

استنباط بیزی برای خانواده توزیع‌های تعمیم‌یافته وایبول مارشال-اولکین

ناهید سنجری فارسی پور^۱، بهرام طارمی^۲، زهرا معمارکاشانی^۳

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۰۵/۱۳

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۱۰/۲۳

چکیده:

مارشال و اولکین خانواده‌ای از توزیع‌ها را معرفی کردند که با اضافه کردن یک پارامتر به توزیع‌های دیگر به دست می‌آید. سانتوز-نتو و همکاران مطالعه روی خانواده توزیع‌های تعمیم‌یافته وایبول را انجام دادند. در این مقاله دو توزیع ریلی و پارتو تعمیم‌یافته وایبول مورد مطالعه قرار گرفته، مطالب گوناگون مانند گشتاورها و استنباط بیزی تحت تابع زیان‌های مختلف از جمله مربع خطا، آنتروپی، لاینکس، مربع خطا در لگاریتم و لاینکس اصلاح شده را مورد بحث قرار داده‌ایم. همچنین روش زنجیره مارکوف مونت کارلو برای این دو توزیع مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. **واژه‌های کلیدی:** تابع بقا، تابع زیان، تابع مخاطره، توزیع ریلی، توزیع پارتو، روش زنجیره مارکوف مونت کارلو

۱ مقدمه

توزیع وایبول یک نقش اساسی در مدل‌بندی آماری برای داده‌های اعتمادپذیری، مهندسی و مطالعات زیست‌شناسی دارد. این مدل به‌طور خیلی مفید برای توضیح نرخ‌های مخاطره بکار گرفته می‌شود، چندی بعد فرم تعمیم‌یافته مدل وایبول در بسیاری از رشته کاربردی مورد استفاده قرار گرفت. کلاس توزیع‌های وایبول تعمیم‌یافته که توسط [۳] ارائه شد در مدل‌های زمان زندگی کاربرد فراوانی دارد. تابع وایبول تعمیم‌یافته به‌صورت رابطه (۲) است:

$$G(x; \alpha, \xi) = 1 - \exp[-\alpha H(x; \xi)], \quad x \in D \subseteq \mathbb{R}_+, \alpha > 0 \quad (2)$$

که $H(x; \xi)$ یک تابع غیر منفی افزایشی است که به پارامتر ξ بستگی دارد. تابع چگالی متناظر با این توزیع به‌صورت (۳) است:

$$g(x; \alpha, \xi) = \alpha \exp[-\alpha H(x; \xi)] h(x; \xi) \quad (3)$$

که $h(x; \xi)$ مشتق $H(x; \xi)$ برحسب x است. $H(x; \xi)$ های گوناگون مدل‌های مهمی را ارائه می‌دهند. برای مثال:

الف) $H(x; \xi) = x^\xi$ به توزیع ریلی (بر نوع ۱) منجر می‌شود.

ب) $H(x; \xi) = \log(x/k)$ توزیع پارتو را نتیجه می‌دهد.

در این مقاله، ما یک خانواده جدید از توزیع‌ها با ترکیب کلاس توزیع‌های مارشال-اولکین و وایبول تعمیم‌یافته برای توزیع‌های ریلی و پارتو مورد مطالعه قرار می‌گیرند و استنباط آماری و استنباط بیزی برای آن‌ها مورد بحث قرار می‌گیرند.

مارشال و اولکین در سال ۱۹۹۷ روش مهمی را برای قرار دادن یک پارامتر شکل اضافی به یک مدل پایه به دست آوردند و بدین ترتیب یک توزیع تعمیم‌یافته تعریف کردند. تبدیل مارشال و اولکین یک دامنه وسیع از رفتارها برحسب توزیع پایه را شامل گردید. ویژگی‌های هندسی و استنتاجی متناسب با توزیع جدید تولید شده بستگی به مقدار پارامتر اضافی دارد.

فرض کنید X یک متغیر تصادفی با توزیع مارشال-اولکین باشد، آنگاه تابع بقا آن به‌صورت زیر داده می‌شود:

$$\bar{F}(x) = \frac{\delta \bar{G}(x)}{1 - \delta \bar{G}(x)}, \quad x \in X \subseteq \mathbb{R}, \delta > 0 \quad (1)$$

که $\bar{F}(x)$ تابع بقا می‌باشد $(\bar{F}(x) = 1 - F(x))$ و $\bar{G}(x)$ تابع بقا توزیع پایه است $(\bar{G}(x) = 1 - G(x))$ ، همچنین $\delta = 1 - \delta$ که $\delta > 0$ است. واضح است که اگر $\delta = 1$ آنگاه $\bar{F}(x) = \bar{G}(x)$ است. خانواده توزیع‌های مارشال اولکین (۱) دارای تابع چگالی احتمال

$$f(x; \delta) = \frac{\delta g(x)}{\{1 - \delta \bar{G}(x)\}^2}, \quad x \in X \subseteq \mathbb{R}, \delta > 0$$

است که $g(x)$ تابع چگالی احتمال توزیع پایه است. همچنین تابع نرخ مخاطره به‌صورت زیر است:

$$\tau(x; \delta) = \frac{g(x)}{\bar{G}(x)[1 - \delta \bar{G}(x)]}, \quad x \in X \subseteq \mathbb{R}, \delta > 0$$

^۱ گروه آمار، دانشکده ریاضی، دانشگاه الزهراء، تهران (نویسنده مسئول: nsanjari@alzahra.ac.ir)

^۲ بخش آمار، دانشکده علوم، دانشگاه شیراز، شیراز

^۳ گروه آمار، دانشکده ریاضی، دانشگاه الزهراء، تهران

۱.۱ خانواده توزیع‌های مارشال اولکین وایبول تعمیم یافته

تابع توزیع خانواده جدید توزیع‌ها به صورت

$$F(x; \delta, \alpha, \xi) = \frac{\delta(1 - \exp[-\alpha H(x; \xi)])}{1 - \delta \exp[-\alpha H(x; \xi)]} \quad (4)$$

که $\alpha > 0$ و $\delta > 0$ با استفاده از معادله (۴) تابع بقا این توزیع جدید به صورت زیر است:

$$\bar{F}(x; \delta, \alpha, \xi) = \frac{\delta \exp[-\alpha H(x; \xi)]}{1 - \delta \exp[-\alpha H(x; \xi)]} \quad (5)$$

تابع نرخ مخاطره به صورت معادله (۶) است

$$\tau(x; \delta, \alpha, \xi) = \frac{\alpha h(x; \xi)}{1 - \delta \exp[-\alpha H(x; \xi)]} \quad (6)$$

همچنین تابع چگالی احتمال آن به شرح زیر می‌باشد

$$f(x; \delta, \alpha, \xi) = \frac{\delta \alpha h(x; \xi) \exp[-\alpha H(x; \xi)]}{\{1 - \delta \exp[-\alpha H(x; \xi)]\}^2} \quad (7)$$

که $H(x; \xi)$ برای توزیع‌های خاص در جدول (۱) آورده شده است:

جدول ۱. برای توزیع‌های خاص $H(x; \xi)$

ξ	$H(x; \xi)$	توزیع
-	x^2	ریلی
k	$\log(x/k)$	پارتو
-	x	نمایی
(λ, β)	$\exp[(\lambda x)^\beta] - 1$	نمایی توانی
c	$\log(1 + x^c)$	بور نوع ۱۲
γ	x^γ	وایبول
(γ, λ)	$x^\gamma \exp(\lambda x)$	وایبول اصلاح شده
(λ, β)	$\lambda[\exp(\lambda x)^\beta - 1]$	وایبول تعمیم یافته
γ	$\alpha^{\gamma-1} x^\gamma$	وایبول نمایی شده

۲.۱ بسط‌هایی برای فرم تابع چگالی

می‌دانیم که به ازای هر حقیقی مثبت α و $|z| < 1$ ، یک بسط دو جمله‌ای تعمیم یافته خواهیم داشت

$$(1 - z)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{k!} z^k \quad (8)$$

که در آن $(a)_k = \Gamma(a + k) / \Gamma(a) = a(a + 1) \dots (a + k - 1)$ و $\Gamma(0) = 1$ تابع گاما می‌باشد. با به کارگیری رابطه بالا برای $0 \leq \delta \leq 1$ و

جایگذاری در مخرج رابطه (۷) داریم:

$$\{1 - \delta \exp[-\alpha H(x; \xi)]\}^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} (j + 1) \delta^j \exp[-\alpha j H(x; \xi)] \quad (9)$$

بنابراین

$$f(x; \delta, \alpha, \xi) = \sum_{j=0}^{\infty} \eta_j g(x; (j + 1)\alpha, \xi) \quad (10)$$

به دست می‌آید که در آن $\eta_j = \delta \delta^j$ و $g(x; (j + 1)\alpha, \xi)$ تابع چگالی توزیع وایبول تعمیم یافته با پارامترهای $(j + 1)\alpha$ و ξ را نشان می‌دهد.

در غیر این صورت به ازای $\delta > 1$ داریم:

$$1 - \delta \exp[-\alpha H(x; \xi)] < 0 \Rightarrow \delta \{1 - \frac{1}{\delta}\} [1 - \exp(-\alpha H(x; \xi))] < 1$$

$$f(x; \delta, \alpha, \xi) = \frac{g(x; \alpha, \xi)}{\delta \{1 - \frac{1}{\delta}\} [1 - \exp(-\alpha H(x; \xi))]^2} \quad (11)$$

در این حالت، با دو بار به کار بردن بسط (۸) در رابطه (۱۱) خواهیم داشت:

$$f(x; \delta, \alpha, \xi) = \sum_{j=0}^{\infty} \nu_j g(x; (j + 1)\alpha, \xi)$$

$$\nu_j = \nu_j(\delta) = \frac{(-1)^j}{\delta^{(j+1)!}} \sum_{k=j}^{\infty} (k + 1)! (1 - 1/\delta)^k$$

بنابراین تابع چگالی خانواده مارشال اولکین وایبول تعمیم یافته می‌تواند به صورت یک ترکیب خطی نامتناهی از توزیع وایبول تعمیم یافته بیان شود.

در نهایت داریم: $f(x; \delta, \alpha, \xi) = \sum_{j=0}^{\infty} w_j g(x; (j + 1)\alpha, \xi)$ که

$$w_j = \begin{cases} \eta_j & 0 < \delta < 1 \\ \nu_j & \delta > 1 \end{cases} \quad (12)$$

و η_j و ν_j در عبارتهای بالا آمده‌اند.

۳.۱ برآورد گشتاوری

فرض کنید $Y_j \sim EW((j + 1)\alpha, \xi)$ نشان دهنده‌ی یک متغیر تصادفی با توزیع وایبول تعمیم یافته باشد که $g(y, (j + 1)\alpha, \xi)$ تابع چگالی متناظر با آن باشد.

گشتاور n ام متغیر تصادفی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$E(X^n) = \sum_{j=0}^{\infty} w_j E(Y_j^n) \quad (13)$$

تابع مولد گشتاور و k امین گشتاور ناقص متغیر تصادفی X به ترتیب زیر است:

$$M_X(t) = E(e^{tx}) = \sum_{j=0}^{\infty} w_j M_j(t),$$

$$T_k(z) = E(e^{tz}) = \sum_{j=0}^{\infty} w_j T_k^{(j)}(t)$$

که اعضای آن به صورت زیر هستند.

که در آن $M_X(t)$ تابع مولد گشتاور Y_j و عبارت زیر

$$\begin{aligned}
 U_{\delta\delta}(\theta) &= -n\delta^{-2}, \\
 U_{\delta\alpha}(\theta) &= 2 \sum_{i=1}^n \frac{[H(x_i; \xi) \exp[-\alpha H(x_i; \xi)]]}{\{1 - \bar{\delta} \exp[-\alpha H(x_i; \xi)]\}^2}, \\
 U_{\delta\xi}(\theta) &= 2\alpha \sum_{i=1}^n \frac{\partial H(x_i; \xi)}{\partial \xi_k} \frac{\exp[-\alpha H(x_i; \xi)]}{\{1 - \bar{\delta} \exp[-\alpha H(x_i; \xi)]\}^2}, \\
 U_{\alpha\alpha}(\theta) &= -\frac{n}{\alpha^2} + 2\bar{\delta} \sum_{i=1}^n \frac{H(x_i; \xi) \exp[-\alpha H(x_i; \xi)]}{\{1 - \bar{\delta} \exp[-\alpha H(x_i; \xi)]\}^2}, \\
 U_{\alpha\xi}(\theta) &= -2\bar{\delta} \sum_{i=1}^n \frac{\partial H(x_i; \xi)}{\partial \xi_k} \frac{\exp[-\alpha H(x_i; \xi)]}{1 - \bar{\delta} \exp[-\alpha H(x_i; \xi)]} \\
 &\quad \left[1 - \sum_{i=1}^n \frac{\alpha H(x_i; \xi)}{1 - \bar{\delta} \exp[-\alpha H(x_i; \xi)]} \right] + \sum_{i=1}^n \frac{\partial H(x_i; \xi)}{\partial \xi_k}, \\
 U_{\xi_k \xi_j}(\theta) &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{h(x_i; \xi)} \\
 &\quad * \left[\frac{\partial^2 h(x_i; \xi)}{\partial \xi_k \partial \xi_j} - \frac{1}{h(x_i; \xi)} \frac{\partial h(x_i; \xi)}{\partial \xi_k} \frac{\partial h(x_i; \xi)}{\partial \xi_j} \right] \\
 &\quad - \alpha \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 h(x_i; \xi)}{\partial \xi_k \partial \xi_j} \\
 &\quad - 2\bar{\delta} \alpha \sum_{i=1}^n \frac{\exp[-\alpha H(x_i; \xi)]}{1 - \bar{\delta} \exp[-\alpha H(x_i; \xi)]} \\
 &\quad * \left[\frac{\partial^2 H(x_i; \xi)}{\partial \xi_k \partial \xi_j} - \frac{\partial H(x_i; \xi)}{\partial \xi_k} \frac{\alpha H(x_i; \xi)}{1 - \bar{\delta} \exp[-\alpha H(x_i; \xi)]} \right].
 \end{aligned}$$

هنگامی که شرایط منظم استاندارد برقرار باشد، می توان نشان داد که $([\alpha, \delta, \xi]^T - \sqrt{n}([\hat{\alpha}, \hat{\delta}, \hat{\xi}]^T - [\alpha, \delta, \xi]^T))$ به توزیع نرمال چندمتغیره $K([\alpha, \delta, \xi])$ میل می کند که p بعد ξ است و $K([\alpha, \delta, \xi])^{-1}$ امید ریاضی ماتریس اطلاعات است که برای آن عبارت حدی $lim_{n \rightarrow \infty} J_n([\alpha, \delta, \xi]) = K([\alpha, \delta, \xi])$ برقرار است. [۱]

بر اساس این مطلب ناحیه های اطمینان برای توزیع مارشال اولکین وایبول تعمیم یافته قابل دسترس است. برای بررسی اینکه δ از نظر آماری متفاوت از یک است به عبارت دیگر برای آزمون $\delta = 1$: H_0 مقابل $H_1: \delta \neq 1$ ما از آماره $H_1: \delta \neq 1$ استفاده می کنیم؛ که $\hat{\theta}$ برآورد بیشینه درستنمایی θ تحت H_0 است و $\hat{\theta}$ برآورد بیشینه درستنمایی تحت H_1 است. توزیع حدی LR ، توزیع X_1^2 است.

۵.۱ استنباط بیزی

برای برآورد بیزی دو برآورد لیندلی و زنجیره مارکوف مونت کارلو مورد استفاده قرار گرفته است.

$$T_k^{(j)}(z) = \int_{-\infty}^z x^k g(x; (j+1)\alpha, \xi) dx$$

مستقیماً از توزیع مارشال اولکین وایبول تعمیم یافته حاصل می شود.

۴.۱ برآورد

در این بخش یک روند عمومی برای برآورد پارامترهای مارشال اولکین وایبول تعمیم یافته از یک نمونه n تایی ارائه می دهیم. فرض کنید x_1, x_2, \dots, x_n یک نمونه n تایی از متغیر تصادفی X باشد. تابع لگاریتم درست نمایی برای بردار پارامتری $\theta = (\delta, \alpha, \xi^T)^T$ به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
 \ell(\theta) &= n \log(\delta\alpha) + \sum_{i=1}^n \log[h(x_i; \xi)] - \alpha \sum_{i=1}^n H(x_i; \xi) - \\
 &\quad 2 \sum_{i=1}^n \log\{1 - \bar{\delta} \exp[-\alpha H(x_i; \xi)]\} \\
 U(\theta) &= \text{با استفاده از تابع لگاریتم درستنمایی بالا، مؤلفه های بردار } (U_\delta, U_\alpha, U_\xi^T)^T \text{ به صورت زیر حاصل می شوند:}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 U_\delta(\theta) &= \frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \delta} = \frac{n}{\delta} - 2 \sum_{i=1}^n \frac{\exp[-\alpha H(x_i; \xi)]}{1 - \bar{\delta} \exp[-\alpha H(x_i; \xi)]} \\
 U_\alpha(\theta) &= \frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \alpha} = \frac{n}{\alpha} - \sum_{i=1}^n H(x_i; \xi) \\
 &\quad - 2\bar{\delta} \sum_{i=1}^n \frac{H(x_i; \xi) \exp[-\alpha H(x_i; \xi)]}{1 - \bar{\delta} \exp[-\alpha H(x_i; \xi)]} \\
 U_{\xi_k}(\theta) &= \frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \xi_k} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{h(x_i; \xi)} \frac{\partial h(x_i; \xi)}{\partial \xi_k} - \alpha \sum_{i=1}^n \frac{\partial H(x_i; \xi)}{\partial \xi_k} \\
 &\quad - 2\bar{\delta} \alpha \sum_{i=1}^n \frac{\partial H(x_i; \xi)}{\partial \xi_k} \frac{\exp[-\alpha H(x_i; \xi)]}{1 - \bar{\delta} \exp[-\alpha H(x_i; \xi)]}
 \end{aligned}$$

و در نهایت، ماتریس اطلاعات افزاز شده برای خانواده مارشال اولکین وایبول تعمیم یافته عبارت است از

$$J(\theta) = - \begin{pmatrix} U_{\delta\delta} & U_{\delta\alpha} & | & U_{\delta\xi}^T \\ U_{\alpha\delta} & U_{\alpha\alpha} & | & U_{\alpha\xi}^T \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ U_{\xi\delta} & U_{\xi\alpha} & | & U_{\xi\xi}^T \end{pmatrix}$$

برآورد لیندلی

بر اساس تقریب لیندلی این امید ریاضی برای m متغیر تصادفی گوناگون به شرح زیر است :

$$m = ۲ :$$

$$I(x) = u(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) + \frac{1}{\nu} \left[(\hat{u}_{\theta_1, \theta_1} + 2\hat{u}_{\theta_1, \hat{\rho}_{\theta_1}}) \hat{\sigma}_{\theta_1, \theta_2} + (\hat{u}_{\theta_2, \theta_2} + 2\hat{u}_{\theta_2, \hat{\rho}_{\theta_2}}) \hat{\sigma}_{\theta_2, \theta_2} \right] + \frac{1}{\nu} \left[\hat{u}_{\theta_1} (\hat{L}_{\theta_1, \theta_1, \theta_2} \hat{\sigma}_{\theta_1, \theta_1} \hat{\sigma}_{\theta_1, \theta_2} + \hat{L}_{\theta_2, \theta_1, \theta_2} \hat{\sigma}_{\theta_1, \theta_1} \hat{\sigma}_{\theta_2, \theta_2}) + \hat{u}_{\theta_2} (\hat{L}_{\theta_1, \theta_2, \theta_2} \hat{\sigma}_{\theta_1, \theta_1} \hat{\sigma}_{\theta_2, \theta_2} + \hat{L}_{\theta_2, \theta_2, \theta_2} \hat{\sigma}_{\theta_2, \theta_1} \hat{\sigma}_{\theta_2, \theta_2}) \right]$$

$$m = ۳ :$$

$$I(x) = u(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \hat{\theta}_3) + \frac{1}{\nu} \left[(\hat{u}_{\theta_1, \theta_1} + 2\hat{u}_{\theta_1, \hat{\rho}_{\theta_1}}) \hat{\sigma}_{\theta_1, \theta_2} + (\hat{u}_{\theta_2, \theta_2} + 2\hat{u}_{\theta_2, \hat{\rho}_{\theta_2}}) \hat{\sigma}_{\theta_2, \theta_2} + (\hat{u}_{\theta_3, \theta_3} + 2\hat{u}_{\theta_3, \hat{\rho}_{\theta_3}}) \hat{\sigma}_{\theta_3, \theta_3} \right] + \frac{1}{\nu} \left[\hat{u}_{\theta_1} (\hat{L}_{\theta_1, \theta_1, \theta_2} \hat{\sigma}_{\theta_1, \theta_1} \hat{\sigma}_{\theta_1, \theta_2} + \hat{L}_{\theta_2, \theta_1, \theta_2} \hat{\sigma}_{\theta_1, \theta_1} \hat{\sigma}_{\theta_2, \theta_2}) + \hat{u}_{\theta_2} (\hat{L}_{\theta_1, \theta_2, \theta_2} \hat{\sigma}_{\theta_1, \theta_1} \hat{\sigma}_{\theta_2, \theta_2} + \hat{L}_{\theta_2, \theta_2, \theta_2} \hat{\sigma}_{\theta_2, \theta_1} \hat{\sigma}_{\theta_2, \theta_2}) + \hat{u}_{\theta_3} (\hat{L}_{\theta_1, \theta_1, \theta_3} \hat{\sigma}_{\theta_1, \theta_1} \hat{\sigma}_{\theta_3, \theta_3} + \hat{L}_{\theta_2, \theta_1, \theta_3} \hat{\sigma}_{\theta_1, \theta_1} \hat{\sigma}_{\theta_2, \theta_3}) + \hat{L}_{\theta_3, \theta_1, \theta_3} \hat{\sigma}_{\theta_1, \theta_1} \hat{\sigma}_{\theta_3, \theta_2} + \hat{L}_{\theta_2, \theta_1, \theta_3} \hat{\sigma}_{\theta_1, \theta_1} \hat{\sigma}_{\theta_2, \theta_3} + \hat{L}_{\theta_3, \theta_2, \theta_3} \hat{\sigma}_{\theta_2, \theta_1} \hat{\sigma}_{\theta_3, \theta_3} + \hat{L}_{\theta_2, \theta_2, \theta_3} \hat{\sigma}_{\theta_2, \theta_1} \hat{\sigma}_{\theta_3, \theta_3} \right]$$

روش زنجیره مارکوف مونت کارلو

همان‌گونه که در استنباط بیزی مشاهده شد، محاسبه توزیع پسین همیشه ساده نیست و در بسیاری از موارد مخرج کسر آماره بیزی به خاطر پیچیدگی محاسباتی با روش تحلیلی قابل محاسبه نیست؛ حتی اگر توزیع پسین قابل محاسبه باشد بسیاری از مقادیر پسین مانند میانگین و واریانس نمی‌تواند محاسبه شود. به‌طورکلی محاسبه امیدهای ریاضی پسین با مشکلات متنوعی از قبیل محاسبه توزیع پسین و یا محاسبه انتگرال متناظر روبرو است

$$\mathbb{E}(g(\Theta)|y) = \int g(\Theta) \pi(\Theta|y) d\Theta$$

الگوریتم‌های متعددی برای تولید زنجیره مارکوف وجود دارند. در میان این الگوریتم‌ها الگوریتم گیبس و الگوریتم نمونه‌گیری متروپلیس - هستینگس بیشتر در استنباط بیزی قابل قبول‌اند.

الگوریتم نمونه‌گیری گیبس

الگوریتم گیبس توزیع‌های گوناگون پسین پارامترها به‌شرط اینکه دیگر پارامترها مورد استفاده برای نمونه گرفتن توزیع پسین باشند، بکار

برآورد لیندلی نشان داد که نسبت دو انتگرال $\frac{\int w(\theta) e^{L(\theta)} d\theta}{\int \nu(\theta) e^{L(\theta)} d\theta}$ را می‌توان طوری تقریب زد که قسمت حذف‌شده از مرتبه $o(n^{-2})$ و قسمت اصلی که برای تقریب استفاده می‌شود، $o(n^{-1})$ باشد. در این قسمت انتگرالی $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_m)$ پارامتر و $L(\theta)$ لگاریتم تابع درست‌نمایی به‌صورت $L(\theta) = \sum \log p(x_i|\theta)$ است و x_1, \dots, x_n یک نمونه تصادفی از چگالی $p(\cdot|\theta)$ است. قرار می‌دهیم $\nu(\theta) = \pi(\theta)$ که $\pi(\theta)$ تابع چگالی پیشین θ است. [۵] بنابراین مخرج کسر نسبت نرمال کننده انتگرال در نظریه بیزی است و $W(\theta) = u(\theta)\pi(\theta)$ به‌طوری است که نسبت انتگرال تبدیل به $E(u(\theta)|x_1, \dots, x_n)$ می‌شود. با قرار دادن $\rho(\theta) = \log \pi(\theta)$ نسبت انتگرال تبدیل می‌شود به $\frac{\int u(\theta) e^{L(\theta)+\rho(\theta)} d\theta}{\int e^{L(\theta)+\rho(\theta)} d\theta}$ نسبت انتگرال جدید توسط لیندلی به‌صورت $\hat{u} + \frac{1}{\nu} \sum (\hat{u}_{ij} + 2\hat{u}_i \hat{\rho}_i) \hat{\sigma}_{ij} + \frac{1}{\nu} \sum \hat{L}_{ijk} \hat{u}_i \hat{\sigma}_{ij} \hat{\sigma}_{kl}$ تخمین زده شد، بخش اول $o(1)$ است و بقیه بخش‌ها $o(n^{-1})$ هستند و

$$\hat{u} = u(\hat{\theta}) \quad \hat{g}_i = g_i(\hat{\theta}) = \frac{\partial g}{\partial \theta_i} \Big|_{\theta=\hat{\theta}}$$

$$\hat{g}_{ij} = g_{ij}(\hat{\theta}) = \frac{\partial^2 g}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \Big|_{\theta=\hat{\theta}}$$

$$\hat{g}_{ijk} = g_{ijk}(\hat{\theta}) = \frac{\partial^3 g}{\partial \theta_i \partial \theta_j \partial \theta_k} \Big|_{\theta=\hat{\theta}}$$

که در آن $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_m)$ برآورد بیشینه درست‌نمایی θ و $\hat{\sigma}_{ij}$ از رابطه ماتریسی $(\hat{\sigma}_{ij}) = (-\hat{L}_{ij})$ به دست می‌آید؛ بنابراین

$$I(x) = E(u(\theta)|X = x) = \frac{\int u(\theta) e^{L(\theta)+\rho(\theta)} d\theta}{\int e^{L(\theta)+\rho(\theta)} d\theta} \quad (۱۴)$$

اما در این معادله $\theta_1, \dots, \theta_m$ مستقل هستند، بنابراین

$$\hat{\sigma}_{\theta_1, \theta_2} = \dots = \hat{\sigma}_{\theta_{m-1}, \theta_m} = 0$$

و با استفاده از صفحه ۲۲۷ مقاله لیندلی [۵] ، این برآورد به معادله زیر کاهش می‌یابد:

$$\hat{u} + \frac{1}{\nu} \sum (\hat{u}_{ii} + 2\hat{u}_i \hat{\rho}_i) \hat{\sigma}_{ii} + \frac{1}{\nu} \sum \hat{L}_{iik} \hat{u}_i \hat{\sigma}_{ik} \hat{\sigma}_{kk} \quad (۱۵)$$

ج) مرحله دوم را تکرار کنید تا زنجیره مارکوف به توزیع مانای خود برسد.

توجه داشته باشید که در رابطه بالا $\mathcal{L}(\cdot|x)$ تابع احتمال است، $P(\cdot)$ توزیع پسین و $(\theta_1^{(t)}, \dots, \theta_m^{(t)}|\theta_1^*, \dots, \theta_m^*)$ توزیع پیشنهادی است. به منظور پیاده‌سازی الگوریتم متروپلیس-هستینگس برای تولید نمونه از توزیع‌های تمام شرطی با توجه به ارتباط بین توزیع گاما و توزیع نمایی، می‌توان توزیع پیشنهادی هریک از الگوریتم‌ها را نمایی در نظر گرفت؛ بنابراین با توجه به گام‌های این الگوریتم، پارامترهای توزیع پیشنهادی در مرحله $(t+1)$ ام به نمونه پذیرفته‌شده در مرحله t ام بستگی دارد. به‌عنوان مثال در مرحله $(t+1)$ ام، ابتدا نمونه δ^* از توزیع نمایی $\exp(\delta^{(t)})$ استخراج می‌گردد؛ بنابراین در این مرحله امید ریاضی و واریانس توزیع پیشنهادی به ترتیب برابر با $\frac{1}{\delta^{(t)}}$ و $\frac{1}{(\delta^{(t)})^2}$ خواهد بود.

بر این اساس اگر این زنجیره N بار تکرار شود و M تا از آن‌ها به‌عنوان متغیرهای سوخته شده در نظر گرفته شود، خواهیم داشت:

$$\mathbb{E}(g(\Theta)|y) = \int g(\Theta) \pi(\Theta|y) d\Theta = \frac{1}{N-M} \sum_{i=M+1}^N g(\Theta_i)$$

تابع‌های زیان

در این مقاله ما پنج تابع زیان را بررسی کرده‌ایم که در زیر آورده شده است:

الف) تابع زیان مربع خطا

$$L_s = k(\hat{\theta} - \theta)^2$$

و برآورد بیز آن عبارت است از:

$$\hat{\theta}_s = E(\theta|x) = \int \theta \pi(\theta|x) d\theta$$

ب) تابع زیان آنتروپی

$$L_E = \frac{\hat{\theta}}{\theta} - \ln \frac{\hat{\theta}}{\theta} - 1$$

و برآورد بیز آن عبارت است از:

$$\hat{\theta}_E = \frac{1}{E(\frac{1}{\theta}|x)}$$

ج) تابع زیان لاینکس

$$L_L = e^{(\hat{\theta}-\theta)} - (\hat{\theta} - \theta) - 1$$

و برآورد بیز آن عبارت است از:

$$\hat{\theta}_L = -\ln E(e^{-\theta}|x)$$

می‌گیرد. این الگوریتم در سه مرحله به‌صورت زیر است:

۱. مقدار اولیه $\Theta^{(0)} = (\Theta_1^{(0)}, \Theta_2^{(0)}, \dots, \Theta_m^{(0)})$ را در نظر بگیرید.

۲. در مرحله $(t+1)$ ام بر اساس مرحله t ام، $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_m$ بر اساس زیر محاسبه می‌شود:

$$\theta_1^{(t+1)} \sim P(\theta_1|\theta_1^{(t)}, \dots, \theta_m^{(t)}; x)$$

$$\theta_2^{(t+1)} \sim P(\theta_2|\theta_1^{(t)}, \theta_2^{(t)}, \dots, \theta_m^{(t)}; x)$$

$$\theta_m^{(t+1)} \sim P(\theta_m|\theta_1^{(t)}, \theta_2^{(t)}, \dots, \theta_{m-1}^{(t)}; x)$$

۳. مرحله دوم را تا رسیدن به توزیع مانایی ادامه دهید.

الگوریتم متروپلیس-هستینگس

هنگامی‌که توزیع‌های شرطی پسین، شکل مشخصی نداشته باشند الگوریتم متروپلیس-هستینگس برای نمونه مورداستفاده قرار می‌گیرد. این الگوریتم دارای ساختار رد و پذیرش است و مشاهدات به‌وسیله توزیع پیشنهادی به‌عنوان نمونه‌های ممکن توزیع پسین بر اساس یک قاعده احتمالی ارزیابی می‌کند و آن‌ها را با احتمال معینی می‌پذیرد؛ بنابراین برای استفاده از این الگوریتم نیاز به توزیع پیشنهادی است که انتخاب آن بر دقت و سرعت همگرایی الگوریتم تأثیر می‌گذارد. یکی از ویژگی‌های مطلوب این الگوریتم این است که آن برای توزیع پسین متناسب است. مراحل این الگوریتم به شرح زیر است:

مقدار اولیه $\Theta^{(0)} = (\Theta_1^{(0)}, \Theta_2^{(0)}, \dots, \Theta_m^{(0)})$ را در نظر بگیرید.

در مرحله $(t+1)$ ام بر اساس مرحله t ام، $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_m$ بر اساس زیر محاسبه می‌شود:

الف) با استفاده از توزیع طراحی‌شده $(\theta_1^{(t)}, \dots, \theta_m^{(t)}|\theta_1^*, \dots, \theta_m^*)$ مقادیر $(\theta_1^*, \dots, \theta_m^*)$ را تولید کنید.

ب) نسبت هستینگس را بر اساس رابطه زیر محاسبه کنید.

$$H = \frac{\mathcal{L}(\theta_1^*, \dots, \theta_m^*|x) P(\theta_1^*, \dots, \theta_m^*) q(\theta_1^{(t)}, \dots, \theta_m^{(t)}|\theta_1^*, \dots, \theta_m^*)}{\mathcal{L}(\theta_1^{(t)}, \dots, \theta_m^{(t)}|x) P(\theta_1^{(t)}, \dots, \theta_m^{(t)}) q(\theta_1^*, \dots, \theta_m^*|\theta_1^{(t)}, \dots, \theta_m^{(t)})}$$

مقدار $\tilde{u} = \min(H, 1)$ را محاسبه کنید، سپس یک نمونه از توزیع

همگن به نام U تولید کنید، به‌طوری‌که:

$$\begin{cases} (\theta_1^{(t+1)}, \dots, \theta_m^{(t+1)}) = (\theta_1^*, \dots, \theta_m^*) & \text{if } \tilde{u} \leq U \\ (\theta_1^{(t+1)}, \dots, \theta_m^{(t+1)}) = (\theta_1^{(t)}, \dots, \theta_m^{(t)}) & \text{if } \tilde{u} \geq U \end{cases}$$

(د) تابع زیان لاینکس اصلاح شده

$$L_m L = e^{(\frac{\hat{\theta}}{\theta} - 1)} - (\frac{\hat{\theta}}{\theta} - 1) - 1$$

و برآورد بیز آن عبارت است از:

$$E(\frac{1}{\hat{\theta}} e^{\frac{\hat{\theta} m L}{\theta}} | x) = \exp E(\frac{1}{\hat{\theta}} | x)$$

(ه) تابع زیان مربع خطای لگاریتمی

$$L_s l = (\ln \hat{\theta} - \ln \theta)^2$$

و برآورد بیز آن عبارت است از:

$$\hat{\theta}_s l = e^{E(\ln \theta | x)}$$

می‌دانیم

$$w_j = \begin{cases} \eta_j & 0 < \delta < 1 \\ \nu_j & \delta > 1 \end{cases}$$

بنابراین اولین گشتاور توزیع به صورت زیر به دست می‌آید:

$$= \begin{cases} \sum_{j=0}^{\infty} \delta \bar{\delta}^j \int_0^{\infty} x^j \alpha x(j+1) \exp(-\alpha x^{\delta}(j+1)) dx & 0 < \delta < 1 \\ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{\delta(j+1)!} \sum_{k=j}^{\infty} (k+1)! (1-1/\delta)^k & \delta > 1 \\ \times \int_0^{\infty} x^j \alpha x(j+1) \exp(-\alpha x^{\delta}(j+1)) dx \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \sum_{j=0}^{\infty} \delta \bar{\delta}^j \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha(j+1)}} & 0 < \delta < 1 \\ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{\delta} (1-1/\delta)^j \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha(j+1)}} & \delta > 1 \end{cases}$$

و مقادیر عددی گشتاورهای اول توزیع مارشال اولکین ریلی به ازای δ های مختلف در جداول ۲ و ۳ به دست آورده شده است.

جدول ۲. جدول مقادیر گشتاور اول توزیع مارشال اولکین ریلی به ازای $0 < \delta < 1$

		δ					
α		۰.۵	۰.۱	۰.۳	۰.۵	۰.۸	۰.۹۸
۰.۱	۱/۱۰۴۹۰۵	۰.۸۰۰۴۶۱	۰.۴۷۵۸۷۸۱	۰.۳۷۷۵۶۷۳	۰.۳۰۷۷۵۹۲	۰.۲۸۲۶۰۷۵	
۰.۹	۳.۳۱۴۷۱۴	۲.۴۰۱۳۸۴	۱.۴۲۷۶۳۴	۱.۱۳۲۷۰۲	۰.۹۲۳۲۷۷۶	۰.۸۴۷۸۲۲۴	
۲	۴.۹۴۱۲۸۴	۳.۵۷۹۷۷۲	۲.۱۲۸۱۹۱	۱.۶۸۸۵۳۲	۱.۳۷۶۳۴۱	۱.۲۶۳۸۵۹	
۵	۴.۹۴۱۲۸۴	۵.۶۶۰۱۱۶	۳.۳۶۴۹۶۶	۲.۶۶۹۸۰۴	۲.۶۶۹۸۰۴	۱.۹۹۸۳۳۷	
۲۰	۱۵.۶۲۵۷۱	۱۱.۳۲۰۲۳	۶.۷۲۹۹۳۲	۵.۳۳۹۶۰۸	۴.۳۵۲۳۷۲	۳.۹۹۶۶۷۳	
۲۰۰	۴۹.۴۱۲۸۴	۳۵.۷۹۷۷۲	۲۱.۲۸۱۹۱	۱۶.۸۸۵۳۲	۱۳.۷۶۳۴۱	۱۲.۶۳۸۵۹	

جدول ۳. جدول مقادیر گشتاور اول توزیع مارشال اولکین ریلی به ازای $\delta > 1$

		δ					
α		۱.۵	۲	۴	۷	۸	۱۰
۰.۰۵	۶.۸۰۲۷۰۳	۴.۶۸۴۲۹	۲.۰۹۲۱۱۳	۱.۱۴۴۲۰	۰.۹۹۴۱۲	۰.۷۸۷۵۳	
۰.۳	۰.۸۷۸۲۲	۰.۶۰۴۷۳	۰.۲۷۰۰۹	۰.۱۴۷۷۱	۰.۱۲۸۳۴	۰.۱۰۱۶۷	
۰.۹	۰.۵۰۷۰۳۳۶	۰.۳۴۹۱۴۶۳	۰.۱۵۵۹۳۶۹	۰.۰۸۵۲۸۴	۰.۰۵۸۶۹۹	۰.۰۵۸۶۹۹	
۲	۰.۳۴۰۱۳	۰.۲۳۴۲۱	۰.۱۰۴۶	۰.۰۵۷۲۱	۰.۰۴۹۷	۰.۰۳۹۳۷	
۱۰۰	۰.۰۴۸۱	۰.۰۳۳۱۲	۰.۰۱۴۷۹۳	۰.۰۰۸۰۹	۰.۰۰۷۰۲۹	۰.۰۰۵۵۶۸	

دو توزیع خاص

۲ خانواده توزیع مارشال اولکین ریلی

$H(x; \xi) = x^{\xi}$ و $h(x; \xi) = \xi x$ که به توزیع ریلی ختم می‌شود، تابع توزیع آن به صورت

$$F(x; \delta, \alpha) = \frac{1 - \exp[-\alpha x^{\delta}]}{1 - \delta \exp[-\alpha x^{\delta}]} \quad (۱۶)$$

که $\alpha > 0$ و $\delta > 0$ با استفاده از معادله (۱۶) تابع بقا این توزیع جدید به صورت زیر است:

$$\bar{F}(x; \delta, \alpha) = \frac{\delta \exp[-\alpha x^{\delta}]}{1 - \delta \exp[-\alpha x^{\delta}]} \quad (۱۷)$$

تابع نرخ مخاطره به صورت معادله (۱۸) است

$$\tau(x; \delta, \alpha) = \frac{\alpha x}{1 - \delta \exp[-\alpha x^{\delta}]} \quad (۱۸)$$

همچنین تابع چگالی احتمال آن به شرح زیر می‌باشد

$$f(x; \delta, \alpha) = \frac{\alpha \delta \alpha x \exp[-\alpha x^{\delta}]}{\{1 - \delta \exp[-\alpha x^{\delta}]\}^2} \quad (۱۹)$$

۱.۲ برآورد گشتاوری

k امین گشتاور برای توزیع مارشال اولکین ریلی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$T_k(z) = \sum_{j=0}^{\infty} w_j T_k^{(j)}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} w_j \int_{-\infty}^z x^k g(x; (j+1)\alpha, \xi) dx = \sum_{j=0}^{\infty} w_j \int_{-\infty}^z x^k \alpha x(j+1) \exp(-\alpha x^{\delta}(j+1)) dx$$

۲.۲ فاصله اطمینان

می‌آید.

$$[\hat{V}] = J^{-1}(\theta) = - \begin{pmatrix} \widehat{var}(\delta) & cov(\delta, \alpha) \\ cov(\alpha, \delta) & \widehat{var}(\alpha) \end{pmatrix}_{\downarrow(\delta, \alpha)}$$

هنگامی که شرایط منظم استاندارد برقرار باشد، می‌توان نشان داد که $\sqrt{n}([\hat{\alpha}, \hat{\delta}]^T - [\alpha, \delta]^T)$ به توزیع نرمال چندمتغیره $N_r(0, K([\alpha, \delta])^{-1})$ امید ریاضی ماتریس اطلاعات است که برای آن عبارت حدی زیر برقرار است. [۱]

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_n([\alpha, \delta]) = K([\alpha, \delta])$$

بر اساس این مطلب ناحیه‌های اطمینان برای توزیع قابل دسترس است. سپس فاصله اطمینان $\% (1 - \eta) ۱۰۰$ برای پارامترهای α و δ به صورت

$$\left(\alpha \pm Z_{\frac{\eta}{2}} \sqrt{\widehat{var}(\alpha)} \right), \left(\delta \pm Z_{\frac{\eta}{2}} \sqrt{\widehat{var}(\delta)} \right)$$

داده می‌شود، که $Z_{\frac{\eta}{2}}$ نرمال استاندارد است.

جدول ۵. مقادیر عددی برآورد فاصله اطمینان پارامتری برای

داده‌های تصادفی تولیدشده از توزیع تعمیم‌یافته مارشال اولکین ریلی

مقادیر به دست آمده	
$U_{\delta\delta}$	-۴,۷۴۵,۰۸۸
$U_{\alpha\delta}$	۵,۲۳۸,۰۱۱
$\widehat{var}(\delta)$	۰,۲۶۶۶۲
$\widehat{var}(\alpha)$	۰,۰۴۵۸۵
$cov(\delta, \alpha)$	۰,۰۵۰۶۱
پارامترها	فاصله اطمینان
δ	(۳,۵۷۸, ۵,۴۰۲۰)
α	(۲,۴۶۷۶, ۳,۳۰۶۴)

برای بررسی اینکه پارامتر δ از نظر آماری متفاوت از یک است به عبارت دیگر برای آزمون $H_0: \delta = 1$ در مقابل $H_1: \delta \neq 1$ از آماره $LR = 2\{l(\hat{\delta}) - l(\bar{\delta})\}$ استفاده می‌کنیم؛ که $\hat{\delta}$ برآورد بیشینه درستنمایی δ تحت H_1 است و $\bar{\delta}$ برآورد بیشینه درستنمایی تحت H_0 است. تحت فرض H_0 توزیع حدی، توزیع χ^2 با یک درجه آزادی است. اگر مقدار آماره آزمون LR از چندک $\% (1 - \alpha) ۱۰۰$ توزیع χ^2 یک درجه آزادی بزرگ‌تر شود، فرض H_0 را رد می‌کنیم.

برای بررسی اینکه پارامتر α از نظر آماری متفاوت از یک است به عبارت دیگر برای آزمون $H_0: \alpha = 0$ در مقابل $H_1: \alpha \neq 0$ از آماره $LR = 2\{l(\hat{\alpha}) - l(\bar{\alpha})\}$ استفاده می‌کنیم؛ که $\hat{\alpha}$ برآورد بیشینه درستنمایی نامقید α تحت H_1 است و $\bar{\alpha}$ برآورد بیشینه درستنمایی مقید

فرض کنید x_1, x_2, \dots, x_n یک نمونه n تایی از متغیر تصادفی X باشد. تابع لگاریتم درست نمایی برای بردار پارامتری $\theta = (\delta, \alpha)^T$ به صورت زیر است:

$$\ell(\theta) = n \log(2\delta\alpha) + \sum_{i=1}^n \log x_i - \alpha \sum_{i=1}^n x_i^x - 2 \sum_{i=1}^n \log\{1 - \delta \exp(-\alpha x_i^x)\}$$

با استفاده از تابع لگاریتم درستنمایی بالا، مؤلفه‌های بردار $U(\theta) = (U_\delta, U_\alpha)^T$ به صورت زیر حاصل می‌شوند:

$$U_\delta(\theta) = \frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \delta} = \frac{n}{\delta} - 2 \sum_{i=1}^n \frac{\exp(-\alpha x_i^x)}{1 - \delta \exp(-\alpha x_i^x)}$$

$$U_\alpha(\theta) = \frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \alpha} = \frac{n}{\alpha} - \sum_{i=1}^n x_i^x - 2\delta \sum_{i=1}^n \frac{x_i^x \exp(-\alpha x_i^x)}{1 - \delta \exp(-\alpha x_i^x)}$$

حل کردن معادلات بالا به دلیل نداشتن یک راه حل صریح کار ساده‌ای نیست، چون نمی‌تواند برآورد بیشینه درستنمایی را به صورت بسته به دست آورد، محاسبه آن باید به صورت عددی با استفاده از حل معادلات تکرارشونده که به نقاط اولیه بستگی دارد انجام شود. از این رو ما با استفاده از زبان برنامه‌نویسی R و داده‌های تصادفی، برآوردها را به دست می‌آوریم.

جدول ۴. مقادیر عددی برآورد بیشینه درستنمایی پارامترها

$-loglik$	MLE	پارامترها
۷,۰۲۹,۳۳۶	۴,۵۹۰,۶۸۹	$\hat{\delta}$
۷,۰۲۹,۳۳۶	۲,۸۱۷,۰۵۹	$\hat{\alpha}$

ماتریس اطلاعات افزاشده دارای مشتقات جزئی دوم که به راحتی می‌توان آن‌ها را به دست آورد؛ و در نهایت، ماتریس اطلاعات افزاشده عبارت است از

$$J(\theta) = - \begin{pmatrix} U_{\delta\delta} & U_{\delta\alpha} \\ U_{\alpha\delta} & U_{\alpha\alpha} \end{pmatrix}_{\downarrow(\delta=\hat{\delta}, \alpha=\hat{\alpha})}$$

که اعضای آن به صورت زیر هستند.

$$U_{\delta\delta}(\theta) = -n\delta^{-2}$$

$$U_{\delta\alpha}(\theta) = 2 \sum_{i=1}^n \frac{x_i^x \exp(-\alpha x_i^x)}{\{1 - \delta \exp(-\alpha x_i^x)\}^2}$$

$$U_{\alpha\alpha}(\theta) = -\frac{n}{\alpha^2} + 2\delta \sum_{i=1}^n \frac{x_i^x \exp(-\alpha x_i^x)}{\{1 - \delta \exp(-\alpha x_i^x)\}^2}$$

بنابراین، ماتریس مجانبی واریانس کوواریانس $[\hat{V}]$ برای برآورد بیشینه درستنمایی با معکوس کردن ماتریس اطلاعات افزاشده $J(\theta)$ به دست

تحت H_0 است. تحت فرض H_0 توزیع حدی، توزیع نرمال است. اگر مقدار آماره آزمون LR از چندک $\% (1-\alpha) \cdot 100$ توزیع نرمال بزرگ‌تر شود، فرض H_0 را رد می‌کنیم.

۳.۲ استنباط بیزی برای توزیع تعمیم‌یافته مارشال اولکین ریلی

در این بخش، برآورد بیز از پارامترهای مجهول را تحت توابع زیان مربع خطا، تابع زیان لاینکس، تابع زیان آنتروپی، مربع خطی لگاریتمی و لاینکس اصلاح‌شده را دریافت می‌کنیم. فرض بر این است که پارامترهای δ و α مستقل هستند و از توزیع‌های پیشین گاما پیروی می‌کنند.

$$\pi_1(\delta) \propto \delta^{b_1-1} e^{-b_1\delta}$$

$$\pi_2(\alpha) \propto \alpha^{b_2-1} e^{-b_2\alpha}$$

در اینجا تمام ابرپارامترهای b_1, b_2, b_3, b_4 و b_5 معلوم و غیر منفی فرض شده است. توزیع توأم پیشین برای α و δ برابر

$$\pi(\delta, \alpha) \propto \delta^{b_1-1} e^{-b_1\delta} \alpha^{b_2-1} e^{-b_2\alpha}$$

بنابراین تابع توأم پسین به صورت زیر به دست آمده است

$$\pi(\delta, \alpha | \mathbf{x}) \propto \delta^{n+b_1-1} \alpha^{n+b_2-1} \prod_{i=1}^n x_i e^{-b_1\delta} e^{-\alpha \{\sum_{i=1}^n x_i + b_2\}} \times \prod_{i=1}^n \{1 - \delta \exp(-\alpha x_i)\}^{-2} \quad (20)$$

واضح است که محاسبه تحلیلی عبارت بالا غیرممکن است زیرا به دست آوردن فرم‌های بسته برای توزیع‌های پسین برای هر پارامتر بسیار دشوار است. روش‌های مختلفی برای حل این انتگرال‌ها وجود دارد. روش اولی که برای تقریب این انتگرال استفاده کردیم روش تقریب لیندلی است. همان‌طور که در بخش ۵.۱ گفتیم داریم

$$I(x) = E(u(\delta, \alpha) | X = x) = \frac{\int_{\delta} \int_{\alpha} u(\delta, \alpha) e^{L(\mathbf{x}|\delta, \alpha) + \rho(\delta, \alpha)} d\theta d\alpha}{\int_{\delta} \int_{\alpha} e^{L(\mathbf{x}|\delta, \alpha) + \rho(\delta, \alpha)} d\theta d\alpha}$$

که $u(\delta, \alpha)$ تابعی از θ و α است و $L(\delta, \alpha)$ و $\rho(\delta, \alpha)$ به ترتیب تابع لگاریتم درست‌نمایی و لگاریتم توزیع پیشین توأم δ و α است؛ که کاهش یافته این معادله برابر است با:

$$I(x) = u(\hat{\delta}, \hat{\alpha}) + \frac{1}{4} \left[(\hat{u}_{\delta\delta} + 2\hat{u}_{\delta}\hat{\rho}_{\delta})\hat{\sigma}_{\delta\delta} + (\hat{u}_{\alpha\alpha} + 2\hat{u}_{\alpha}\hat{\rho}_{\alpha})\hat{\sigma}_{\alpha\alpha} \right] + \frac{1}{4} \left[\hat{u}_{\delta}(\hat{L}_{\delta\delta\delta}\hat{\sigma}_{\delta\delta}\hat{\sigma}_{\delta\delta} + \hat{L}_{\alpha\alpha\delta}\hat{\sigma}_{\delta\delta}\hat{\sigma}_{\alpha\alpha}) + \hat{u}_{\alpha}(\hat{L}_{\delta\delta\alpha}\hat{\sigma}_{\delta\delta}\hat{\sigma}_{\alpha\alpha} + \hat{L}_{\alpha\alpha\alpha}\hat{\sigma}_{\alpha\alpha}\hat{\sigma}_{\alpha\alpha}) \right]$$

درحالی‌که:

$$u_{ij} = \frac{\partial^i u(\delta, \alpha)}{\partial \delta^i \partial \alpha^j}, \quad L_{ij} = \frac{\partial^{i+j} u(\delta, \alpha)}{\partial \delta^i \partial \alpha^j} \quad i, j = 0, 1, 2, 3, \quad i+j = 3$$

$$\rho_{ij} = \frac{\partial \rho(\delta, \alpha)}{\partial \delta^i \partial \alpha^j}, \quad \rho = \ln \pi(\delta, \alpha),$$

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} L_{22} & L_{11} \\ L_{11} & L_{22} \end{bmatrix}^{-1}$$

$$L_{11} = 2 \sum_{i=n}^{\infty} \frac{x^i \exp(-\alpha x^i)}{\{1 - \delta \exp(-\alpha x^i)\}^2}, \quad L_{22} = -n\delta^{-2},$$

$$L_{22} = -\frac{n}{\alpha^2} + 2\delta \sum_{i=n}^{\infty} \frac{x^i \exp(-\alpha x^i)}{\{1 - \delta \exp(-\alpha x^i)\}^2},$$

$$D = \frac{1}{L_{22}L_{11} - L_{12}L_{21}}, \quad \sigma_{11} = DL_{22}, \quad \sigma_{22} = DL_{11},$$

$$\sigma_{12} = DL_{12}, \quad L_{22} = \frac{2n}{\delta^2}, \quad L_{12} = L_{21},$$

$$L_{22} = \frac{2n}{\alpha^2} + \delta \sum_{i=n}^{\infty} \frac{2x^i \exp(-\alpha x^i) \{1 - \delta \exp(-\alpha x^i)\}}{\{1 - \delta \exp(-\alpha x^i)\}^2},$$

$$\rho = (b_1 - 1) \ln \delta + (b_2 - 1) \ln \alpha - b_1 \delta - b_2 \alpha,$$

$$\rho_{11} = \frac{\partial \rho}{\partial \delta} = \frac{b_1 - 1}{\delta} - b_1, \quad \rho_{22} = \frac{\partial \rho}{\partial \alpha} = \frac{b_2 - 1}{\alpha} - b_2$$

برای مقادیری که در بالا به دست آمد، برآورد بیزی پارامترها تحت توابع زیان مربع خطا، آنتروپی، لاینکس، مربع خطی لگاریتمی و لاینکس اصلاح‌شده در جدول (۶) آمده است. به طوری‌که $\hat{\delta}$ و $\hat{\alpha}$ برآورد پارامتر δ و α است.

برآورد بیزی پارامترها برای تشکیل بازه اطمینان بیزی با استفاده از نرم‌افزار R محاسبه و در مطالعات شبیه‌سازی ذکر شده است.

۴.۲ روش زنجیره مارکوف مونت کارلو

برآورد بیز تحت تابع زیان مربع خطا

$$u_{BS}(\delta, \alpha) = E[u(\delta, \alpha) | \mathbf{x}] = \int_{\delta} \int_{\alpha} u(\delta, \alpha) \pi^*(\delta, \alpha | \mathbf{x}) d\alpha d\delta$$

برآورد بیز تحت تابع زیان آنتروپی

$$u_{BG}(\delta, \alpha) = [E[u(\delta, \alpha)^{-a} | \mathbf{x}]]^{-\frac{1}{a}} = \left(\int_{\delta} \int_{\alpha} [u(\delta, \alpha)]^{-a} \pi^*(\delta, \alpha | \mathbf{x}) d\alpha d\delta \right)^{-\frac{1}{a}}$$

برآورد بیز تحت تابع زیان لاینکس

$$u_{BL}(\delta, \alpha) = -\frac{1}{a} \ln [E[e^{-au(\delta, \alpha)} | \mathbf{x}]] = -\frac{1}{a} \ln \left(\int_{\delta} \int_{\alpha} e^{-au(\delta, \alpha)} \pi^*(\delta, \alpha | \mathbf{x}) d\alpha d\delta \right)$$

برآورد بیز تحت تابع زیان لاینکس اصلاح شده

برآورد بیز تحت تابع زیان لگاریتم مربع خطا

$$u_{BSL}(\delta, \alpha) = \exp[E[\ln(u(\delta, \alpha))^{-a} | \mathbf{x}]]$$

$$= \exp\left(\int_{\delta} \int_{\alpha} [\ln(u(\delta, \alpha))]^{-a} \pi^*(\delta, \alpha | \mathbf{x}) d\alpha d\delta\right)$$

$$u_{BmL}(\delta, \alpha) = \exp[E[u(\delta, \alpha)^{-a} | \mathbf{x}]]$$

$$= \exp\left(\int_{\delta} \int_{\alpha} [u(\delta, \alpha)]^{-a} \pi^*(\delta, \alpha | \mathbf{x}) d\alpha d\delta\right)$$

جدول ۰۶. برآوردهای بیز تحت تابع زیان‌های مختلف به روش لیندلی

تابع زیان	پارامتر	برآورد بیز
مربع خطا	δ	$\hat{\delta} + \hat{\rho}_\delta \hat{\sigma}_{\delta\delta} + \frac{1}{\hat{\alpha}} [\hat{\sigma}_{\delta\delta} (\hat{L}_{\delta\delta\delta} \hat{\sigma}_{\delta\delta} + \hat{L}_{\alpha\alpha\delta} \hat{\sigma}_{\alpha\alpha})]$
	α	$\hat{\alpha} + \hat{\rho}_\alpha \hat{\sigma}_{\alpha\alpha} + \frac{1}{\hat{\delta}} [\hat{\sigma}_{\alpha\alpha} (\hat{L}_{\delta\delta\alpha} \hat{\sigma}_{\delta\delta} + \hat{L}_{\alpha\alpha\alpha} \hat{\sigma}_{\alpha\alpha})]$
آنتروپی	δ	$\hat{\delta} \left[1 + \left(\frac{1}{\hat{\delta}} - \frac{1}{\hat{\delta}} \hat{\rho}_\delta \right) \hat{\sigma}_{\delta\delta} - \frac{1}{\hat{\delta}} \hat{\sigma}_{\delta\delta} (\hat{L}_{\delta\delta\delta} \hat{\sigma}_{\delta\delta} + \hat{L}_{\alpha\alpha\delta} \hat{\sigma}_{\alpha\alpha}) \right]^{-1}$
	α	$\hat{\alpha} \left[1 + \left(\frac{1}{\hat{\alpha}} - \frac{1}{\hat{\alpha}} \hat{\rho}_\alpha \right) \hat{\sigma}_{\alpha\alpha} - \frac{1}{\hat{\alpha}} \hat{\sigma}_{\alpha\alpha} (\hat{L}_{\delta\delta\alpha} \hat{\sigma}_{\delta\delta} + \hat{L}_{\alpha\alpha\alpha} \hat{\sigma}_{\alpha\alpha}) \right]^{-1}$
لاینکس	δ	$\hat{\delta} - \ln \left\{ 1 + \left[\left(\frac{1}{\hat{\delta}} - \hat{\rho}_\delta \right) \hat{\sigma}_{\delta\delta} - \frac{1}{\hat{\delta}} \hat{\sigma}_{\delta\delta} (\hat{L}_{\delta\delta\delta} \hat{\sigma}_{\delta\delta} + \hat{L}_{\alpha\alpha\delta} \hat{\sigma}_{\alpha\alpha}) \right] \right\}$
	α	$\hat{\alpha} - \ln \left\{ 1 + \left[\left(\frac{1}{\hat{\alpha}} - \hat{\rho}_\alpha \right) \hat{\sigma}_{\alpha\alpha} - \frac{1}{\hat{\alpha}} \hat{\sigma}_{\alpha\alpha} (\hat{L}_{\delta\delta\alpha} \hat{\sigma}_{\delta\delta} + \hat{L}_{\alpha\alpha\alpha} \hat{\sigma}_{\alpha\alpha}) \right] \right\}$
مربع خطای لگاریتمی	δ	$\hat{\delta} \exp \left\{ \frac{\hat{\sigma}_{\delta\delta}}{\hat{\delta}} \left(-\frac{1}{\hat{\delta}} + \hat{\rho}_\delta + (\hat{L}_{\delta\delta\delta} \hat{\sigma}_{\delta\delta} + \hat{L}_{\alpha\alpha\delta} \hat{\sigma}_{\alpha\alpha}) \right) \right\}$
	α	$\hat{\alpha} \exp \left\{ \frac{\hat{\sigma}_{\alpha\alpha}}{\hat{\alpha}} \left(-\frac{1}{\hat{\alpha}} + \hat{\rho}_\alpha + (\hat{L}_{\delta\delta\alpha} \hat{\sigma}_{\delta\delta} + \hat{L}_{\alpha\alpha\alpha} \hat{\sigma}_{\alpha\alpha}) \right) \right\}$
لاینکس اصلاح شده	δ	$\hat{\delta} \left[1 + \left(\frac{c(c+1)}{\hat{\delta}^2} - \frac{c}{\hat{\delta}} \hat{\rho}_\delta \right) \hat{\sigma}_{\delta\delta} - \frac{c}{\hat{\delta}} \hat{\sigma}_{\delta\delta} (\hat{L}_{\delta\delta\delta} \hat{\sigma}_{\delta\delta} + \hat{L}_{\alpha\alpha\delta} \hat{\sigma}_{\alpha\alpha}) \right]^{-\frac{1}{c}}$
	α	$\hat{\alpha} \left[1 + \left(\frac{c(c+1)}{\hat{\alpha}^2} - \frac{c}{\hat{\alpha}} \hat{\rho}_\alpha \right) \hat{\sigma}_{\alpha\alpha} - \frac{c}{\hat{\alpha}} \hat{\sigma}_{\alpha\alpha} (\hat{L}_{\delta\delta\alpha} \hat{\sigma}_{\delta\delta} + \hat{L}_{\alpha\alpha\alpha} \hat{\sigma}_{\alpha\alpha}) \right]^{-\frac{1}{c}}$

بر این اساس خواهیم داشت:

$$\mathbb{E}(u(\delta, \alpha) | y) = \int u(\delta, \alpha) \pi(\delta, \alpha | y) d\delta d\alpha = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N u(\delta_j, \alpha_j)$$

در نتیجه، برآورد پارامترها بر اساس توابع زیان مختلف در جدول (۷) خلاصه شده است:

جدول ۰۷. برآوردهای بیز تحت تابع زیان‌های مختلف به روش زنجیره مارکوف مونت کارلو

برآورد		
$\hat{\delta}_S = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta^{(i)}$	مربع خطا	
$\hat{\delta}_S = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta^{(i)}$		
$\hat{\delta}_E = \frac{N}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\delta^{(i)}}}$	آنتروپی	
$\hat{\alpha}_E = \frac{N}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\alpha^{(i)}}}$		
$\hat{\delta}_L = -\ln \left\{ \frac{\sum_{i=1}^N \exp(-\delta^{(i)})}{N} \right\}$	لاینکس	
$\hat{\alpha}_L = -\ln \left\{ \frac{\sum_{i=1}^N \exp(-\alpha^{(i)})}{N} \right\}$		
$\hat{\delta}_{mL} = \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\delta^{(i)})^{-\frac{1}{c}} \right)^{-\frac{1}{c}}$	لاینکس اصلاح شده	
$\hat{\alpha}_{mL} = \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\alpha^{(i)})^{-\frac{1}{c}} \right)^{-\frac{1}{c}}$		
$\hat{\delta}_{SL} = \exp \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta^{(i)} \right)$	مربع خطای لگاریتمی	
$\hat{\alpha}_{SL} = \exp \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \alpha^{(i)} \right)$		

محاسبه معادلات بالا به صورت تحلیل بسیار دشوار است؛ بنابراین روش زنجیره مارکوف مونت کارلو را استفاده کردیم. نمونه‌هایی از ۲۰ تولید می‌کنیم و معادلات بالا را تقریب می‌زنیم. هدف اصلی روش مونت کارلو زنجیره مارکوف محاسبه مقدار تقریبی انتگرال‌های بالا است.

طبق الگوریتم گیبس باید از توزیع شرطی کامل پسین پارامترهای مختلف استفاده کرد؛ توزیع شرطی کامل پسین پارامترهای مدل توزیع به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\pi_1^*(\delta | other) \propto \delta^{n+b_1-1} e^{-b_1 \delta} \prod_{i=1}^n \{1 - \delta \exp(-\alpha x_i^*)\}^{-2} \quad (21)$$

$$\pi_2^*(\alpha | other) \propto \alpha^{n+b_2-1} e^{-\alpha \{\sum_{i=1}^n x_i^* b_2\}} \prod_{i=1}^n \{1 - \delta \exp(-\alpha x_i^*)\}^{-2} \quad (22)$$

مراحل این الگوریتم به شرح زیر است:

۱. مقدار اولیه $\Theta^{(0)} = (\delta^{(0)}, \alpha^{(0)})$ را در نظر بگیرید.

۲. $i = 1$ قرار می‌دهیم.

۳. با استفاده از توزیع طراحی شده ۲۱ و ۲۲ مقادیر (δ^*, α^*) را تولید کنید.

۴. در مرحله ۲ را برای $i = 1, 2, 3, \dots, N$ و مقادیر $(\delta^{(1)}, \alpha^{(1)}), \dots, (\delta^{(N)}, \alpha^{(N)})$ تکرار می‌کنیم.

۳ توزیع مارشال اولکین پارتو

تابع توزیع آن به صورت $H(x; \xi) = \log(x/k)$ و $h(x; \xi) = 1/x$ که به توزیع پارتو ختم می‌شود، تابع توزیع آن به صورت

$$F(x; \delta, \alpha, k) = \frac{1 - \exp[-\alpha \log(\frac{x}{k})]}{1 - \delta \exp[-\alpha \log(\frac{x}{k})]} \quad (23)$$

که $\alpha > 0$ ، $\delta > 0$ و $k > 0$ با استفاده از معادله (۲۳) تابع بقا این توزیع جدید به صورت زیر است:

$$\bar{F}(x; \delta, \alpha, k) = \frac{\delta \exp[-\alpha \log(\frac{x}{k})]}{1 - \delta \exp[-\alpha \log(\frac{x}{k})]} \quad (24)$$

تابع نرخ مخاطره به صورت معادله (۲۵) است

$$\tau(x; \delta, \alpha, k) = \frac{\alpha/x}{1 - \delta \exp[-\alpha \log(\frac{x}{k})]} \quad (25)$$

همچنین تابع چگالی احتمال آن به شرح زیر می‌باشد

$$f(x; \delta, \alpha, k) = \frac{\delta \alpha / x \exp[-\alpha \log(\frac{x}{k})]}{\{1 - \delta \exp[-\alpha \log(\frac{x}{k})]\}^2} \quad (26)$$

۱۰.۳ برآورد گشتاوری

k امین گشتاور برای توزیع مارشال اولکین پارتو به صورت زیر به دست می‌آید:

$$T_k(z) = \sum_{j=0}^{\infty} w_j T_k^{(j)}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} w_j \int_{-\infty}^z x^k g(x; (j+1)\alpha, \xi) dx \\ = \sum_{j=0}^{\infty} w_j \int_{-\infty}^z x^k \alpha / x(j+1) \exp(-\alpha(j+1) \log(\frac{x}{k})) dx$$

می‌دانیم

$$w_j = \begin{cases} \eta_j & 0 < \delta < 1 \\ \nu_j & \delta > 1 \end{cases}$$

بنابراین اولین گشتاور توزیع به صورت زیر به دست می‌آید:

$$= \begin{cases} \sum_{j=0}^{\infty} \delta \delta^j \int_0^{\infty} \alpha(j+1) \exp(-\alpha(j+1) \log(\frac{x}{k})) dx & 0 < \delta < 1 \\ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{\delta(j+1)!} \sum_{k=j}^{\infty} (k+1)! (1-1/\delta)^k & \delta > 1 \\ \times \int_0^z \alpha(j+1) \exp(-\alpha(j+1) \log(\frac{x}{k})) dx \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \sum_{j=0}^{\infty} \delta \delta^j \alpha(j+1) \frac{z(\frac{z}{k})^{-\alpha(j+1)}}{1-\alpha(j+1)} & 0 < \delta < 1 \\ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{\delta} (1-1/\delta)^j \alpha(j+1) \frac{-z(\frac{z}{k})^{-\alpha(j+1)}}{1-\alpha(j+1)} & \delta > 1 \end{cases}$$

و مقادیر عددی گشتاورهای اول توزیع مارشال اولکین پارتو به ازای δ ‌های مختلف در جداول (۸) و (۹) به دست آمده است.

جدول ۸. جدول مقادیر گشتاور اول توزیع مارشال اولکین پارتو به

ازای $0 < \delta < 1$

δ						
α	۰٫۱	۰٫۲	۰٫۳	۰٫۴	۰٫۵	۰٫۸
۰٫۳۳	۶۹۳۸	۱۱۹۳۱	۱۴۲۱۶	۱۴۲۹۳	۱۲۷۱۲	۳۸۴۲
۰٫۴۷	۰٫۲۱۲	۱٫۴۴۳	۲٫۴۷۰	۳٫۲۳۳	۳٫۶۹۶	۳٫۰۸۹
۰٫۹۵	۰٫۷۵۰	۲٫۶۴۸	۴٫۶۰۴	۶٫۵۹۷	۸٫۶۱۸	۱۴٫۸۰۲
۰٫۹۹	۸٫۷۶۶	۱۸٫۶۷۲	۲۸٫۶۳۲	۳۸٫۶۲۶	۴۸٫۶۴۶	۷۸٫۸۱
۰٫۹۹۹	۹۸٫۷۶	۱۹۸٫۶۷	۲۹۸٫۶۳	۳۹۸٫۶۳	۴۹۸٫۶۵	۷۹۸٫۸۲

جدول ۱۰. مقادیر عددی برآورد بیشینه درست‌نمایی پارامترها

$-loglik$	MLE	پارامترها
۲۰۴٫۰۲۸	۰٫۹۴۰۸	$\hat{\delta}$
۲۰۴٫۰۲۸	۴٫۶۷۵۱	$\hat{\alpha}$
۲۰۴٫۰۲۸	۳٫۶۷۷۴	\hat{k}

جدول ۹. جدول مقادیر گشتاور اول توزیع مارشال اولکین پارتو به

ازای $\delta > 1$

δ						
α	۱٫۵	۲	۴	۷	۸	۱۰
۰٫۳	۰٫۷۴۷	۱٫۲۴۰	۱٫۵۶۹	۱٫۲۱۷	۱٫۱۱۷	۰٫۹۵۳
۰٫۶	۲٫۱۹۹	۲٫۰۴۳	۱٫۲۹۳	۰٫۸۰۲	۰٫۷۱۰	۰٫۵۷۸
۰٫۸	۳٫۱۵۹	۲٫۵۱۴	۱٫۳۵۰	۰٫۷۹۱	۰٫۶۹۵	۰٫۵۵۹
۰٫۹	۶٫۴۰۸	۴٫۹۲۳	۲٫۵۳۵	۱٫۴۶۴	۱٫۲۸۳	۱٫۰۲۹
۰٫۹۹	۶۶٫۳۶	۴۹٫۸۷	۲۵٫۰۰	۱۴٫۲۹	۱۲٫۵۱	۱۰٫۰۱

۲.۳ فاصله اطمینان

فرض کنید x_1, x_2, \dots, x_n یک نمونه n تایی از متغیر تصادفی X باشد. تابع لگاریتم درست‌نمایی برای بردار پارامتری $\theta = (\delta, \alpha, k)^T$ به صورت زیر است:

$$\ell(\theta) = n \log(\delta \alpha) + \sum_{i=1}^n \log \frac{1}{x} - \alpha \sum_{i=1}^n \log \left(\frac{x}{k} \right) \\ - 2 \sum_{i=1}^n \log \{ 1 - \delta \exp[-\alpha \log \frac{x}{k}] \}$$

می‌آید.

$$[\hat{V}] = J^{-1}(\theta) = - \begin{pmatrix} \widehat{var}(\delta) & cov(\delta, \alpha) & cov(\delta, k) \\ cov(\alpha, \delta) & \widehat{var}(\alpha) & cov(\alpha, k) \\ cov(k, \delta) & cov(k, \alpha) & \widehat{var}(k) \end{pmatrix}_{\downarrow(\delta, \alpha, k)}$$

هنگامی که شرایط منظم استاندارد برقرار باشد، می‌توان نشان داد که $\sqrt{n}([\hat{\delta}, \hat{\alpha}, \hat{k}]^T - [\delta, \alpha, k]^T)$ به توزیع نرمال چندمتغیره $N_3(\cdot, K([\delta, \alpha, k])^{-1})$ میل می‌کند و امید ریاضی ماتریس اطلاعات است که برای آن عبارت حدی زیر برقرار است [۱].

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_n([\delta], \alpha, k) = K([\delta, \alpha, k])$$

بر اساس این مطلب ناحیه‌های اطمینان برای توزیع قابل دسترس است. سپس فاصله اطمینان $\% (1 - \eta) 100$ برای پارامترهای α و δ به صورت $(\hat{\delta} \pm Z_{\frac{\eta}{2}} \sqrt{\widehat{var}(\delta)})$ ، $(\hat{\alpha} \pm Z_{\frac{\eta}{2}} \sqrt{\widehat{var}(\alpha)})$ ، $(\hat{k} \pm Z_{\frac{\eta}{2}} \sqrt{\widehat{var}(k)})$ داده می‌شود، که $Z_{\frac{\eta}{2}}$ نرمال استاندارد است.

جدول ۱۱. مقادیر عددی برآورد فاصله اطمینان پارامتری برای

داده‌های تصادفی تولیدشده از توزیع تعمیم‌یافته مارشال اولکین پارتو

مقادیر به دست آمده		فاصله اطمینان	پارامترها
-۱۱۲۸۶۳۲	$U_{\delta\delta}$	(۰٫۸۲۱، ۱٫۰۵۹)	δ
-۱٫۷۸۹	$U_{\alpha\delta}$		
-۳۳٫۶۸۸	$U_{\delta k}^T$		
۰٫۰۰۳۷	$\widehat{var}(\delta)$		
۰٫۰۰۰۰۵۲	$cov(\delta, \alpha)$		
-۰٫۰۰۰۲۰۸	$cov(\delta, k)$		
-۷٫۰۶۸	$U_{\alpha\alpha}$	(۴٫۵۶۴، ۴٫۷۸۵۹)	α
۲۷۹۵٫۰۲۵	$U_{\alpha k}^T$		
۰٫۰۰۳۲	$\widehat{var}(\alpha)$		
۰٫۰۰۱۲	$cov(\alpha, k)$		
۱۰۹٫۶۳	U_{kk}	(۳٫۶۶۶، ۳٫۶۸۸)	k
۰٫۰۰۰۰۳۱	$\widehat{var}(k)$		
۰٫۰۰۰۷۸	$cov(k, \delta)$		
-۰٫۰۰۰۰۳۴	$cov(kk)$		

۰۱. برای بررسی اینکه پارامتر δ از نظر آماری متفاوت از یک است به عبارت دیگر برای آزمون $H_0: \delta = 1$ در مقابل $H_1: \delta \neq 1$ ما از آماره $LR = 2\{l(\hat{\delta}) - l(\bar{\delta})\}$ استفاده می‌کنیم؛ که $\hat{\delta}$ برآورد بیشینه درستنمایی δ تحت H_1 است و $\bar{\delta}$ برآورد بیشینه

با استفاده از تابع لگاریتم درستنمایی بالا، مؤلفه‌های بردار $U(\theta) = (U_\delta, U_\alpha, U_k^T)^T$ به صورت زیر حاصل می‌شوند:

$$U_\delta(\theta) = \frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \delta} = \frac{n}{\delta} - 2 \sum_{i=1}^n \frac{\exp(-\alpha \log \frac{x}{k})}{1 - \delta \exp(-\alpha \log \frac{x}{k})}$$

$$U_\alpha(\theta) = \frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \alpha} = \frac{n}{\alpha} - \sum_{i=1}^n \log \frac{x}{k} - 2\delta \sum_{i=1}^n \frac{\log \frac{x}{k} \exp(-\alpha \log \frac{x}{k})}{1 - \delta \exp(-\alpha \log \frac{x}{k})}$$

$$U_k(\theta) = \frac{\partial \ell(\theta)}{\partial k} = \alpha \sum_{i=1}^n \frac{1}{k} + 2\delta \alpha \sum_{i=1}^n \frac{1}{k} \frac{\exp(-\alpha \log \frac{x}{k})}{1 - \delta \exp(-\alpha \log \frac{x}{k})}$$

حل کردن معادلات بالا به دلیل نداشتن یک راه حل صریح کار ساده‌ای نیست، چون نمی‌تواند برآورد بیشینه درستنمایی را به صورت بسته به دست آورد، محاسبه آن باید به صورت عددی با استفاده از حل معادلات تکرارشونده که به نقاط اولیه بستگی دارد انجام شود. از این رو ما با استفاده از زبان برنامه‌نویسی R و داده‌های تصادفی تولیدشده از توزیع تعمیم‌یافته مارشال اولکین پارتو، برآوردها را به دست می‌آوریم. ماتریس اطلاعات افزایشده دارای مشتقات جزئی دوم که به راحتی می‌توان آن‌ها را به دست آورد؛ و در نهایت، ماتریس اطلاعات افزایشده عبارت است از

$$J(\theta) = - \begin{pmatrix} U_{\delta\delta} & U_{\delta\alpha} & | & U_{\delta k}^T \\ U_{\alpha\delta} & U_{\alpha\alpha} & | & U_{\alpha k}^T \\ --- & --- & --- & --- \\ U_{k\delta} & U_{k\alpha} & | & U_{kk}^T \end{pmatrix}_{(\downarrow \delta=\hat{\delta}, \alpha=\hat{\alpha}, k=\hat{k})}$$

که اعضای آن به صورت زیر هستند.

$$U_{\delta\delta}(\theta) = -n\delta^{-2}$$

$$U_{\delta\alpha}(\theta) = 2 \sum_{i=1}^n \frac{\log(\frac{x}{k}) \exp[-\alpha \log(\frac{x}{k})]}{\{1 - \delta \exp[-\alpha \log(\frac{x}{k})]\}^2}$$

$$U_{\delta k}(\theta) = -2\alpha \sum_{i=1}^n \frac{1}{k} \frac{\exp[-\alpha \log(\frac{x}{k})]}{\{1 - \delta \exp[-\alpha \log(\frac{x}{k})]\}^2}$$

$$U_{\alpha\alpha}(\theta) = -\frac{n}{\alpha^2} + 2\delta \sum_{i=1}^n \frac{[\log(\frac{x}{k})]^2 \exp[-\alpha \log(\frac{x}{k})]}{\{1 - \delta \exp[-\alpha \log(\frac{x}{k})]\}^2}$$

$$U_{\alpha k}(\theta) = 2\delta \sum_{i=1}^n \frac{1}{k} \frac{\exp[-\alpha \log(\frac{x}{k})]}{1 - \delta \exp[-\alpha \log(\frac{x}{k})]}$$

$$\times \left[1 - \sum_{i=1}^n \frac{\alpha \log(\frac{x}{k})}{1 - \delta \exp[-\alpha \log(\frac{x}{k})]} \right] - \sum_{i=1}^n \frac{1}{k}$$

$$U_{kk}(\theta) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x} + \alpha \sum_{i=1}^n \frac{1}{k^2} - 2\delta \alpha \sum_{i=1}^n \frac{\exp[-\alpha \log(\frac{x}{k})]}{1 - \delta \exp[-\alpha \log(\frac{x}{k})]}$$

$$\left[\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k} \frac{\exp[-\alpha \log(\frac{x}{k})]}{1 - \delta \exp[-\alpha \log(\frac{x}{k})]} \right]$$

بنابراین، ماتریس مجانبی واریانس کوواریانس $[\hat{V}]$ برای برآورد بیشینه درستنمایی با معکوس کردن ماتریس اطلاعات افزایشده $J(\theta)$ به دست

بنابراین تابع توأم پسین به صورت زیر به دست آمده است

$$\pi(\delta, \alpha, k | \mathbf{x}) \propto \delta^{n+b_1-1} \alpha^{n+b_2-1} k^{b_3-1} e^{-\alpha \{\sum_{i=1}^n \log(x_i) + b_2\} - b_2 k} \prod_{i=1}^n \left(\frac{1}{x_i} \{1 - \delta \exp(-\alpha \log(x_i/k))\} \right)^{-1}$$

واضح است که محاسبه تحلیلی عبارت بالا غیرممکن است زیرا به دست آوردن فرم‌های بسته برای توزیع‌های پسین برای هر پارامتر بسیار دشوار است. روش‌های مختلفی برای حل این انتگرال‌ها وجود دارد. روش اولی که برای تقریب این انتگرال استفاده کردیم روش تقریب لیندلی است. همان‌طور که در بخش ۵.۱ گفتیم داریم

$$I(x) = E(u(\delta, \alpha, k) | X = x) = \frac{\int_{\delta} \int_{\alpha} \int_k u(\delta, \alpha, k) e^{L(x|\delta, \alpha, k) + \rho(\delta, \alpha, k)} d\theta d\alpha dk}{\int_{\delta} \int_{\alpha} \int_k e^{L(x|\delta, \alpha, k) + \rho(\delta, \alpha, k)} d\theta d\alpha dk}$$

که $u(\delta, \alpha, k)$ تابعی از θ, α, k است و $L(\delta, \alpha, k)$ و $\rho(\delta, \alpha, k)$ به ترتیب تابع لگاریتم درست‌نمایی و لگاریتم توزیع پیشین توأم δ, α و k است؛ که کاهش یافته این معادله بر اساس تقریب لیندلی برای $m = 3$ برابر است با:

$$I(x) = u(\hat{\delta}, \hat{\alpha}, \hat{k}) + \frac{1}{\sqrt{v}} \left[(\hat{u}_{\delta\delta} + 2\hat{u}_{\delta\rho\delta})\hat{\sigma}_{\delta\delta} + (\hat{u}_{\alpha\alpha} + 2\hat{u}_{\alpha\rho\alpha})\hat{\sigma}_{\alpha\alpha} + (\hat{u}_{kk} + 2\hat{u}_{k\rho k})\hat{\sigma}_{kk} \right] + \frac{1}{\sqrt{v}} \left[\hat{u}_{\delta}(\hat{L}_{\delta\delta\delta}\hat{\sigma}_{\delta\delta}\hat{\sigma}_{\delta\delta} + \hat{L}_{\alpha\alpha\delta}\hat{\sigma}_{\delta\delta}\hat{\sigma}_{\alpha\alpha} + \hat{L}_{kk\delta}\hat{\sigma}_{\delta\delta}\hat{\sigma}_{kk}) + \hat{u}_{\alpha}(\hat{L}_{\delta\delta\alpha}\hat{\sigma}_{\delta\delta}\hat{\sigma}_{\alpha\alpha} + \hat{L}_{\alpha\alpha\alpha}\hat{\sigma}_{\alpha\alpha}\hat{\sigma}_{\alpha\alpha} + \hat{L}_{kk\alpha}\hat{\sigma}_{\alpha\alpha}\hat{\sigma}_{kk}) + \hat{u}_k(\hat{L}_{\delta\delta k}\hat{\sigma}_{\delta\delta}\hat{\sigma}_{kk} + \hat{L}_{\alpha\alpha k}\hat{\sigma}_{\alpha\alpha}\hat{\sigma}_{kk} + \hat{L}_{kkk}\hat{\sigma}_{kk}\hat{\sigma}_{kk}) \right]$$

درحالی که:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = -L_{ij}^{-1}, i, j = \delta, \alpha, k$$

$$L_{11} = -n\delta^{-2}, L_{22} = -\frac{n}{\alpha^2} + 2\delta \sum_{i=1}^n \frac{[\log(\frac{x_i}{k})]^2 \exp(-\alpha \log(\frac{x_i}{k}))}{\{1 - \delta \exp[-\alpha \log(\frac{x_i}{k})]\}^2},$$

$$D = L_{11}L_{22} - L_{12}L_{21},$$

$$\sigma_{11} = \frac{L_{22}L_{33} - L_{23}^2}{D}, \sigma_{22} = \frac{L_{11}L_{33} - L_{13}^2}{D}, \sigma_{33} = \frac{L_{11}L_{22}}{D},$$

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = \frac{L_{12}L_{33}}{D}, \sigma_{13} = \sigma_{31} = \frac{L_{13}L_{22}}{D}, \sigma_{23} = \sigma_{32} = \frac{-L_{23}L_{11}}{D},$$

$$L_{23} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x} + \alpha \sum_{i=1}^n \frac{1}{k} - 2\delta \alpha \sum_{i=1}^n \frac{\exp(-\alpha \log(\frac{x_i}{k}))}{1 - \delta \exp(-\alpha \log(\frac{x_i}{k}))} \times \left[\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k} \frac{\alpha \log(\frac{x_i}{k})}{1 - \delta \exp(-\alpha \log(\frac{x_i}{k}))} \right],$$

$$L_{13} = -2\alpha \sum_{i=1}^n \frac{1}{k} \frac{\exp(-\alpha \log(\frac{x_i}{k}))}{\{1 - \delta \exp[-\alpha \log(\frac{x_i}{k})]\}^2},$$

درست‌نمایی تحت H_0 است. تحت فرض H_0 توزیع حدی، توزیع χ^2 با یک درجه آزادی است. اگر مقدار آماره آزمون LR از چندک $100(1-\alpha)\%$ توزیع χ^2 یک درجه آزادی بزرگ‌تر شود، فرض H_0 را رد می‌کنیم.

۲. برای بررسی اینکه پارامتر α از نظر آماری متفاوت از یک است به عبارت دیگر برای آزمون $H_0: \alpha = 0$ در مقابل $H_1: \alpha \neq 0$ ما از آماره $LR = 2\{l(\hat{\alpha}) - l(\bar{\alpha})\}$ استفاده می‌کنیم؛ که $\hat{\alpha}$ برآورد بیشینه درست‌نمایی نامقید α تحت H_1 است و $\bar{\alpha}$ برآورد بیشینه درست‌نمایی مقید تحت H_0 است. تحت فرض H_0 توزیع حدی، توزیع نرمال است. اگر مقدار آماره آزمون LR از چندک $100(1-\alpha)\%$ توزیع نرمال بزرگ‌تر شود، فرض H_0 را رد می‌کنیم.

۳. برای بررسی اینکه پارامتر k از نظر آماری متفاوت از یک است به عبارت دیگر برای آزمون $H_0: k = 1$ در مقابل $H_1: k \neq 1$ ما از آماره $LR = 2\{l(\hat{k}) - l(\bar{k})\}$ استفاده می‌کنیم؛ که \hat{k} برآورد بیشینه درست‌نمایی k تحت H_1 است و \bar{k} برآورد بیشینه درست‌نمایی تحت H_0 است. تحت فرض H_0 توزیع حدی، توزیع χ^2 با یک درجه آزادی است. اگر مقدار آماره آزمون LR از چندک $100(1-\alpha)\%$ توزیع χ^2 یک درجه آزادی بزرگ‌تر شود، فرض H_0 را رد می‌کنیم.

۳.۳ استنباط بیزی برای توزیع تعمیم یافته مارشال اولکین پارتو

در این بخش، برآورد بیز از پارامترهای مجهول را تحت توابع زیان مربع خطا، تابع زیان لاینکس، تابع زیان آنتروپی، مربع خطی لگاریتمی و لاینکس اصلاح شده را دریافت می‌کنیم. فرض بر این است که پارامترهای δ, α و k مستقل هستند و از توزیع‌های پیشین گاما پیروی می‌کنند.

$$\pi_1(\delta) \propto \delta^{b_1-1} e^{-b_2\delta}$$

$$\pi_2(\alpha) \propto \alpha^{b_2-1} e^{-b_2\alpha}$$

$$\pi_3(k) \propto k^{b_3-1} e^{-b_2k}$$

در اینجا تمام ابرپارامترهای $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6$ معلوم و غیر منفی فرض شده است. توزیع توأم پیشین برای α و δ برابر

$$\pi(\delta, \delta) \propto \delta^{b_1-1} e^{-b_2\delta} \alpha^{b_2-1} e^{-b_2\alpha} k^{b_3-1} e^{-b_2k}$$

باقی \hat{L}_{ijk} ها با برنامه R به دست آمده است. برای مقادیری که در بالا به دست آمد، برآورد بیزی پارامترها تحت توابع زیان مربع خطا، آنتروپی، لاینکس، مربع خطی لگاریتمی و لاینکس اصلاح شده در جدول (۱۲) آمده است. به طوری که $\hat{\delta}$ ، $\hat{\alpha}$ و \hat{k} برآورد پارامتر δ ، α و k است.

$$L_{\gamma\gamma} = 2\delta \sum_{i=1}^n \frac{1}{k} \frac{\exp(-\alpha \log(\frac{x_i}{k}))}{1 - \delta \exp[-\alpha \log(\frac{x_i}{k})]} \left[1 - \sum_{i=1}^n \frac{\alpha \log(\frac{x_i}{k})}{1 - \delta \exp[-\alpha \log(\frac{x_i}{k})]} \right]$$

$$- \sum_{i=1}^n \frac{1}{k}, \quad \rho = (b_1 - 1) \ln \delta + (b_2 - 1) \ln \alpha + (b_3 - 1) \ln k - b_1 \delta - b_2 \alpha - b_3 k,$$

$$p_1 = \frac{\partial \rho}{\partial \delta} = \frac{b_1 - 1}{\delta} - b_2, \quad p_2 = \frac{\partial \rho}{\partial \alpha} = \frac{b_2 - 1}{\alpha} - b_3,$$

$$p_3 = \frac{\partial \rho}{\partial k} = \frac{b_3 - 1}{k} - b_3$$

جدول ۱۲. برآوردهای بیز تحت تابع زیانهای مختلف به روش لیندلی

تابع زیان	پارامتر	برآورد بیز
مربع خطا	δ	$\hat{\delta} + \hat{\rho}_\delta \hat{\sigma}_{\delta\delta} + \frac{1}{\sqrt{\delta}} [\hat{\sigma}_{\delta\delta} (\hat{L}_{\delta\delta\delta} \hat{\sigma}_{\delta\delta} + \hat{L}_{\alpha\alpha\delta} \hat{\sigma}_{\alpha\alpha}) + \hat{L}_{kk\delta} \hat{\sigma}_{kk}]$
	α	$\hat{\alpha} + \hat{\rho}_\alpha \hat{\sigma}_{\alpha\alpha} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} [\hat{\sigma}_{\alpha\alpha} (\hat{L}_{\delta\delta\alpha} \hat{\sigma}_{\delta\delta} + \hat{L}_{\alpha\alpha\alpha} \hat{\sigma}_{\alpha\alpha}) + \hat{L}_{kk\alpha} \hat{\sigma}_{kk}]$
	k	$\hat{k} + \hat{\rho}_k \hat{\sigma}_{kk} + \frac{1}{\sqrt{k}} [\hat{\sigma}_{kk} (\hat{L}_{\delta\delta k} \hat{\sigma}_{\delta\delta} + \hat{L}_{\alpha\alpha k} \hat{\sigma}_{\alpha\alpha}) + \hat{L}_{kkk} \hat{\sigma}_{kk}]$
آنتروپی	δ	$\hat{\delta} [1 + (\frac{1}{\hat{\delta}} - \frac{1}{\delta} \hat{\rho}_\delta) \hat{\sigma}_{\delta\delta} - \frac{1}{\sqrt{\delta}} \hat{\sigma}_{\delta\delta} (\hat{L}_{\delta\delta\delta} \hat{\sigma}_{\delta\delta} + \hat{L}_{\alpha\alpha\delta} \hat{\sigma}_{\alpha\alpha} + \hat{L}_{kk\delta} \hat{\sigma}_{kk})]^{-1}$
	α	$\hat{\alpha} [1 + (\frac{1}{\hat{\alpha}} - \frac{1}{\alpha} \hat{\rho}_\alpha) \hat{\sigma}_{\alpha\alpha} - \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \hat{\sigma}_{\alpha\alpha} (\hat{L}_{\delta\delta\alpha} \hat{\sigma}_{\delta\delta} + \hat{L}_{\alpha\alpha\alpha} \hat{\sigma}_{\alpha\alpha} + \hat{L}_{kk\alpha} \hat{\sigma}_{kk})]^{-1}$
	k	$\hat{k} [1 + (\frac{1}{\hat{k}} - \frac{1}{k} \hat{\rho}_k) \hat{\sigma}_{kk} - \frac{1}{\sqrt{k}} \hat{\sigma}_{kk} (\hat{L}_{\delta\delta k} \hat{\sigma}_{\delta\delta} + \hat{L}_{\alpha\alpha k} \hat{\sigma}_{\alpha\alpha} + \hat{L}_{kkk} \hat{\sigma}_{kk})]^{-1}$
لاینکس	δ	$\hat{\delta} - \ln \{ 1 + [(\frac{1}{\hat{\delta}} - \hat{\rho}_\delta) \hat{\sigma}_{\delta\delta} - \frac{1}{\sqrt{\delta}} \hat{\sigma}_{\delta\delta} (\hat{L}_{\delta\delta\delta} \hat{\sigma}_{\delta\delta} + \hat{L}_{\alpha\alpha\delta} \hat{\sigma}_{\alpha\alpha} + \hat{L}_{kk\delta} \hat{\sigma}_{kk})] \}$
	α	$\hat{\alpha} - \ln \{ 1 + [(\frac{1}{\hat{\alpha}} - \hat{\rho}_\alpha) \hat{\sigma}_{\alpha\alpha} - \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \hat{\sigma}_{\alpha\alpha} (\hat{L}_{\delta\delta\alpha} \hat{\sigma}_{\delta\delta} + \hat{L}_{\alpha\alpha\alpha} \hat{\sigma}_{\alpha\alpha} + \hat{L}_{kk\alpha} \hat{\sigma}_{kk})] \}$
	k	$\hat{k} - \ln \{ 1 + [(\frac{1}{\hat{k}} - \hat{\rho}_k) \hat{\sigma}_{kk} - \frac{1}{\sqrt{k}} \hat{\sigma}_{kk} (\hat{L}_{\delta\delta k} \hat{\sigma}_{\delta\delta} + \hat{L}_{\alpha\alpha k} \hat{\sigma}_{\alpha\alpha} + \hat{L}_{kkk} \hat{\sigma}_{kk})] \}$
مربع خطای لگاریتمی	δ	$\hat{\delta} \exp \left\{ \frac{\hat{\sigma}_{\delta\delta}}{\sqrt{\delta}} \left(-\frac{1}{\delta} + 2\hat{\rho}_\delta + (\hat{L}_{\delta\delta\delta} \hat{\sigma}_{\delta\delta} + \hat{L}_{\alpha\alpha\delta} \hat{\sigma}_{\alpha\alpha} + \hat{L}_{kk\delta} \hat{\sigma}_{kk}) \right) \right\}$
	α	$\hat{\alpha} \exp \left\{ \frac{\hat{\sigma}_{\alpha\alpha}}{\sqrt{\alpha}} \left(-\frac{1}{\alpha} + 2\hat{\rho}_\alpha + (\hat{L}_{\delta\delta\alpha} \hat{\sigma}_{\delta\delta} + \hat{L}_{\alpha\alpha\alpha} \hat{\sigma}_{\alpha\alpha} + \hat{L}_{kk\alpha} \hat{\sigma}_{kk}) \right) \right\}$
	k	$\hat{k} \exp \left\{ \frac{\hat{\sigma}_{kk}}{\sqrt{k}} \left(-\frac{1}{k} + 2\hat{\rho}_k + (\hat{L}_{\delta\delta k} \hat{\sigma}_{\delta\delta} + \hat{L}_{\alpha\alpha k} \hat{\sigma}_{\alpha\alpha} + \hat{L}_{kkk} \hat{\sigma}_{kk}) \right) \right\}$
لاینکس اصلاح شده	δ	$\hat{\delta} \left[1 + \left(\frac{c(c+1)}{\sqrt{\delta}} - \frac{c}{\delta} \hat{\rho}_\delta \right) \hat{\sigma}_{\delta\delta} - \frac{c}{\sqrt{\delta}} \hat{\sigma}_{\delta\delta} (\hat{L}_{\delta\delta\delta} \hat{\sigma}_{\delta\delta} + \hat{L}_{\alpha\alpha\delta} \hat{\sigma}_{\alpha\alpha} + \hat{L}_{kk\delta} \hat{\sigma}_{kk}) \right]^{-\frac{1}{c}}$
	α	$\hat{\alpha} \left[1 + \left(\frac{c(c+1)}{\sqrt{\alpha}} - \frac{c}{\alpha} \hat{\rho}_\alpha \right) \hat{\sigma}_{\alpha\alpha} - \frac{c}{\sqrt{\alpha}} \hat{\sigma}_{\alpha\alpha} (\hat{L}_{\delta\delta\alpha} \hat{\sigma}_{\delta\delta} + \hat{L}_{\alpha\alpha\alpha} \hat{\sigma}_{\alpha\alpha} + \hat{L}_{kk\alpha} \hat{\sigma}_{kk}) \right]^{-\frac{1}{c}}$
	k	$\hat{k} \left[1 + \left(\frac{c(c+1)}{\sqrt{k}} - \frac{c}{k} \hat{\rho}_k \right) \hat{\sigma}_{kk} - \frac{c}{\sqrt{k}} \hat{\sigma}_{kk} (\hat{L}_{\delta\delta k} \hat{\sigma}_{\delta\delta} + \hat{L}_{\alpha\alpha k} \hat{\sigma}_{\alpha\alpha} + \hat{L}_{kkk} \hat{\sigma}_{kk}) \right]^{-\frac{1}{c}}$

برآورد بیزی پارامترها برای تشکیل بازه اطمینان بیزی با استفاده از نرم افزار R محاسبه و در مطالعات شبیه سازی ذکر شده است.

$$u_{\hat{B}L}(\delta, \alpha, k) = -\frac{1}{a} \ln [E[e^{-au(\delta, \alpha, k)} | \mathbf{x}]]$$

$$= -\frac{1}{a} \ln \left(\int_{\delta} \int_{\alpha} \int_k e^{-au(\delta, \alpha, k)} \pi^*(\delta, \alpha, k | \mathbf{x}) dk d\alpha d\delta \right)$$

برآورد بیز تحت تابع زیان لاینکس اصلاح شده

۴.۳ روش زنجیره مارکوف مونت کارلو

برآورد بیز تحت تابع زیان مربع خطا

$$u_{\hat{B}mL}(\delta, \alpha, k) = \exp[E[u(\delta, \alpha, k)^{-a} | \mathbf{x}]]$$

$$= \exp \left(\int_{\delta} \int_{\alpha} \int_k [u(\delta, \alpha, k)]^{-a} \pi^*(\delta, \alpha, k | \mathbf{x}) dk d\alpha d\delta \right)$$

برآورد بیز تحت تابع زیان لگاریتم مربع خطا

$$u_{\hat{B}S}(\delta, \alpha, k) = E[u(\delta, \alpha, k) | \mathbf{x}]$$

$$= \int_{\delta} \int_{\alpha} \int_k u(\delta, \alpha, k) \pi^*(\delta, \alpha, k | \mathbf{x}) dk d\alpha d\delta$$

برآورد بیز تحت تابع زیان آنتروپی

$$u_{\hat{B}SL}(\delta, \alpha, k) = \exp[E[\ln(u(\delta, \alpha, k))]^{-a} | \mathbf{x}]]$$

$$= \exp \left(\int_{\delta} \int_{\alpha} \int_k [\ln(u(\delta, \alpha, k))]^{-a} \pi^*(\delta, \alpha, k | \mathbf{x}) dk d\alpha d\delta \right)$$

$$u_{\hat{B}G}(\delta, \alpha, k) = [E[u(\delta, \alpha, k)^{-a} | \mathbf{x}]]^{-\frac{1}{a}}$$

$$= \left(\int_{\delta} \int_{\alpha} \int_k [u(\delta, \alpha, k)]^{-a} \pi^*(\delta, \alpha, k | \mathbf{x}) dk d\alpha d\delta \right)^{-\frac{1}{a}}$$

محاسبه معادلات بالا به صورت تحلیل بسیار دشوار است؛ بنابراین روش زنجیره مارکوف مونت کارلو را استفاده کردیم. نمونه هایی از تابع

جدول ۰۱۳. برآوردهای بیز تحت تابع زیان‌های مختلف به روش زنجیره مارکوف مونت کارلو

برآورد	
$\hat{\delta}_S = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta^{(i)}$	مربع خطا
$\hat{\alpha}_S = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \alpha^{(i)}$	
$\hat{k}_S = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N k^{(i)}$	
$\hat{\delta}_E = \frac{N}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\delta^{(i)}}}$	آنتروپی
$\hat{\alpha}_E = \frac{N}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\alpha^{(i)}}}$	
$\hat{k}_E = \frac{N}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{k^{(i)}}}$	
$\hat{\delta}_L = -\ln \left\{ \frac{\sum_{i=1}^N \exp(-\delta^{(i)})}{N} \right\}$	لاینکس
$\hat{\alpha}_L = -\ln \left\{ \frac{\sum_{i=1}^N \exp(-\alpha^{(i)})}{N} \right\}$	
$\hat{k}_L = -\ln \left\{ \frac{\sum_{i=1}^N \exp(-k^{(i)})}{N} \right\}$	
$\hat{\delta}_{mL} = \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\delta^{(i)})^{-\frac{1}{c}} \right)^{-\frac{1}{c}}$	لاینکس اصلاح شده
$\hat{\alpha}_{mL} = \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\alpha^{(i)})^{-\frac{1}{c}} \right)^{-\frac{1}{c}}$	
$\hat{k}_{mL} = \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (k^{(i)})^{-\frac{1}{c}} \right)^{-\frac{1}{c}}$	
$\hat{\delta}_{SL} = \exp \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta^{(i)} \right)$	مربع خطای لگاریتمی
$\hat{\alpha}_{SL} = \exp \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \alpha^{(i)} \right)$	
$\hat{\alpha}_{SL} = \exp \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \alpha^{(i)} \right)$	

چگالی توأم پسین تولید می‌کنیم و معادلات بالا را تقریب می‌زنیم. هدف اصلی روش مونت کارلو زنجیره مارکوف محاسبه مقدار تقریبی انتگرال‌های بالا است.

طبق الگوریتم گیبس باید از توزیع شرطی کامل پسین پارامترهای مختلف استفاده کرد؛ توزیع شرطی کامل پسین پارامترهای مدل توزیع تعمیم یافته مارشال اولکین پارتو به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\pi_{\delta}^*(\delta | other) \propto \delta^{n+b_1-1} e^{-b_1 \delta} \prod_{i=1}^n \{1 - \delta \exp(-\alpha \log(\frac{x_i}{k}))\}^{-2} \quad (27)$$

$$\pi_{\alpha}^*(\alpha | other) \propto \alpha^{n+b_2-1} e^{-\alpha \{\sum_{i=1}^n \log(\frac{x_i}{k}) + b_2\}} \prod_{i=1}^n \{1 - \delta \exp(-\alpha \log(\frac{x_i}{k}))\}^{-2} \quad (28)$$

$$\pi_k^*(k | other) \propto k^{b_3-1} e^{-\alpha \sum_{i=1}^n \log(\frac{x_i}{k}) - b_3 k} \prod_{i=1}^n \{1 - \delta \exp(-\alpha \log(\frac{x_i}{k}))\}^{-2} \quad (29)$$

مراحل این الگوریتم به شرح زیر است:

مطالعات شبیه‌سازی

در این بخش، یک مطالعه شبیه‌سازی برای اعمال روش‌های بیزی زنجیره مارکوف مونت کارلو و لیندلی بر اساس توابع زیان مختلف انجام شده است. از آنجایی که در رویکرد بیزی، انتخاب ابرپارامترهای توزیع پسین اهمیت زیادی دارد، بنابراین برای بررسی مقادیر مختلف ابرپارامترها بر روی نتایج نهایی، از پس زمینه‌های اطلاعاتی و نا آگاهانه استفاده می‌شود. در مورد پس زمینه‌های اطلاعاتی پیشین، ابرپارامترها طوری تنظیم می‌شوند که میانگین توزیع‌های پیشین برابر با مقدار حدسی پارامترهای مدل باشد. برای بررسی بیشتر می‌توان دو دسته از ابرپارامترها را در نظر گرفت که در حالت اول واریانس پسین‌ها کم و در حالت دوم واریانس پسین‌ها زیاد است؛ اما در حالت ناخود آگاه فرض بر این بود که هیچ اطلاعاتی در مورد ابرپارامترها در دسترس نبود و مقدار آن‌ها صفر در نظر گرفته شد. در این مطالعه شبیه‌سازی، برای توزیع تعمیم یافته مارشال اولکین ریلی پارامترهای مدل به صورت $\delta = \alpha = 2$ و برای توزیع تعمیم یافته مارشال اولکین پارتو پارامترهای مدل به صورت $\delta = \alpha = k = 2$ در نظر گرفته شده است. در مورد پیشینه‌های اطلاعاتی با واریانس کم، ابرپارامترهای توزیع تعمیم یافته مارشال اولکین ریلی

۱. مقدار اولیه $\Theta^{(0)} = (\delta^{(0)}, \alpha^{(0)}, k^{(0)})$ را در نظر بگیرید.

۲. $i = 1$ قرار می‌دهیم.

۳. با استفاده از توزیع طراحی شده (۲۷)، (۲۸) و (۲۹) مقادیر $(\delta^*, \alpha^*, k^*)$ را تولید کنید.

۴. مرحله ۲ را برای $i = 1, 2, 3, \dots, N$ و مقادیر $(\delta^{(1)}, \alpha^{(1)}, k^{(1)}), \dots, (\delta^{(N)}, \alpha^{(N)}, k^{(N)})$ تکرار می‌کنیم.

بر این اساس خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(u(\delta, \alpha, k) | y) &= \int u(\delta, \alpha, k) \pi(\delta, \alpha, k | y) d\delta d\alpha dk \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u(\delta_j, \alpha_j, k_j) \end{aligned}$$

در نتیجه، برآورد پارامترها بر اساس توابع زیان مختلف در جدول (۱۳) خلاصه شده است:

توجه به ارتباط بین توزیع گاما و توزیع نمایی، می‌توان توزیع پیشنهادی هر یک از الگوریتم‌ها را نمایی در نظر گرفت؛ بنابراین در این مرحله امید ریاضی و واریانس توزیع پیشنهادی به ترتیب برابر با $\frac{1}{\delta^{(t)}}$ و $\frac{1}{\delta^{(t)}}$ خواهد بود. برای تولید نمونه‌ی $(t+1)$ از توزیع پسین تمام شرطی (۲۱) بر اساس الگوریتم متروپلیس-هستینگس به صورت زیر عمل می‌شود:

$$\delta^* \sim \exp(\delta^{(t)}) \quad .۱$$

$$H = \frac{\pi_1^*(\delta^*|\alpha^{(t)}) * \text{dexp}(\delta^{(t)}|\delta^*)}{\pi_1^*(\delta^{(t)}|\alpha^{(t)}) * \text{dexp}(\delta^*|\delta^{(t)})} \quad .۲$$

$$\bar{u} \sim \text{uniform}(0, 1) \quad .۳$$

$$\text{if}(\bar{u} \leq H) \{ \delta^{(t+1)} = \delta^* \} \text{else} \{ \delta^{(t+1)} = \delta^{(t)} \} \quad .۴$$

و پس از تولید نمونه‌ی $\delta^{(t+1)}$ به‌طور مشابه، برای تولید نمونه‌ی $(t+1)$ از توزیع پسین تمام شرطی (۲۲) بر اساس الگوریتم متروپلیس-هستینگس به صورت زیر عمل می‌شود:

$$\alpha^* \sim \exp(\alpha^{(t)}) \quad .۱$$

$$H = \frac{\pi_1^*(\alpha^*|\delta^{(t+1)}) * \text{dexp}(\alpha^{(t)}|\alpha^*)}{\pi_1^*(\alpha^{(t)}|\delta^{(t+1)}) * \text{dexp}(\alpha^*|\alpha^{(t)})} \quad .۲$$

$$\bar{u} \sim \text{uniform}(0, 1) \quad .۳$$

$$\text{if}(\bar{u} \leq H) \{ \alpha^{(t+1)} = \alpha^* \} \text{else} \{ \alpha^{(t+1)} = \alpha^{(t)} \} \quad .۴$$

که در آن منظور $\text{dexp}(x|y)$ مقدار تابع چگالی نمایی با پارامتر y در نقطه x است.

به صورت $b_1 = b_2 = 4$ ، $b_3 = b_4 = 2$ و ابرپارامترهای توزیع تعمیم‌یافته مارشال اولکین پارتو $b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = 4$ ، $b_5 = b_6 = 2$ در نظر گرفته شده است و در نتیجه میانگین و واریانس توزیع‌های پیشین به ترتیب ۲ و ۱ است؛ اما در مورد توزیع‌های اطلاعاتی با واریانس زیاد، ابرپارامترها به صورت $b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = 0.4$ ، $b_5 = b_6 = 0.2$ در نظر گرفته می‌شوند، در این حالت میانگین پسین‌ها مانند قبل ۲ به دست می‌آید؛ اما واریانس آن‌ها بزرگ‌تر از حالت پیشین و برابر با ۱۰ است.

در ادامه، ۱۰۰۰ نمونه شبیه‌سازی شده با اندازه‌های $n = 20$ ، 30 و 50 از توزیع‌های تعمیم‌یافته مارشال اولکین ریلی و پارتو تولید و برآوردهای بیزی بر اساس هر دو روش و توابع زیان مختلف به دست آمد و در نهایت مجذورهای خطای میانگین آن‌ها در جداول مربوطه گزارش شده است. توجه داشته باشید که برای اجرای روش زنجیره مارکوف مونت‌کارلو برای به دست آوردن برآورد بیزی از پارامترها و برای دستیابی به همگرایی پارامترها و همچنین همگرایی زنجیره مارکوف تولیدشده به توزیع‌های ثابت آن، این زنجیره ۴۰۰۰ بار تکرار می‌شود و ۱۰۰۰ تکرار اولیه برای محاسبه برآوردها نادیده گرفته می‌شود. به منظور پیاده‌سازی الگوریتم متروپلیس-هستینگس برای تولید نمونه از توزیع‌های تمام شرطی با

جدول ۱۴. میانگین مربعات خطا برای توزیع تعمیم‌یافته مارشال اولکین ریلی، حالت پیشین با واریانس کم

لیندلی		زنجیره مارکوف مونت کارلو		تابع زیان	تعداد نمونه n
α	δ	α	δ		
۲/۰۰۶۶۳	۲/۱۹۶۸۱	۰/۸۵۶۶۳	۱/۰۹۸۵۶	مربع خطا	۲۰
۲/۰۱۲۹۷	۲/۳۴۷۰۶	۰/۹۶۱۵۴	۱/۲۸۵۴۱	آنتروپی	
۲/۰۳۹۴۴	۲/۳۵۰۶۱	۰/۹۶۲۲۳	۱/۳۲۰۸۹	لاینکس	
۲/۰۳۹۴۴	۳/۲۷۲۹۷	۰/۹۸۲۵۸۷	۲/۳۰۱۵۲	مربع خطای لگاریتمی	
۲/۰۰۷۸	۲/۴۹۰۴۴۰	۰/۸۶۴۵۸	۱/۳۶۱۵۴	لاینکس اصلاح شده	
۲/۰۰۴۴۲	۲/۱۳۲۳۶	۰/۸۴۴۰۲	۱/۰۰۵۶۲	مربع خطا	۳۰
۲/۰۰۸۶۳	۲/۲۲۰۶۳۶	۰/۸۸۲۵۴	۱/۱۵۴۵۶	آنتروپی	
۲/۰۰۸۶۳	۲/۲۲۱۵۳	۰/۸۸۲۵۴	۱/۱۵۲۳۵	لاینکس	
۲/۰۲۶۲۱	۲/۷۸۴۹۵	۰/۹۲۵۵۶	۱/۵۶۲۸۴	مربع خطای لگاریتمی	
۲/۰۰۵۲	۲/۳۳۰۴۴	۰/۸۵۸۸۲	۱/۰۵۰۵	لاینکس اصلاح شده	
۲/۰۰۲۶۵	۲/۰۷۸۹۲	۱/۰۰۰۱۳	۱/۰۳۶۴۱	مربع خطا	۵۰
۲/۰۰۵۱۶	۲/۱۲۶۰۴	۰/۸۲۰۳۴	۱/۰۶۳۵۲	آنتروپی	
۲/۰۰۵۱۶	۲/۱۲۶۲۰	۰/۸۲۰۳۴	۱/۰۶۳۵۲	لاینکس	
۲/۰۱۵۶۷	۲/۴۳۶۶۹	۱/۰۲۱۵۶	۱/۲۱۳۱۴	مربع خطای لگاریتمی	
۲/۰۰۳۱۱	۲/۱۹۶۷۸	۰/۷۹۱۲۵	۱/۰۶۴۵۱	لاینکس اصلاح شده	

جدول ۱۵. میانگین مربعات خطا برای توزیع تعمیم یافته مارشال اولکین ریلی، حالت پیشین با واریانس زیاد

لیندلی		زنجیره مارکوف مونت کارلو		تابع زیان	تعداد نمونه n
α	δ	α	δ		
۴,۱۳۳۶۷	۴,۵۲۵۴۲	۱,۷۶۴۶۷	۲,۲۶۳۰۴	مربع خطا	۲۰
۴,۱۴۶۷۲	۴,۸۳۴۹۵	۱,۹۸۰۷۸	۲,۶۴۷۹۴	آنتروپی	
۴,۱۴۶۷۲	۴,۸۴۲۲۵	۱,۹۸۲۱۹	۲,۷۲۱۰۳	لاینکس	
۴,۲۰۱۲۴	۶,۷۴۲۳۲	۲,۰۲۴۱۲	۴,۷۴۱۱۴	مربع خطای لگاریتمی	
۴,۱۳۶۰۷	۵,۱۳۰۰۳	۱,۷۸۱۰۳	۲,۸۰۴۷۸	لاینکس اصلاح شده	
۴,۱۲۹۱۲	۴,۳۹۲۶۸	۱,۷۳۸۶۹	۲,۰۷۱۵۷	مربع خطا	۳۰
۴,۱۳۷۷۸	۴,۵۷۴۵۱	۱,۸۱۸۰۴	۲,۳۷۸۴	آنتروپی	
۴,۱۳۷۷۸	۴,۵۷۴۵۱	۴,۵۷۴۵۱	۲,۳۷۳۸۵	لاینکس	
۴,۱۷۳۹۹	۵,۷۳۷۰۰	۱,۹۰۶۶۶	۳,۲۱۹۴۵	مربع خطای لگاریتمی	
۴,۱۳۰۷۲	۴,۸۰۰۷۱	۱,۷۶۹۱۷	۲,۱۶۴۰۳	لاینکس اصلاح شده	
۴,۱۲۵۴۶	۴,۲۸۲۵۹	۲,۰۶۰۲۷	۲,۱۳۵۰۱	مربع خطا	۵۰
۴,۱۳۰۶۴	۴,۳۷۹۶۴	۱,۶۸۹۹	۲,۱۹۰۸۵	آنتروپی	
۴,۱۳۰۶۴	۴,۳۷۹۹۹	۱,۶۸۹۹	۲,۱۹۰۸۵	لاینکس	
۴,۱۵۲۲۹	۵,۰۱۹۵۹	۲,۱۰۴۴۲	۲,۴۹۹۰۷	مربع خطای لگاریتمی	
۴,۱۲۶۴۲	۴,۵۲۵۳۷	۱,۶۲۹۹۷	۲,۱۹۲۸۹	لاینکس اصلاح شده	

جدول ۱۶. میانگین مربعات خطا برای توزیع تعمیم یافته مارشال اولکین ریلی، حالت پیشین نا آگاهی

لیندلی		زنجیره مارکوف مونت کارلو		تابع زیان	تعداد نمونه n
α	δ	α	δ		
۵,۷۳۸۹۸	۶,۲۸۲۸۷	۲,۴۴۹۹۸	۳,۱۴۱۸۹	مربع خطا	۲۰
۵,۷۵۷۱	۶,۷۱۲۶	۲,۷۵۰۰۲	۳,۶۷۶۲۷	آنتروپی	
۵,۷۵۷۱	۶,۷۲۲۷۴	۲,۷۵۱۹۸	۳,۷۷۷۷۴	لاینکس	
۵,۸۳۲۷۹	۹,۳۶۰۷	۲,۸۱۰۱۹	۶,۵۸۲۳۶	مربع خطای لگاریتمی	
۵,۷۴۲۳۱۹	۷,۱۲۲۶۵	۲,۴۷۲۷	۳,۸۹۴۰۲	لاینکس اصلاح شده	
۵,۷۳۲۶۶	۶,۰۹۸۵۷	۲,۴۱۳۹۱	۲,۸۷۶۰۷	مربع خطا	۳۰
۵,۷۴۴۶۸	۶,۳۵۱۰۱	۲,۵۲۴۰۷	۳,۳۰۲۰۵	آنتروپی	
۵,۷۴۴۶۸	۶,۳۵۳۵۹	۲,۵۲۴۰۷	۳,۲۹۵۷۳	لاینکس	
۵,۷۹۴۹۶	۷,۹۶۴۹۶	۲,۶۴۷۱۱	۴,۴۶۹۷۲	مربع خطای لگاریتمی	
۵,۷۳۴۸۹	۶,۶۶۵۰۶	۲,۴۵۶۲۳	۳,۰۰۴۴۳	لاینکس اصلاح شده	
۵,۷۲۷۵۹	۵,۹۴۵۷۳	۲,۸۶۰۳۷	۲,۹۶۴۱۴	مربع خطا	۵۰
۵,۷۳۴۷	۶,۰۸۰۴۷	۲,۳۴۶۱۷	۳,۰۴۱۶۷	آنتروپی	
۵,۷۳۴۷	۶,۰۸۰۹۵	۲,۳۴۶۱۷	۳,۰۴۱۶۷	لاینکس	
۵,۷۶۴۸۳	۶,۹۶۸۹۵	۲,۹۲۱۶۷	۳,۴۶۹۵۹	مربع خطای لگاریتمی	
۵,۷۲۸۹۱	۶,۲۸۲۸۰	۲,۲۶۲۹۷	۳,۰۴۴۵۰	لاینکس اصلاح شده	

جدول ۱۷. میانگین مربعات خطا برای توزیع تعمیم‌یافته مارشال اولکین پارتو، حالت پیشین با واریانس کم

تعداد نمونه n	تابع زیان			زنجیره مارکوف مونت کارلو			لیندلی	
	k	α	δ	k	α	δ	k	α
۲۰	مربع خطا	۰.۹۸۹۸۸	۰.۵۱۳۵۱	۰.۹۸۹۵۲	۱.۹۹۹۱۹	۱.۹۹۹۸۷	۲.۰۰۰۴۸	
	آنتروپی	۰.۸۷۵۴۵	۰.۵۱۲۱۴۴	۱.۰۰۰۸۴۴	۱.۹۰۴۷۶	۱.۹۹۷۳۸	۲.۰۰۰۹۶	
	لاینس	۱.۰۹۲۱۳	۰.۹۲۵۱۲	۱.۰۰۰۰۸	۲.۲۱۷۰۷	۲.۰۰۹۷۹	۲.۰۰۰۹۶	
	مربع خطای لگاریتمی	۰.۷۲۱۴۸	۰.۹۵۵۱۷	۱.۰۰۰۱۳۱	۱.۸۰۸۲۳	۲.۰۲۶۴۷	۲.۰۰۰۲۹۰۶	
	لاینس اصلاح شده	۱.۰۹۵۲۵	۰.۴۶۲۵۶	۱.۰۰۰۰۳۲	۲.۲۷۷۹۶	۱.۹۹۴۶۳	۲.۰۰۰۴۷۳	
۳۰	مربع خطا	۰.۹۸۵۴۵	۰.۶۸۴۴۰	۰.۸۴۷۴۵	۱.۹۹۹۹۰	۱.۹۹۹۹۸	۲.۰۰۰۰۵	
	آنتروپی	۰.۸۵۲۷۸	۰.۴۱۲۵۴۶	۰.۸۵۴۱۳	۱.۹۳۵۴۸	۱.۹۹۹۶۱	۲.۰۰۰۱۱۴	
	لاینس	۰.۸۵۴۵۶	۰.۴۵۵۴۶	۰.۸۵۴۱۳	۱.۹۳۵۴۶	۱.۹۹۹۶۱	۲.۰۰۰۱۱	
	مربع خطای لگاریتمی	۰.۷۴۵۲۸	۰.۳۲۵۴۸	۰.۸۷۱۵۸	۱.۸۷۰۸۳	۱.۹۹۸۸۴	۲.۰۰۰۰۳۴	
	لاینس اصلاح شده	۱.۰۸۵۲۴	۰.۶۸۱۳۵	۰.۸۱۹۴۵	۲.۱۹۹۳۴	۱.۹۹۹۸۰	۲.۰۰۰۰۵	
۵۰	مربع خطا	۱.۰۴۸۵۷	۰.۸۱۷۴۵	۰.۸۲۱۴۶	۱.۹۹۹۹۶	۱.۹۹۹۹۳	۲.۰۰۰۰۱	
	آنتروپی	۱.۰۳۸۵۴	۰.۸۹۵۴۲	۰.۸۷۳۵۱	۱.۹۹۹۹۶	۱.۹۹۹۹۳	۲.۰۰۰۰۳	
	لاینس	۱.۰۳۴۵۴	۰.۸۹۵۴۲	۰.۸۷۳۵۱	۱.۹۶۰۷۷	۱.۹۹۹۸۶	۲.۰۰۰۰۳	
	مربع خطای لگاریتمی	۱.۰۰۴۵۸	۰.۹۵۱۳۲	۰.۸۶۱۳۱۶	۱.۹۲۱۵۰	۱.۹۹۹۵۸	۲.۰۰۰۱۱	
	لاینس اصلاح شده	۱.۸۵۲۱۴	۰.۹۹۷۴۱	۰.۸۵۳۷۵	۲.۱۱۹۷۳	۱.۹۹۹۹۳	۲.۰۰۰۰۵	

جدول ۱۸. میانگین مربعات خطا برای توزیع تعمیم‌یافته مارشال اولکین پارتو، حالت پیشین با واریانس زیاد

تعداد نمونه n	تابع زیان			زنجیره مارکوف مونت کارلو			لیندلی	
	k	α	δ	k	α	δ	k	α
۲۰	مربع خطا	۱.۵۲۴۴۲	۰.۷۹۰۸۱	۱.۵۲۳۸۶	۳.۰۷۸۱۶	۳.۰۷۸۰۰	۳.۰۸۰۷۴	
	آنتروپی	۱.۳۴۸۲۰	۰.۷۸۱۷۰۲	۱.۵۴۱۳	۲.۹۳۳۳۴	۳.۰۷۵۹۷	۳.۰۸۱۴۹	
	لاینس	۱.۶۸۱۸۸	۱.۴۴۴۶۹	۱.۵۴۰۱۲	۳.۴۱۴۲۹	۳.۰۹۵۰۷	۳.۰۸۱۴۹	
	مربع خطای لگاریتمی	۱.۱۱۱۰۹	۱.۴۷۰۹۷	۱.۵۴۲۰۲	۲.۷۸۴۶۸	۳.۱۲۰۷۷	۳.۰۸۴۴۷	
	لاینس اصلاح شده	۱.۶۸۶۶۹۷	۰.۷۱۲۳۵۳	۱.۵۴۰۴۹۴	۳.۵۰۸۰۷۱	۳.۰۷۱۳۸	۳.۰۸۰۷۲۸	
۳۰	مربع خطا	۱.۵۱۷۵۹۶	۱.۰۵۳۹۷۸	۱.۳۰۵۰۷۶	۳.۰۷۹۸۵۵	۳.۰۷۹۷۰۳	۳.۰۸۰۰۸۸	
	آنتروپی	۱.۳۱۳۲۹۵	۰.۶۳۵۳۲۱	۱.۳۱۵۳۶۹	۲.۹۸۰۶۴۵	۳.۰۷۹۴۰۴	۳.۰۸۰۱۷۶	
	لاینس	۱.۳۱۶۰۳	۰.۷۰۱۴۱	۱.۳۱۵۳۶	۲.۹۸۰۶۱	۳.۰۷۹۴۰۴	۳.۰۸۰۱۷۶	
	مربع خطای لگاریتمی	۱.۱۴۷۷۴۵	۰.۵۰۱۲۵۲	۱.۳۴۲۲۴۷	۲.۸۸۱۰۹۱	۳.۰۷۸۲۱۵	۳.۰۸۰۵۲۵	
	لاینس اصلاح شده	۱.۶۷۱۲۷	۰.۴۹۲۸۵	۱.۳۶۹۷۵۶	۲.۳۸۶۹۸۴	۳.۰۷۹۷۰۶	۳.۰۸۰۰۸۸	
۵۰	مربع خطا	۱.۶۱۴۷۹۹	۱.۳۶۶۶۷۶	۱.۲۶۵۰۵۶	۳.۰۷۹۹۴۳	۳.۰۷۹۸۹۴	۳.۰۸۰۰۲۹	
	آنتروپی	۱.۵۹۹۳۵۵	۱.۳۷۸۹۵۵	۱.۳۴۵۲۱۵	۳.۰۱۹۶۰۷	۳.۰۷۹۷۸۷	۳.۰۸۰۰۵۹	
	لاینس	۱.۵۹۳۸۷۲	۱.۳۷۸۹۵۵	۱.۳۴۵۲۱۵	۳.۰۱۹۶	۳.۰۷۹۷۸۷	۳.۰۸۰۰۵۹	
	مربع خطای لگاریتمی	۱.۵۴۷۰۵۶	۱.۴۶۵۰۳۹	۱.۳۲۶۴۲۷	۲.۸۵۹۱۲۱	۳.۰۷۹۳۶۴	۳.۰۸۰۱۷۶	
	لاینس اصلاح شده	۲.۸۵۲۳۰۵	۱.۵۳۶۰۱۴	۱.۳۱۴۷۸۱	۳.۲۶۴۳۹۷	۳.۰۷۹۸۹۵	۳.۰۸۰۰۸۸	

جدول ۱۹. میانگین مربعات خطا برای توزیع تعمیم یافته مارشال اولکین پارتو، حالت پیشین نا آگاهی

لیندلی			زنجیره مارکوف مونت کارلو			تابع زیان	تعداد نمونه n
k	α	δ	k	α	δ		
۴,۷۴۴۳۴۶	۴,۷۴۰۱۲۲	۴,۷۴۱۳	۲,۳۴۶۷۴۷	۱,۲۱۷۸۶	۲,۳۴۷۶۲۱	مربع خطا	۲۰
۴,۷۴۵۴۹۸	۴,۷۳۷۰۰۳	۴,۵۱۷۳۴۸	۲,۳۷۳۶۰۲	۱,۲۱۴۶۰۱	۲,۰۷۶۲۳۱	آنتروپی	
۴,۷۴۵۴۹۸	۴,۷۶۶۴۲	۵,۲۵۸۰۱۷	۲,۳۷۱۷۹۹	۲,۱۹۴۰۳۲	۲,۵۹۰۱	لاینس	
۴,۷۵۰۰۹۲	۴,۸۰۵۹۹۴	۴,۲۸۸۴۱۸	۲,۳۷۴۷۱۱	۲,۲۶۵۲۹۴	۱,۷۱۱۰۸۲	مربع خطای لگاریتمی	
۴,۷۴۴۳۲۱	۴,۷۳۰۴۷۷	۵,۴۰۲۴۲۹	۲,۳۷۲۳۶۱	۱,۰۹۷۰۲۴	۱۲,۵۹۷۵۱۳	لاینس اصلاح شده	
۴,۷۴۳۳۳۶	۴,۷۴۲۷۴۳	۴,۷۴۲۹۷۷	۲,۰۰۹۸۱۷	۱,۶۲۳۱۲۶	۲,۳۳۷۰۹۸	مربع خطا	۳۰
۴,۷۴۳۴۷۱	۴,۷۴۲۲۸۲	۴,۵۹۰۱۹۳	۲,۰۲۵۶۶۸	۰,۹۷۸۳۹۴	۲,۰۲۲۴۷۴	آنتروپی	
۴,۷۴۳۴۷۱	۴,۷۴۲۲۸۲	۴,۵۹۰۱۴۱	۲,۰۲۵۶۶۸	۱,۰۸۰۱۸۴	۲,۰۲۶۶۹۴	لاینس	
۴,۷۴۴۰۰۹	۴,۷۴۰۴۵۱	۴,۴۳۶۸۸	۲,۰۶۷۰۰۶	۰,۷۷۱۹۲۸	۱,۷۶۷۵۲۷	مربع خطای لگاریتمی	
۴,۷۴۳۳۳۶	۴,۷۴۲۷۴۷	۵,۲۱۵۹۵۵	۲,۱۰۹۴۲۴	۱,۶۱۵۸۹۹	۲,۵۷۳۷۷	لاینس اصلاح شده	
۴,۷۴۳۲۴۵	۴,۷۴۳۰۳۷	۴,۷۴۳۱۱۲	۱,۹۴۸۱۸۶	۲,۱۰۴۶۸۱	۲,۴۸۶۷۹	مربع خطا	۵۰
۴,۷۴۳۲۹۱	۴,۷۴۲۸۷۲	۴,۶۵۰۱۹۵	۲,۰۷۱۶۳۱	۲,۱۲۳۵۹۱	۲,۴۶۳۰۰۷	آنتروپی	
۴,۷۴۳۲۹۱	۴,۷۴۲۸۷۲	۴,۶۵۰۱۸۴	۲,۰۷۱۶۳۱	۲,۱۲۳۵۹۱	۲,۴۵۴۵۶۳	لاینس	
۴,۷۴۳۴۷۱	۴,۷۴۲۲۲۱	۴,۵۵۷۰۴۶	۲,۰۴۲۶۹۸	۲,۲۵۶۱۶	۲,۳۸۲۴۶۶	مربع خطای لگاریتمی	
۴,۷۴۳۳۳۶	۴,۷۴۳۰۳۸	۵,۰۲۷۱۷۱	۲,۰۲۴۷۶۳	۲,۳۶۵۴۶۲	۴,۳۹۲۵۵	لاینس اصلاح شده	

مارکوف مونت کارلو بهینه تر از تقریب لیندلی هستند. همچنین لازم به ذکر است که در تمامی موارد با افزایش حجم نمونه مقادیر میانگین مربع خطای کاهش می یابد و این نشان دهنده سازگاری برآوردهای به دست آمده در این مطالعه است. شایان ذکر است که هر چه اطلاعات پیشین فرآپارامترها کمتر باشد، میانگین مربع خطای آن ها افزایش می یابد و این موضوع در مقایسه جداول (۱۴)، (۱۵) و (۱۶) مربوط به توزیع تعمیم یافته مارشال اولکین ریلی و جداول (۱۷)، (۱۸) و (۱۹) که مربوط به توزیع تعمیم یافته مارشال اولکین پارتو است، به وضوح قابل مشاهده است.

با توجه به جداول (۱۴) تا (۱۶)، واضح است که در هر دو روش تفاوت زیادی در توابع زیان مختلف در برآوردهای بی زی یافت نمی شود. همچنین مشخص است که هر دو روش لیندلی و زنجیره مارکوف مونت کارلو تقریباً عملکرد یکسانی در برآورد پارامترها دارند، اما همان طور که مشخص است، برآوردهای روش زنجیره مارکوف مونت کارلو دارای میانگین مربع خطای کمتری نسبت به برآورد لیندلی با تابع زیان یکسان هستند، اما این تفاوت در α ناچیز است. در برآورد پارامتر δ می توان از این تفاوت به عنوان معیاری برای مقایسه عملکرد دو روش استفاده کرد و نتیجه گرفت که برآوردهای روش زنجیره

مراجع

- [1] Cox, DR, Hinkley, DV. (1974), *Theoretical Statistics*. Chapman and Hall, London.
- [2] Gompertz, B. (1825), On e of the function expressive of the law of human mortality and on the new model of determining the value of life contingencies. *Philos. Trans. R. Soc. Lond.*, **115**, 513–585. the natu
- [3] Gurvich, M, DiBenedetto, A, Ranade, S. (1997), A new statistical distribution for characterizing the random strength of brittle materials. *J. Mater. Sci.*, **32**, 2559–2564 .
- [4] Lai, CD, Xie, M, Murthy, DNP. (2003), A modified Weibull distribution. *Trans. Reliab.*, **52**, 33–37.

- [5] Lindley, D.V. (1980), Approximate Bayes method, *Trabajos de estadística*, **31**, 223-237 .
- [6] Marshall, A. W., and Olkin, I. (1997), A new method for adding a parameter to a family of distributions with application to the exponential and Weibull families. *Biometrika* , **84**, 641-652.
- [7] Rayleigh, JWS. (1880), On the resultant of a large number of vibrations of the same pitch and of arbitrary phase. *Phil. Mag.*, **10**, 73-78.
- [8] Nadarajah, S., Jayakumar, K. and Ristic, M.M. (2012), A new family of lifetime models, *Journal of statistical computation and simulation*, **83(8)**, 1389-1404.
- [9] Santos, M. (2014), The Marshall-Olkin extended Weibull family of distributions. *Journal of Statistical Distributions and Applications*, **1**, 9.
- [10] Shannon, CE. (1948), A mathematical theory of communication. *Bell Syst. Techn. J.*, **27**, 379-423.
- [11] Xie, M, Lai, D. (1995), Reliability analysis using additive Weibull model with bathtub-shaped failure rate function. *Reliab. Eng. Syst. Saf.*, **52**, 87-93.
- [12] Xie, M, Tang, Y, Goh, TN. (2002), A modified Weibull extension with bathtub-shaped failure rate function. *Reliab. Eng. Syst. Saf.*, **76**, 279-285.

Bayesian inference for extended Weibull marshall-olkin distributions

Nahid Sanjari Farsipour¹ Bahram Taremi² Zahra Memar Kashani³

Abstract:

Marshall-Olkin introduced a family of distributions which obtained by adding a parameter to other distributions. Santoz-Net et al studied an extended Weibull distributions. In this paper two Rayleigh and Weibull extended Pareto distributions are studied, various research such as moments and Bayesian statistics under different loss functions such as squared error, Entropy, Linex, Squared error in logarithm and Modified Linex are studied. Also the Markov chain Monte Carlo (MCMC) method has been studied for these two distributions.

Keywords: Survival function, Hazard function, Extended Weibull distribution, Rayleigh distribution, Pareto distribution, Bayesian statistics, MCMC method.

¹ Statistics group, Faculty of Mathematics, Al-Zahra University, Tehran

² Statistics department, College of Science, Shiraz University, Shiraz

³ Statistics group, Faculty of Mathematics, Al-Zahra University, Tehran