mu})^i (\frac{K\mu}{\lambda + K\mu})^K = 1 \qquad (۶)$$

داریم

$$L_s = \frac{\lambda}{\mu} = \rho. \qquad (۷)$$

برای تعیین متوسط تعداد متقاضیان در صف از رابطه زیر استفاده می‌کنیم

$$\begin{aligned} L_q &= \sum_{i=1}^{\infty}(i-1)P(X=i) \\ &= L_s - \left(1-\left(\frac{K\mu}{\lambda+K\mu}\right)^K\right) \\ &= \frac{(\lambda-\mu)(\lambda+K\mu)^K + K^K\mu^{K+1}}{\mu(\lambda+K\mu)^K} \\ &= \frac{K^K-(1-\rho)(K+\rho)^K}{(K+\rho)^K}. \end{aligned} \qquad (8)$$

اکنون، با استفاده از روابط به‌دست‌آمده، متوسط مدت‌زمان انتظار در صف و متوسط مدت‌زمان انتظار در سیستم برای هر متقاضی، به ترتیب از روابط زیر تعیین می‌گردند

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{K^K-(1-\rho)(K+\rho)^K}{\lambda(K+\rho)^K}, \quad W_s = \frac{L_s}{\lambda} = \frac{1}{\mu}. \qquad (9)$$

۳.۲ سیستم صف‌بندی $Er_K/M/1$

سیستم صف‌بندی را در نظر بگیرید که در آن زمان بین دو ورود متوالی متقاضیان دارای توزیع ارلانگ $Er(K, K\lambda)$ با تابع چگالی احتمال

$$f(t|K,\lambda) = \frac{K\lambda}{\Gamma(K)}(K\lambda t)^{K-1}e^{-K\lambda t}, \quad t>0, \lambda>0, K\in N$$

و زمان‌های سرویس دارای توزیع نمایی با پارامتر μ است.

همان‌گونه که در زیربخش ۲.۲ بیان شد، برای برآورد پارامترهای موردمطالعه، از رویکرد بیز استفاده‌شده است. به این منظور، فرض کنید μ یک متغیر تصادفی با توزیع $\Gamma(v_1, a)$ بوده و توزیع پیشین توأم (λ, K) توزیعی با تابع چگالی زیر باشد

$$f(\lambda, K) \propto \frac{\theta^{K-1}K(K\lambda)^{Kv_2-1}e^{-bK\lambda}}{\Gamma(K)^{v_2}}, \quad \lambda>0, K, v_2\in N,$$

که در آن $\theta, b > 0$ و v_2 ثابت‌های معلوم با شرط $\theta\left(\frac{v_2}{b}\right)^{v_2} < 1$ می‌باشند [۱۶]. در این صورت، می‌توان نشان داد که تابع جرم احتمال K به‌صورت زیر است

$$P_K(k) = \left(1-\frac{\theta}{b}\right)\left(\frac{\theta}{b}\right)^{k-1}, \quad k=1,2,\cdots.$$

با در نظرگرفتن شرط پایایی سیستم، $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$، امید ریاضی پارامتر شدت ترافیک به ازای $v_1 > 1$ عبارت است از

$$\begin{aligned} &E(\rho|\rho<1) \\ &= \frac{av_2}{b(v_1-1)P_\rho}\sum_{k=1}^{\infty}P_K(k)\sum_{i=0}^{v_1-2}\binom{kv_2+i-1}{i}p_k^{kv_2}(1-p_k)^i, \end{aligned} \qquad (10)$$

که در آن p_k دارای تعریف یکسان با بخش (۲.۲) و

$$P_\rho = P(\rho<1) = \sum_{k=1}^{\infty}P_K(k)\sum_{i=0}^{v_1-1}\binom{kv_2+i-1}{i}p_k^{kv_2}(1-p_k)^i.$$

ازاین‌رو، احتمال پایایی برای هرکدام از مدل‌های $\{Er_K/M/1, K\in N\}$ را می‌توان از رابطه زیر تعیین نمود

$$\begin{aligned} P_{\rho|K=k} &= P(\rho<1|K=k) \\ &= \sum_{i=0}^{v_1-2}\binom{kv_2+i-1}{i}p_k^{kv_2}(1-p_k)^i. \end{aligned} \qquad (11)$$

۱.۳.۲ محاسبه شاخص‌های ارزیابی سیستم

در این زیربخش توزیع تعداد متقاضیان در سیستم $\{Er_K/M/1, K\in N\}$ و سایر شاخص‌های ارزیابی برای مدل اثبات و ارائه می‌شود.

تعداد افراد موجود در سیستم $\{Er_K/M/c, K\in N, c\geq 1\}$ دارای توزیعی با تابع جرم احتمال به‌صورت زیر است

$$\pi_n = \begin{cases} 1-\rho-c\rho\sum_{j=1}^{c-1}\Pi(j-1)\left(\frac{1}{j}-\frac{1}{c}\right), & n=0, \\ \frac{c\rho}{n}\Pi(n-1), & 1\leq n\leq c-1, \\ \rho\Pi(n-1) & , n\geq c, \end{cases} \qquad (12)$$

که در آن $\Pi(n)$ دارای تعریف زیر است

$$\Pi(n) = \begin{cases} \sum_{i=n}^{c-1}(-1)^{i-n}\binom{i}{n}U_i, & n=0,1,\cdots,c-2, \\ D\omega^{n-c}, & n\geq c-1, \end{cases} \qquad (13)$$

توجه کنید که در رابطه (۱۳)، ω ریشه معادله $\omega = G(c\mu(1-\omega))$ می‌باشد و منظور از $G(.)$، تبدیل لاپلاس توزیع زمان بین دو ورود متوالی متقاضیان است $(0<\omega<1)$. همچنین

$$U_i = DC_i\sum_{j=i+1}^{c}\frac{\binom{c}{j}}{C_j(1-g_j)}\left[\frac{c(1-g_j)-j}{c(1-\omega)-j}\right], \quad i=0,1,..,c-1,$$

$$g_j = G(j\mu), \quad j=1,2,\cdots,c,$$

$$C_j = \begin{cases} 1, & j=0, \\ \prod_{i=1}^{j}\left(\frac{g_i}{1-g_i}\right), & j=1,\cdots,c, \end{cases}$$

$$D = \left[\frac{1}{1-\omega}+\sum_{j=i+1}^{c}\frac{\binom{c}{j}}{C_j(1-g_j)}\left(\frac{c(1-g_j)-j}{c(1-\omega)-j}\right)\right]^{-1}, \qquad (14)$$

هستند [۳].

با در نظرگرفتن $c=1$، نتایج زیر برقرار هستند

الف. رابطه (۱۲) را می‌توان به‌صورت زیر بازنویسی نمود

$$\pi_n = \begin{cases} 1-\rho, & n=0, \\ \\ \rho\Pi(n-1), & n\geq 1, \end{cases} \tag{15}$$

ب. رابطه (۱۰) را می‌توان به‌صورت $\Pi(n) = D\omega^{n-1}, n \geq 1$ بازنویسی نمود.

پ. می‌توان نشان داد که تبدیل لاپلاس توزیع زمان بین دو ورود متوالی متقاضیان در این حالت به‌صورت $G(s) = (K\lambda/(K\lambda+s))^K$ است. ازاین‌رو، با در نظر گرفتن $x=\omega^{\frac{1}{K}}$، معادله $\omega = G(c\mu(1-\omega))$ را می‌توان به‌صورت معادله $x^{K+1}-(1+K\rho)x+K\rho=0$ بازنویسی نمود.

ت. رابطه (۱۴) نتیجه می‌دهد که

$$g_1 = \frac{k\lambda}{k\lambda+\mu},\ C_0 = 1,\ C_1 = \frac{k\lambda}{\mu},\ D=\omega(1-\omega),\ U_0 = 1-\omega. \tag{16}$$

اکنون، توزیع تعداد متقاضیان در سیستم با استفاده از روابط (۱۵) و (۱۶) به‌صورت زیر به دست می‌آید

$$\pi_n = \begin{cases} 1-\rho, & n=0, \\ \\ \rho(x^{-K}-x^{1-K})(x^K)^n, & n\geq 1. \end{cases} \tag{17}$$

علاوه بر این، شاخص‌های متوسط تعداد متقاضیان موجود در سیستم و صف و نیز متوسط مدت‌زمان انتظار متقاضیان در سیستم و صف، به ترتیب از روابط زیر تعیین می‌گردند

$$L_s = \frac{\rho(1-x)}{(1-x^K)^2}\quad,\qquad L_q = L_s-\rho,$$
$$W_s = \frac{\rho(1-x)}{\lambda(1-x^K)^2}\quad,\qquad W_q = \frac{L_q}{\lambda}.$$

۳ انتخاب سیستم بهینه

هدف از بهینه‌سازی در سیستم‌های صف تعیین ظرفیت سیستم به‌گونه‌ای است که در عین رعایت ارزش وقت مشتری و جلوگیری از اتلاف زمان، سیستم طوری طراحی گردد که میزان سرمایه‌گذاری انجام‌شده و هزینه عملیاتی مربوط به ارائه خدمت، به‌صورت حداکثری مورد بهره‌برداری قرار گیرد. در طراحی اولیه سیستم، کاهش طول صف و در نتیجه کاهش مدت‌زمان انتظار مشتری، از طریق افزایش نرخ خدمت‌رسانی به مشتری امکان‌پذیر می‌باشد. علاوه بر این، زمان برای تمام مشتریان مراجعه‌کننده به یک سیستم دارای ارزش بوده و مدت‌زمان انتظار بالای یک مشتری در صف، ضمن تحمیل خسارت‌های گاها جبران‌ناپذیر، در برخی مواقع بی‌اعتمادی و در نتیجه عدم مراجعه مجدد مشتری به سیستم را به دنبال خواهد داشت. بر این اساس، ظرفیت بهینه یک سیستم، به ظرفیتی اطلاق می‌شود که مجموع هزینه‌ها شامل هزینه خدمت‌دهی و هزینه اتلاف زمان در طول صف را به کمترین مقدار ممکن برساند. باید توجه داشت که دو مؤلفه ذکرشده در طراحی یک سیستم همسو نبوده و کاهش یکی از آن‌ها سبب افزایش دیگری خواهد شد. ازاین‌رو، در طراحی سیستم‌ها، هدف بهینه‌سازی مجموع میانگین این دو مؤلفه می‌باشد.

هزینه‌های یک سیستم صف به‌طور خاص به طراحی سیستم بستگی دارد. به‌طورکلی، پارامترهای: هزینه نگهداری یک خدمت دهنده بیکار در واحد زمان، هزینه عملیاتی مربوط به یک خدمت دهنده مشغول به فعالیت، هزینه سرمایه‌گذاری روی یک خدمت دهنده، هزینه از دست دادن مشتری، هزینه اتلاف وقت مشتری در صف در واحد زمان و هزینه اتلاف وقت مشتری در هنگام دریافت خدمت در واحد زمان، در ساختار تابع هزینه تأثیرگذار می‌باشند. بااین‌وجود، برخی از سیستم‌ها تنها برخی از این پارامترها را شامل شده و این موضوع باعث شده تا توابع هزینه متنوعی در مسئله بهینه‌سازی سیستم‌های صف در نظر گرفته شود. در یک سیستم صف‌بندی امید ریاضی کل هزینه‌ها در واحد زمان معیاری برای ارزیابی سیستم هست که هزینه‌ها بستگی به نوع و ماهیت آن دارد. در این مقاله به دلیل اهمیت مدت‌زمان انتظار متقاضی، تابع هزینه را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$C_K(\rho) = C_1L_q + C_2(L_s-L_q), \tag{18}$$

که در آن C_1 هزینه اتلاف وقت هر متقاضی در صف و C_2 هزینه اتلاف وقت هر متقاضی در حال دریافت خدمت در نظر گرفته می‌شود؛ بنابراین C_1L_q متوسط هزینه اتلاف وقت متقاضیان در صف و $C_2(L_s-L_q)$ متوسط هزینه اتلاف وقت متقاضیان در هنگام دریافت خدمت است.

ازاین‌رو، با توجه به روابط (۷) و (۸) رابطه (۱۸) به‌صورت

$$C_K(\rho) = \frac{(C_1-C_2)K^K + (C_1\rho + C_2 - C_1)(K+\rho)^K}{(K+\rho)^K} \tag{19}$$

بازنویسی می‌شود.

از طرف دیگر، در هر سیستم صف‌بندی حالت پایایی بسیار مهم و حائز اهمیت است تا جایی که در تمامی سیستم‌های صف‌بندی شرایطی لحاظ می‌شود که تحت آن، سیستم به حالت پایایی می‌رسد؛ بنابراین، در تعیین معیار بهینگی، سیستمی مدنظر است که هزینه

آن کمترین مقدار و احتمال پایایی آن بیشترین مقدار باشد. در این راستا، برای دو خانواده از سیستم‌های تحت بررسی در این مقاله، ابتدا با توجه به شرایط به‌دست‌آمده مرتبط با شرط پایایی سیستم‌ها، به ازای ρ معین، K به روش نیوتن–رافسون تعیین می‌شود. سپس، بر اساس مقدار K به‌دست‌آمده، مقادیر تابع هزینه و احتمال پایایی سیستم محاسبه و نرمال‌سازی می‌شوند. نکته قابل‌ذکر آن است که برای نرمال‌سازی هزینه، کوچک‌ترین مقدار هزینه بر هر یک از مقادیر آن و برای نرمال‌سازی احتمال پایایی، هر یک از مقادیر احتمال پایایی بر بزرگ‌ترین مقدار آن تقسیم می‌شوند. مقادیر نرمال‌سازی شده هزینه با نماد C_{NSC} و مقادیر نرمال‌سازی شده احتمال پایایی با نماد P_{NRSP} نشان داده می‌شوند. در نهایت، برای تعیین سیستم بهینه، با در نظر گرفتن هر دو معیار هزینه سیستم و احتمال پایایی نرمال‌سازی شده، شاخصی جدید تحت عنوان نرخ کارایی سیستم را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱.۳. *یک سیستم صف‌بندی با مقادیر نرمال‌سازی شده هزینه C_{NSC} و مقادیر نرمال‌سازی شده احتمال پایایی P_{NRSP} را در نظر بگیرید. در این صورت نرخ کارایی سیستم را با نماد SER نشان داده و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم*

$$SER = w_1 C_{NSC} + w_2 P_{NRSP}, \quad w_1 + w_2 = 1, \qquad (۲۰)$$

که در آن w_1 و w_2 به ترتیب وزن معیارهای هزینه و احتمال پایایی نرمال‌سازی شده می‌باشند.

شایان‌ذکر است که شاخص تصمیم‌گیری SER با هر دو معیار نرمال‌سازی شده فوق ارتباط مستقیم دارد. در واقع، هر اندازه هزینه سیستم پایین‌تر و احتمال پایایی آن بالاتر باشد، مقدار SER بزرگ‌تر خواهد بود؛ بنابراین، مقداری از K که بالاترین مقدار SER را دارد به‌عنوان K_{Opt} انتخاب‌شده و سیستم متناظر با آن، سیستم بهینه نامیده می‌شود.

در ادامه با توجه به ساختار دو خانواده از مدل‌های $\{M/Er_K/1, K \in N\}$ و $\{Er_K/M/1, K \in N\}$ و پارامترهای مرتبط با آن‌ها، مدل بهینه در هر حالت تعیین و ارائه می‌شود.

در خانواده مدل‌های $\{M/Er_K/1, K \in N\}$، بر اساس نتایج به‌دست‌آمده در بخش ۲.۲ و جایگذاری آن‌ها در رابطه (۱۹)، چنین نتیجه‌گیری می‌شود که برای یافتن مدل بهینه در این خانواده بایستی شرط زیر برقرار شود

$$(K+\rho)(1+\log(\frac{K}{K+\rho})) - K = 0. \qquad (۲۱)$$

بدیهی است مقدار K_{Opt} بر اساس دستورالعمل ذکرشده تعیین می‌شود که جزئیات محاسباتی آن در بخش بعد ارائه خواهد شد.

در خانواده مدل‌های $\{Er_K/M/1, K \in N\}$، بر اساس نتایج به‌دست‌آمده در بخش ۲.۳ و با توجه به L_q و L_s که در بخش ۲.۳ محاسبه شد، تابع هزینه سیستم

$$C_K(x) = \frac{\rho[C_1(1-x) + (C_2 - C_1)(1-x^K)^2]}{(1-x^K)^2}, \qquad (۲۲)$$

و جایگذاری آن‌ها در رابطه (۱۹)، چنین نتیجه‌گیری می‌شود که برای یافتن مدل بهینه در این خانواده بایستی شرط زیر برقرار شود

$$\frac{dC_K(x)}{dK} = \frac{2\rho(1-x)x^K \log(x)}{(1-x^K)^3} < 0$$

با توجه به عبارت به‌دست‌آمده می‌توان گفت $C_K(x)$ تابعی نزولی بر حسب K است؛ بنابراین، به ازای Kهای متفاوت، مقادیر هزینه و احتمال پایایی سیستم محاسبه و با استفاده از شاخص SER سیستم بهینه در این خانواده تعیین می‌شود.

۴ نتایج عددی

در این بخش به‌منظور تشریح جزئیات محاسباتی روش پیشنهادی برای خانواده مدل‌های صف‌بندی تحت بررسی، مقدار K_{Opt} و در نتیجه مدل بهینه، بر اساس مجموعه داده‌های شبیه‌سازی شده تعیین‌شده است. تمام نتایج عددی با استفاده از نرم‌افزار آماری R نسخه ۴.۴.۱ به‌دست‌آمده است.

۱.۴ تعیین مدل بهینه برای خانواده مدل‌های $\{M/Er_K/1, K \in N\}$

در این زیربخش مدل بهینه در خانواده مدل‌های $\{M/Er_K/1, K \in N\}$ تعیین می‌شود. به این منظور مراحل زیر را دنبال می‌کنیم.

گام اول: به ازای $C_1 = 250$ و $C_2 = 200$، مقدار K با استفاده از روش نیوتن–رافسون برای مقادیر مختلف ρ ، با استفاده از رابطه (۲۱) محاسبه گردید.

گام دوم: به ازای ρ معین و K یافت شده در گام اول، مقادیر تابع هزینه و احتمال پایایی سیستم به ازای $v_1 = 10$، $v_2 = 1$، $a = 2$ و $b = 5$ به ترتیب با استفاده از روابط (۱۹) و (۳) محاسبه شدند.

گام سوم: مقادیر یافته شده هزینه و احتمال پایایی سیستم در گام دوم، نرمال‌سازی شده و سپس به کمک رابطه (۲۰) مقدار SER به ازای

$w_۱ = ۰٫۴$ و $w_۲ = ۰٫۶$ تعیین گردید.

بر اساس نتایج به‌دست‌آمده و ارائه شده در جدول ۱.۴، می‌توان چنین نتیجه‌گیری نمود که در خانواده مدل‌های $\{M/Er_K/۱, K \in N\}$، مدل بهینه به‌صورت $M/Er_۲/۱ (K = ۱٫۷ \simeq ۲)$ تعیین می‌گردد. در این شرایط، با در نظر گرفتن مقدار $\theta = ۳$ و مقادیر در نظرگرفته‌شده برای $v_۱$، $v_۲$، a و b در گام دوم، شرط پایایی سیستم تحت بررسی با استفاده از رابطه (۲) برابر با $\rho = ۰٫۱۰۰۸$ به دست می‌آید که با مقدار $\rho = ۰٫۰۹$ تقریباً همخوانی دارد. علاوه بر این، سایر معیارهای ارزیابی مدل بهینه $M/Er_۲/۱$ با استفاده از رابطه (۴) و روابط (۷) تا (۹)، به‌صورت زیر محاسبه شدند

$$L_q = ۰٫۰۰۵۷, \quad L_s = ۰٫۰۹, \quad W_q = \frac{۰٫۰۰۵۷}{\lambda}, \quad W_s = \frac{۰٫۰۹}{\lambda},$$
$$\pi_n = ۰٫۹۱ \sum_{i=۰}^{n} (-۱)^{n-i} \frac{(۰٫۰۴۳۱)^{n-i-۱}}{(۰٫۹۵۶۹)^{۲i}} A_i, \ n \geq ۰,$$

که در آن $A_i = \left[\binom{۲i}{n-i}(۰٫۰۴۳۱) + \binom{۲i}{n-i-۱}\right]$.

مقادیر $L_q = ۰٫۰۰۵۷$ و $L_s = ۰٫۰۹$ نشان می‌دهد که سیستم در بیشتر اوقات خالی است، البته مقادیر $\pi_۰ = ۰٫۹۱$ و $P(N \geq ۱) = ۰٫۰۹$ نیز بیان‌کننده همین مطلب هست؛ یعنی در این سیستم، متوسط زمان انتظار یک متقاضی بعد از وارد شدن به سیستم تا اخذ سرویس بسیار ناچیز است.

در ادامه برای تشریح هرچه بیشتر روش پیشنهادی، یک مثال دیگر ارائه می‌شود.

مثال ۱.۴. *خانواده مدل‌های صف‌بندی $\{M/Er_K/۱, K = ۱, ۲, \cdots, ۵\}$ را در نظر بگیرید و فرض کنید که در آن زمان بین ورود مشتریان دارای توزیع نمایی با نرخ $\lambda = ۲٫۵$ و زمان‌های سرویس برای مقادیر $K = ۱, ۲, \cdots, ۵$ دارای توزیع ارلانگ $Er(K, ۴٫۵K)$ باشد. همچنین، بر اساس روش شبیه‌سازی مونت‌کارلو نمونه‌ای به‌اندازه ۳۰ از توزیع نمایی با نرخ $\lambda = ۲٫۵$ و از توزیع‌های $Er(K, ۴٫۵K)$ به ازای $K = ۱, ۲, \cdots, ۵$، تولید می‌کنیم. در ادامه، در هر یک از مدل‌ها، برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامتر ρ را بر اساس داده‌های شبیه‌سازی‌شده محاسبه می‌کنیم.*

با فرض این‌که زمان‌های بین ورود مشتریان به سیستم $\{U_i, i \geq ۱\}$ به‌عنوان دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع دارای چگالی نمایی با پارامتر $\lambda = ۲٫۵$ و زمان‌های سرویس $\{V_j, j \geq ۱\}$ به‌عنوان دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع با توزیع $Er(K, K\mu)$ در مدل‌های صف‌بندی $M/Er(K, K\mu)/۱$ برای $K = ۱, ۲, \cdots, ۵$ باشند، آنگاه برآورد ماکسیمم درستنمایی ρ از رابطه زیر به دست می‌آید

$$\hat{\rho} = (\sum_{j=۱}^{n} V_j)(\sum_{i=۱}^{n} U_i)^{-۱}.$$

با استفاده از مفروضات در نظرگرفته‌شده برای $C_۱$، $C_۲$، $v_۱$، $v_۲$، a و b در ابتدای همین بخش و با استفاده از مقدار $\hat{\rho}$ به‌دست‌آمده، مقادیر تابع هزینه و احتمال پایایی برای $K = ۱, ۲, \cdots, ۵$، به ترتیب با استفاده از روابط (۱۹) و (۳) محاسبه گردید و سپس فرآیند نرمال‌سازی آن‌ها نیز انجام شد. همچنین، با فرض $w_۱ = ۰٫۴$ و $w_۲ = ۰٫۶$، شاخص SER با استفاده از رابطه (۲۰) به دست آمد. نتایج در جدول ۲.۴ آمده است. نتایج شاخص SER در جدول ۲.۴ نشان‌دهنده بهینه بودن مدل $M/Er_۲/۱$ نسبت به سایر مدل‌های در نظرگرفته‌شده در این مثال است که با نتایج جدول ۱.۴ مطابقت دارد.

۲.۴ تعیین مدل بهینه برای خانواده مدل‌های $\{Er_K/M/۱, K \in N\}$

در این زیربخش مدل بهینه در خانواده مدل‌های $\{Er_K/M/۱, K \in N\}$ تعیین می‌شود. به این منظور مراحل زیر را دنبال می‌کنیم.

گام اول: نخست با استفاده از رابطه (۱۰) داریم $E(\rho|\rho < ۱) = ۰٫۰۱۸$.

گام دوم: با استفاده از مقدار ρ تعیین‌شده در گام اول و به ازای مقادیر مختلف K، ریشه مثبت و کوچک‌تر از یک تساوی $x^{K+۱} - (۱ + K\rho)x + K\rho = ۰$ را به دست می‌آوریم. سپس با استفاده از روابط (۲۲) و (۱۱) هزینه و احتمال پایایی سیستم محاسبه می‌شود.

گام سوم: مقادیر یافت شده هزینه و احتمال پایایی سیستم در گام دوم، نرمال‌سازی شده و سپس به کمک رابطه (۲۰) مقدار SER به ازای $w_۱ = ۰٫۴$ و $w_۲ = ۰٫۶$ به تعیین می‌شود.

نتایج به‌دست‌آمده حاصل از سه‌گام در جدول ۳.۴ ارائه شده است. نکته قابل‌ذکر آن است که نتایج ارائه شده در این جدول تا رسیدن به‌احتمال پایایی ۰٫۹۹ بر اساس مقادیر K محاسبه‌شده‌اند.

نتایج جدول ۳.۴ بیانگر آن است که در خانواده مدل‌های $\{Er_K/M/۱, K \in N\}$ با افزایش مقدار K، هزینه نزولی و احتمال پایایی صعودی می‌شود. ازاین‌رو، لازم است که مدل بهینه تحت شرط پایایی تعیین شود؛ بنابراین، بر اساس شاخص SER و تحت شرط احتمال پایایی ۰٫۹۹، مقدار $K_{Opt} = ۸$ بوده و ازاین‌رو مدل بهینه در این خانواده از مدل‌ها، مدل $Er_۸/M/۱$ تعیین می‌شود. باید توجه داشت که بدون استفاده از شاخص SER نیز $K_{Opt} = ۸$ می‌شود. چراکه هدف یافتن مقداری از K است که به ازای آن هزینه و احتمال پایایی سیستم

به ترتیب کمترین و بیشترین مقدار را داشته باشند.

با توجه به رابطه (۱۷) و با در نظر گرفتن مقادیر $\rho = 0.018$ و $x = 0.126$، توزیع متقاضیان موجود در سیستم برای مدل بهینه $Er_8/M/1$ عبارت‌اند از

$$\pi_n = \begin{cases} 0.982, & n = 0, \\ (0.018)[(0.126)^{8(n-1)} - (0.126)^{8n-7}], & n \geq 1, \end{cases}$$

علاوه بر این، معیارهای ارزیابی این سیستم به‌صورت زیر به دست می‌آیند

$$L_s = 0.019, \quad L_q = 0.001, \quad W_s = \frac{0.019}{\lambda}, \quad W_q = \frac{0.001}{\lambda}.$$

مقادیر L_s و L_q و $\pi_0 = 0.982$ عملکرد مطلوب سیستم بهینه را نشان می‌دهند.

مثال ۲.۴. *خانواده مدل‌های $\{Er_K/M/1, K = 1, 2, \cdots, 10\}$ را در نظر بگیرید که در آن زمان‌های بین ورود مشتریان برای تمام مدل‌ها دارای توزیع ارلانگ $Er(K, 2.5K)$ و زمان سرویس دارای توزیع نمایی با نرخ $\mu = 4.5$ می‌باشند. هدف تعیین مدل بهینه برای این گروه از مدل‌ها تحت شرط احتمال پایایی ۰٫۹۹۹۹ است. به این منظور یک نمونه ۵۰ تایی به روش مونت‌کارلو از توزیع‌های ارلانگ و نمایی شبیه‌سازی نموده و برای تمامی مدل‌ها برآورد ماکسیمم درستنمایی ρ به دست آمد. سپس، به ازای $\hat{\rho}$ به‌دست‌آمده و به ازای $K = 1, 2, \cdots, 10$ مقدار x $(0 < x < 1)$ از رابطه زیر تعیین گردید*

$$x^{K+1} - (1 + K\hat{\rho})x + K\hat{\rho} = 0.$$

اکنون با استفاده از مقادیر به‌دست‌آمده برای x و $\hat{\rho}$، مقادیر هزینه و احتمال پایایی با استفاده از روابط (۲۲) و (۱۱) محاسبه شدند. در نهایت با در نظر گرفتن مقادیر $w_1 = 0.4$ و $w_2 = 0.6$، مقدار شاخص SER برای تمامی مدل‌ها محاسبه و نتایج در جدول ۴.۴ گزارش شد. نتایج نشان‌دهنده آن است که تحت شرط پایایی ۰٫۹۹، مدل $Er_8/M/1$ و تحت شرط احتمال پایایی ۰٫۹۹۹۹، مدل $Er_{10}/M/1$ مدل بهینه هستند.

۵ مطالعه موردی

بانک تجارت شعبه دانشگاه گیلان (مستقر در پردیس اصلی دانشگاه) دارای یک دستگاه خودپرداز است. فاصله زمانی بین مراجعین و فاصله زمانی بین سرویس‌شده‌ها (بر حسب دقیقه) از ساعت ۸ تا ۱۰ صبح روز ۲۶ شهریور ثبت و در جدول ۲ ارائه گردید.

جدول ۲. فواصل زمانی بین مراجعین و سرویس‌شده‌ها

مراجعین							
۳٫۴۱	۳٫۲۵	۲٫۶۱	۲٫۲۷	۳٫۲۷	۳٫۳۸	۴٫۵۵	۵٫۴۷
۳٫۷۱	۴٫۵۶	۴٫۹۴	۵٫۶۲	۳٫۱۲	۲٫۱۸	۴٫۲۴	۴٫۴۱
۵٫۱۷	۲٫۸۸	۳٫۰۲	۳٫۵۸	۲٫۹۲	۳٫۱۷	۳٫۸۵	۴٫۰۱
۲٫۶۸	۴٫۲۸	۳٫۷۲	۱٫۲۷	۱٫۴۷	۴٫۴۵		
سرویس‌شده‌ها							
۲٫۴۱	۰٫۵۳	۱٫۲۰	۰٫۲۳	۰٫۳۱	۰٫۴۴	۲٫۷۶	۲٫۱۲
۰٫۱۵	۱٫۱۱	۲٫۲۰	۱٫۱۷	۴٫۱۷	۰٫۲۶	۰٫۹۲	۲٫۲۵
۰٫۳۹	۸٫۰۰	۳٫۴۵	۳٫۹۷	۴٫۲۳	۰٫۱۴	۰٫۵۴	۰٫۲۸
۰٫۸۶	۳٫۲۵	۰٫۰۹	۱٫۹۴	۲٫۸۵	۲٫۰۹		

ابتدا و به‌منظور تعیین مقدار برآورد ρ، از داده‌های ثبت‌شده مربوط به فاصله زمانی بین مراجعین و فاصله زمانی بین سرویس‌شده‌ها در یک بازه زمانی پنج‌روزه استفاده شد که بر اساس مقادیر ثبت‌شده، $\hat{\rho} = 0.27$ تعیین گردید. سپس با در نظر گرفتن مقدار برآورد ρ و به ازای $K = 1, 2, 3, 4, 5$، ریشه کوچک‌تر از یک رابطه $x^{K+1} - (1+K\rho)x + K\rho = 0$ تعیین گردید. پس‌ازآن، احتمال پایایی سیستم و مقدار هزینه با استفاده از روابط (۱۲) و (۲۳) به دست آورده شد. با در نظر گرفتن $w_1 = 0.4$ و $w_2 = 0.6$، شاخص SER با استفاده از رابطه (۲۱) محاسبه و نتایج آن در جدول ۳ ارائه شده است. با توجه به نتایج گزارش‌شده در این جدول می‌توان نتیجه گرفت که مدل $Er_5/M/1$ بری این داده‌ها، مدلی بهینه است.

جدول ۳. مقادیر شاخص‌های مدل به ازای مقادیر مختلف K

K	x	C_K	$P_{\rho\|K=k}$	C_{NSC}	P_{NRSP}	SER
۱	۰٫۲۷	۹٫۸۲۵	۰٫۹۷۲۸	۰٫۸۲۶۱	۰٫۹۸۲۱	۰٫۹۱۹۷
۲	۰٫۳۲	۹٫۲۸۷	۰٫۹۷۸۶	۰٫۸۷۳۹	۰٫۹۸۷۹	۰٫۹۴۲۳
۳	۰٫۴۱	۸٫۹۷۵	۰٫۹۸۱۲	۰٫۹۰۴۳	۰٫۹۹۰۶	۰٫۹۵۶۱
۴	۰٫۵۴	۸٫۷۲۹	۰٫۹۸۷۹	۰٫۹۲۹۸	۰٫۹۹۷۴	۰٫۹۷۰۴
۵	۰٫۶۱	۸٫۱۱۶	۰٫۹۹۰۵	۱	۱	۱

۶ بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله یک معیار ارزیابی جدید برای طراحی بهینه سیستم‌های صف‌بندی بر اساس ترکیب خطی وزنی از تابع هزینه و احتمال پایایی

برای تعیین مدل بهینه در خانواده مدل‌های $\{M/Er_K/1, K \in N\}$ و $\{Er_k/M/1, k \in N\}$ معرفی شد. مدلی که شاخص SER بزرگ‌تری داشته باشد، به‌عنوان مدل بهینه انتخاب می‌شود. با استفاده از مثال‌های عددی و بر اساس الگوریتم تشریح شده در بخش سوم، مدل بهینه بر اساس شاخص SER برای خانواده مدل‌های $\{M/Er_K/1, r \in N\}$ مدل $M/Er_2/1$ و برای خانواده مدل‌های $\{Er_k/M/1, k \in N\}$ تحت شرط احتمال پایایی ۰٫۹۹ مدل $Er_8/M/1$ و تحت شرط احتمال پایایی ۰٫۹۹۹۹ مدل $Er_{10}/M/1$ تعیین و توزیع تعداد متقاضیان در سیستم و متوسط تعداد متقاضیان در صف و سیستم و متوسط زمان انتظار هر متقاضی در صف و سیستم برای مدل‌های بهینه $M/Er_2/1$ و $Er_8/M/1$ به دست آمدند. رضایت مشتری از یک سیستم صف‌بندی نقش بسزایی در ارزیابی آن سیستم دارد. معرفی یک شاخص ارزیابی جدید بر اساس تابع هزینه، احتمال پایایی و متوسط درجه رضایت مشتری برای تعیین مدل بهینه می‌تواند برای تحقیقات آینده موردعلاقه باشد. پیشنهاد دیگر آن است که برآورد پارامتر شدت ترافیک انواع مدل‌های صف‌بندی به روش‌های مختلف محاسبه شود. سپس به کمک شاخص یا شاخص‌های تصمیم‌گیری، برآورد بهینه آن تعیین شود. علاوه بر این، در نظر گرفتن حالت یا حالت‌های فازی در مورد برآورد پارامتر شدت ترافیک و سایر معیارهای ارزیابی و بهینه‌سازی مدل‌های صف‌بندی می‌تواند به‌عنوان ایده‌های جدید در نظر گرفته شود.

مراجع

[۱] مدرس، م.، تیموری، ا. (۱۳۹۴)، نظریه صف، چاپ ششم، مرکز نشر آثار علمی دانشگاه علم و صنعت، تهران.

[۲] یعقوب‌زاده شهرستانی، ش. (۱۴۰۲)، برآورد پارامتر شدت ترافیک و احتمال پایایی مدل صف‌بندی $M/M/c$ تحت یک زمان توقف در سیستم، *مجله علوم آماری*، ۱، ۲۳۳-۲۱۹.

[3] Allen, A. (1990). *Probability, statistics and queueing theory with computer science applications*. Academic Press, New York.

[4] Baskett, F., Chandy, K. M., Muntz, R.R. (1975). Closed and mixed networks of queues with different classes of customers, Journal of ACM, **22**, 248-260.

[5] Bhaskar, V., Lallement. P. (2010). Modeling a supply chain using a network of queues vidhyacharan bhaskar, *Applied Mathematical Modelling*. **34**, 2074-2088.

[6] Chowdhury, S., Maiti, S. (2014). Bayesian estimation of traffic intensity in an $M/E_r/1$ queueing model. *Research Reviews: Journal of Statistics, Special Issue on Recent Statistical Methodologies and Applications*, **1**, 99-106.

[7] Deepthi, V., Jose J. K. (2021), Bayesian Estimation of $M/E_k/1$ Queueing Model using Bivariate Prior, *American Journal of Mathematical and Management Sciences*, 40, 88-105.

[8] Fischer, M. (1974). The waiting time in the $E_k/M/1$ queueing system. *Operational Research*, **22**, 898-902.

[9] Gupta, P. L. (1984). Structural properties and estimation in $M/E_k/1$ queue. *Communication in Statistics-Theory and Methods*, **11**, 711-719.

[10] Harishchandra, K., Subba Rao, S. (1998). A note on statistical inference about the traffic intensity parameter in $M/E_k/1$ queue. *Sankhył: The Indian Journal of Statistics, Series A*, **50**, 144-148.

[11] Insua, D.R., Wiper M., Ruggeri F. (1998). Bayesian analysis of $M/E_r/1$ and $M/H_k/1$ queues. *Queueing and System*, **30**, 289-308.

[12] Jain M., Dhyani I. (2011). Control policy for $M/E_k/1$ queueing system. *Journal of Statistics and Management Systems*, **4**, 73-82.

[13] Jose, J.K., Manoharan M. (2014). Bayesian estimation of rate parameters of queueing models. *Journal of Probability and Statistical Science*, **12**, 69-76.

[14] Minkevicius, S. (2009). On extreme values in open queueing networks, *Mathematical and Computer Modelling*, **50**, 1058-1066.

[15] Parado, M.J., de la Funte, D. (2008). Design of a fuzzy finite capacity queuing model based on the degree of customer satisfaction: analysis and fuzzy optimization. *Fuzzy Sets and Systems*, **159**, 3313-3332.

[16] Ruggeri F., Wiper M.P., Rios Insua D. (1996). Bayesian models for correlation in $M/M/1$ queues, *Quaderno IAMI 96.8. CNR-IAMI, Milano*.

[17] Srinivas, V., Subba Rao, S., Kale, B.K. (2011). Estimation of measures in $M|M|1$ queue, *Communication in Statistics-Theory and Methods*, **40(18)**, 3327-3336.

[18] Vaidyanathan, V. S., Chandrasekhar, P. (2018). Parametric Estimation of an $M/E_r/1$ Queue, *Opsearch*, **55**, 628-641.

[19] Wiper, M. (1998). Bayesian analysis of $E_r/M/1$ and $E_r/M/c$ queues, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **69**, 65-79.

Optimal model in the family of queuing systems with infinite capacity based on Erlang distribution

Reza Zarei[1], Shahram Yaghoubzadeh Shahrestani[2] and Amrollah Jafari[3]

Abstract:

The cost function and the system stationary probability are two key criteria in the design of queuing systems. In this paper, the aim is to design a single server queuing models with infinite capacity, where the service times in the first model and the interarrival times in the second model are assumed to have an Erlang distribution. For this purpose, a new index based on the cost function and the system reliability probability is introduced, the larger of which indicates the optimality of the model. Several numerical examples and an applied example are presented to explain the computational details of the proposed method.

Keywords: Erlang distribution, Infinite capacity, Cost function, Stationary probability, Efficacy index.

[1] **Department of Statistics, Faculty of Mathematical Sciences, Guilan University, Rasht, Iran.**

[2] **Department of Statistics, Payame Noor University, Tehran, Iran.**

[3] **Department of Statistics, Payame Noor University, Tehran, Iran.**