توزیع خرابی‌های یک سیستم منسجم تحت شرط کارکردن سیستم با طول‌های عمر گسسته

محمد جریره [۱]

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۰۱/۱۶
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۰۲/۲۲

چکیده:
در این مقاله، تعداد خرابی یک سیستم منسجم تحت فرض این‌که طول عمر مؤلفه‌های سیستم، متغیرهای تصادفی گسسته و وابسته‌ی غیرهم‌توزیع می‌باشند، موردمطالعه قرارگرفته است. ابتدا، احتمال این‌که دقیقاً i خرابی، $i = 0, ..., n-k$، در یک سیستم k از n تحت شرطی که سیستم در زمان نظارت t کار می‌کند، محاسبه می‌شود. در ادامه، این نتیجه را به سایر سیستم‌های منسجم تعمیم داده‌شده است. علاوه بر این، نشان داده‌شده است که در حالت استقلال و هم‌توزیعی طول‌های عمر مؤلفه‌ها، احتمال به‌دست‌آمده با احتمال متناظر در حالت پیوسته به‌دست‌آمده‌ی در ادبیات موجود، مطابقت دارد. در نهایت با ارائه‌ی مثال‌های کاربردی، رفتار این احتمال در حالتی که مؤلفه‌های سیستم دارای طول‌های عمر تبادل‌پذیر و لزوماً غیرهم‌توزیع می‌باشند، بررسی‌شده است.

واژه‌های کلیدی: قابلیت اعتماد، سیستم منسجم، بردار علامت، [۲] سیستم‌های k از n، توزیع طول عمر گسسته، آماره‌های ترتیبی، تبادل‌پذیر.[۳]

۱ مقدمه

ساختارهای منسجم در نظریه قابلیت اعتماد از اهمیت ویژه‌ای برخوردار هستند؛ زیرا به‌طور گسترده برای مدل‌سازی دستگاه‌های فنی -پیچیده ریاضی متشکل از عناصر ساده، استفاده می‌شود. سیستم، منسجم نامیده می‌شود اگر تابع ساختار آن برحسب هر مؤلفه‌ی آن، صعودی؛ و اینکه هر مؤلفه‌ی آن مرتبط باشد (یک مؤلفه نامرتبط است اگر کار کردن یا کار نکردن آن مهم نباشد). تحقیقات مختلفی به‌طور گسترده‌ای ویژگی‌های سیستم‌های منسجم موردمطالعه قرار داده‌اند. برای مثال به [۲]، [۱۰]، [۱۶]، [۱۸]، [۲۰] و [۲۱] مراجعه شود. سیستم k از n کار می‌کند مادامی‌که حداقل k مؤلفه‌ی آن کار کند. حالت‌های $k = 1$ و $k = n$ به ترتیب متناظر با ساختارهای موازی و سری است. برای دیدن مثال‌های مهم در زمینه‌ی سیستم‌های k از n به [۳] مراجعه شود. در شرایط زندگی واقعی، فقط اطلاعات جزئی در مورد وضعیت سیستم یا مؤلفه‌های آن وجود دارد. بر اساس این اطلاعات جزئی، توجه بسیاری از پژوهش‌گران حوزه‌ی قابلیت اعتماد به طول عمر باقیمانده و طول عمر سپری‌شده از زمان خرابی سیستم‌های منسجم، به‌ویژه سیستم‌های k از n معطوف شده است. برای جزئیات بیشتر، به [۱۱]، [۱۵]، [۲۱] و [۲۲] مراجعه گردد. اکثر نتایج در این زمینه تحت شرط این‌که طول عمر مؤلفه‌ها، متغیرهای تصادفی مطلقاً پیوسته باشند، به‌دست‌آمده است که بسیار ساده‌تر از حالت گسسته است که در آن ممکن است روابط بین خرابی مؤلفه‌ها با احتمال غیر صفر وجود دارد. بااین‌حال در عمل، اغلب مدل‌های گسسته اتفاق می‌افتند، برای مثال، زمانی که سیستم یک وظیفه را به‌طور مکرر انجام می‌دهد و در هر چرخه، مؤلفه‌های سیستم دارای احتمال خرابی معینی می‌باشند یا زمانی که طول عمر مؤلفه نشان‌دهنده تعداد روشن و خاموش شدن آن تا خرابی است. ویژگی‌های قابلیت اعتماد سیستم‌های منسجم متشکل از مؤلفه‌هایی با طول عمر گسسته در [۴]، [۶]، [۵]، [۸]، [۲۹]، [۳۱] و [۳۲] بررسی‌شده است. در [۷] برآورد حداکثر درستنمایی را بر اساس طول عمر گسسته‌ی مؤلفه‌های یک سیستم k از n مطالعه شده است. در [۱۶]، [۱۹] و [۲۵] سیستم‌های متشکل از مؤلفه‌هایی با طول عمر گسسته، موردبحث قرار داده‌شده‌اند. در [۹] تعداد مؤلفه‌های سالم تحت شرط کار کردن سیستم، موردبررسی قرارگرفته است. همچنین [۲۶] بر تعداد خرابی‌های یک سیستم منسجم تحت فرض اینکه طول عمر

[۱] دانشجوی دکتری آمار ریاضی دانشگاه اصفهان (نویسنده مسئول: mohamad_jarire@yahoo.com)

[2] Signature
[3] Exchaneable

مؤلفه‌های آن، تبادل‌پذیر باشد، متمرکزشده است. در [۱] تابع جرم احتمال خرابی‌های یک سیستم k از n مادامی‌که سیستم در زمان نظارت t کار کند، تحت استقلال و هم‌توزیعی طول عمر مؤلفه‌های سیستم محاسبه‌شده است. چندین ویژگی این تابع، موردمطالعه قرار گرفت. علاوه بر این، این نتایج به سیستم‌های منسجم تعمیم داده‌شده است. در بخش دوم، تابع جرم احتمال خرابی یک سیستم k از n تحت این‌که طول‌های عمر مؤلفه‌ها، متغیرهایی تصادفی گسسته و تبادل‌پذیر که لزوماً دارای توزیع یکسانی نمی‌باشند، محاسبه شد و با ارائه‌ی یک مثال عددی، رفتار تابع مذکور موردبررسی قرار گرفت. در بخش سوم، نتایج به سیستم منسجم تعمیم داده‌شده است. در سرتاسر این مقاله، نمادهای ذیل بکار گرفته‌شده است. فرض کنید $\mathcal{P}$ نشان‌دهنده‌ی مجموعه‌ی همه جایگشت‌های $(j_1, j_2, ..., j_n)$ از $(1, 2, ..., n)$ و $\mathcal{P}_s^n$ نشان‌دهنده‌ی زیرمجموعه‌ای از $\mathcal{P}^n$ دربرگیرنده‌ی جایگشت‌هایی می‌باشد که در زیر صدق کند:

$$j_{<} j_2 < ... < j_s, J_{s+1} < j_{s+2} < ... < j_n.$$

۲ نتایج بر روی خرابی‌های یک سیستم k از n

یک سیستم k از n متشکل از مؤلفه‌هایی با طول‌های عمر گسسته $T_1, ..., T_n$ به‌صورت وابسته -نه لزوماً هم‌توزیع با توابع توزیع $F_i(t) = P(T_i \leq t)$ در نظر بگیرید. آنگاه $T_{1:n} \leq T_{2:n} \leq ... \leq T_{n:n}$ به ترتیب آماره‌های ترتیبی طول‌های عمر مؤلفه‌های سیستم می‌باشد. ازآنجایی‌که یک سیستم k از n کار می‌کند مادامی‌که حداقل k مؤلفه‌ی آن کار کند، طول عمر $T_{k:n}$، $n-k+1$ کوچک‌ترین طول عمر مؤلفه می‌باشد؛ یعنی $T_{k:n} = T_{n-k+1:n}$.

فرض کنید $N_{k,n}$ تعداد خرابی‌های یک سیستم در زمان نظارت t باشد. همچنین فرض کنید که در زمان نظارت t سیستم هنوز کار می‌کند؛ یعنی $T_{k:n} > t$. علاقه‌مند به تعیین کردن احتمال شرطی زیر می‌باشیم:

$$p_t(i,k,n) = P(N_{k,n}(t) = i | T_{k:n} > t), \quad i = 0, 1, ..., n-k$$

در نتیجه

$$S_{k,n}(t) = n - N_{k,n}(t)$$

تعداد مؤلفه‌های یک سیستم سالم در زمان نظارت t می‌باشد؛ بنابراین مطالعه‌ی $N_{k,n}(t)$ و $S_{k,n}(t)$ معادل است.

توجه داشته باشید که پیشامد $\{N_{k,n}(t) = i\}$ رخ می‌دهد اگر و تنها اگر پیشامد $\{T_{i:n} \leq t < T_{i+1:n}\}$ اتفاق بیفتد. آنگاه داریم:

$$\begin{aligned} p_t(i,k,n) &= \frac{P(N_{k,n}(t) = i, T_{k:n} > t)}{P(T_{k:n} > t)} \\ &= \frac{P(T_{i:n} \leq t < T_{i+1:n}, T_{n-k+1:n} > t)}{P(T_{k:n} > t)} \\ &= \frac{P(T_{i:n} \leq t < T_{i+1:n})}{P(T_{k:n} > t)} \quad i = 0, 1, ..., n-k \end{aligned} \tag{1}$$

فرض کنید $T_1, ..., T_n$ دارای توزیع توأم گسسته و $t \in \mathbb{N}$، آنگاه برای $m = 0, ..., k-1$، داریم:

$$P(N_{k,n}(t) = n-k+1, T_{k:n} = t) = \sum_{s=0}^{n-k} \sum_{(j_1,...,j_n) \in \mathcal{P}_{s,n-k+1}} P(^{(j_1,...,j_n)} B^t_{s-n-k+m+1}) \tag{2}$$

اگر $T_1, ..., T_n$ مستقل باشند، عبارت ۲ به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\sum_{s=0}^{n-k} \sum_{(j_1,...,j_n) \in \mathcal{P}_{s,n-k+1}} \left(\prod_{l=1}^{s} F_{j_l}(t^-) \right) \cdot \left(\prod_{l=s+1}^{n-k+m+1} p_{j_l}(t) \right) \left(\prod_{l=n-k+m+2}^{n} \overline{F}_{j_l}(t) \right) \tag{3}$$

اگر $T_1, ..., T_n$ تبادل‌پذیر باشند، عبارت ۲ به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\sum_{s=0}^{n-k} \frac{n!}{s!(n-k+m+1-s)!(k-m-1)!} . P(^{(j_1,...,j_n)} B^t_{s-n-k+m+1}) \tag{4}$$

که در آن

$$\begin{aligned} &(j_1, ..., j_n) B^t_{s-n-k+m+1} = \\ &(\bigcap_{l=1}^{s} \{T_{j_l} < t\}) \cap (\bigcap_{l=s+1}^{n-k+m-1} \{T_{j_l} = t\}) \\ &\cap (\bigcap_{l=n-k+m+2}^{n} \{T_{j_l} > t\}) \end{aligned} \tag{5}$$

در قضیه‌ی بعدی، با استفاده از روابط فوق، می‌توان $p_t(i,k,n)$ را به دست آورد.

قضیهٔ ۱.۲. *یک سیستم k از n متشکل از n مؤلفه با طول‌های عمر گسسته $T_1, ..., T_n$، وابسته و نه لزوماً هم‌توزیع را در نظر بگیرید. برای هر $i = 0, ..., n-k$ داریم:*

$$p_t(i,k,n) = \frac{\sum_{(j_1,...,j_n) \in \mathcal{P}_i^n} P(^{(j_1,...,j_n)} B^t_i)}{\sum_{s=0}^{n-k} \sum_{(j_1,...,j_n) \in \mathcal{P}_s^n} P(^{(j_1,...,j_n)} B^t_s)} \tag{6}$$

که در آن B_s^t در رابطه‌ی ۵ تعریف شده است. به‌طور خاص، اگر طول‌های عمر $T_1, ..., T_n$ تبادل‌پذیر باشد، داریم:

$$p_t(i,k,n) = \frac{\binom{n}{i} P(\bigcap_{l=1}^{i}\{T_l \leq t\}) \cap (\bigcap_{l=i+1}^{n}\{T_l > t\})}{\sum_{s=0}^{n-k}\binom{n}{s} P(\bigcap_{l=1}^{s}\{T_l \leq t) \cap (\bigcap_{l=s+1}^{n}\{T_l > t\})} \tag{7}$$

و اگر طول‌های عمر $T_1, ..., T_n$ مستقل باشد، داریم:

$$p_t(i,k,n) = \frac{\sum_{(j_1,...,j_n)\in \mathcal{P}_i^n}(\prod_{l=1}^{i} F_{j_l}(t))(\prod_{l=i+1}^{s} \overline{F}_{j_l}(t))}{\sum_{s=0}^{n-k}\sum_{(j_1,...,j_n)\in \mathcal{P}_s^n}(\prod_{l=1}^{i} F_{j_l}(t))(\prod_{l=i+1}^{s} \overline{F}_{j_l}(t))} \tag{8}$$

مثال ۲.۲. سیستمی متشکل از چهار مؤلفه را در نظر بگیرید که خطر خرابی آن‌ها به‌طور گسسته باشند. این نتیجه می‌دهد که طول عمر آن‌ها، گسسته هستند. در طی چنین طول عمری، چرخه‌هایی وجود دارد که در هر چرخه، شوکی به مؤلفه‌ی i وارد می‌شود که با احتمال $p \in (0,1)$ زنده می‌ماند. علاوه بر این، در هر چرخه، یک شوک وجود دارد که به همه مؤلفه‌های سیستم وارد می‌شود و با احتمال $\theta \in (0,1)$ زنده می‌مانند و با احتمال $1-\theta$ خراب می‌شوند. رویدادهای زنده ماندن از شوک‌ها از یک چرخه به چرخه دیگر، مستقل می‌باشند. هنگامی‌که یک مؤلفه خراب می‌شود، برای همیشه غیرفعال می‌ماند. فرض کنید $T_1, ..., T_4$ نشان‌دهنده تعداد چرخه‌ها و شامل خرابی مؤلفه‌ی i ام باشد. آنگاه تابع بقای بردار (T_1, T_2, T_3, T_4) به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} &P(T_1 > t_1, T_2 > t_2, T_3 > t_3, T_4 > t_4) = \\ &p^{t_1+t_2+t_3+t_4}\theta^{\max(t_1,t_2,t_3,t_4)} \quad t_1,t_2,t_3,t_4 = 0,1,2,... \end{aligned} \tag{9}$$

فرض کنید سیستم کار می‌کند مادامی‌که حداقل ۲ مؤلفه‌ی آن کار کند. به‌وسیله رابطه ۹ داریم:

$$\begin{aligned} &P(T_1 < t, T_2 > t, T_3 > t, T_4 > t) \\ &= \sum_{x=1}^{t} P(T_1 > x-1, T_2 > t, T_3 > t, T_4 > t) \\ &- P(T_1 > x, T_2 > t, T_3 > t, T_4 > t) \\ &= p^{3t}\theta^t(1-p^t) \quad t = 0,1,2,3,... \end{aligned}$$

با ترکیب روابط ۸ و ۹ داریم:

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^{n-k=2} &= P(T_1 > t, T_2 > t, T_3 > t, T_4 > t) \\ &+ \binom{4}{1} P(T_1 < t, T_2 > t, T_3 > t, T_4 > t) \\ &+ \binom{4}{2} P(T_1 < t, T_2 < t, T_3 > t, T_4 > t) \end{aligned}$$

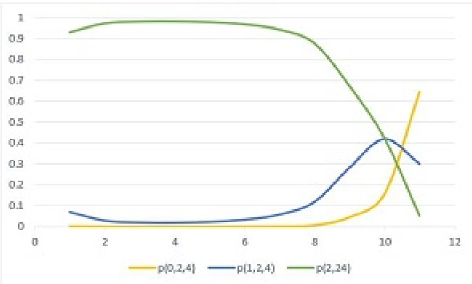
در نتیجه

$$p(0,2,4) = \frac{p^{2t}}{(p^{2t} + 4p^t(1-p^t) + 6(1-p^t)^2)}$$

$$p(1,2,4) = \frac{4p^t(1-p^t)}{(p^{2t} + 4p^t(1-p^t) + 6(1-p^t)^2)}$$

$$p(2,2,4) = \frac{6(1-p^t)^2}{(p^{2t} + 4p^t(1-p^t) + 6(1-p^t)^2)}$$

از نمودار ۱ ملاحظه می‌شود که تابع جرم احتمال خرابی‌ها یک سیستم k از n با طول‌های عمر گسسته و ناهم‌توزیع دارای رفتار یکنوایی و بسته‌ای برحسب زمان نیست. این در حالی است که تابع جرم احتمال متناظر تحت پیوسته بودن طول عمر مؤلفه‌ها دارای رفتار یکنوایی می‌باشد.



شکل ۱. تابع جرم احتمال خرابی‌ها در یک سیستم ۲ از ۴

نتیجه ۳.۲. در حالتی که طول‌های عمر متغیرهایی گسسته و مستقل و هم‌توزیع با F باشند، آنگاه احتمال در ۶ به‌صورت زیر می‌باشد:

$$p_t(i,k,n) = \frac{\binom{n}{i} F^i(t)\overline{F}(t)^{n-i}}{\sum_{s=0}^{n-k}\binom{n}{s} F^s(t)\overline{F}(t)^{n-s}} \tag{10}$$

که در آن، $\phi = \frac{F(t)}{\overline{F}(t)}$. فرمول ارائه‌شده در ۱۰ همان فرمول ارائه‌شده در مقاله [1] در حالت پیوسته است. ویژگی‌های این احتمال و رفتار آن برحسب n و i در مقاله [1] موردبررسی قرارگرفته است؛ بنابراین ویژگی‌های ارائه‌شده نیز در حالت گسسته (مستقل و هم‌توزیع) معتبر می‌باشند؛ اما در حالت تبادل‌پذیری طول‌های عمر (لزوماً نه هم‌توزیع)، برقرار نیست. به‌طور مثال، با یک مثال نقص به‌راحتی می‌توان نشان داد که $p_t(i,k,n)$ در حالت گسسته‌ی تبادل‌پذیر-ناهم‌توزیع، لگ-مقعر و در نتیجه‌ی IFR نمی‌باشد.

۳ تعمیم نتایج به سیستم‌های منسجم با بردار علامت دلخواه

در این بخش، تعمیم نتایج بخش قبلی به سیستم‌های منسجم می‌باشد. یک سیستم منسجم متشکل از n مؤلفه‌ی با طول‌های عمر گسسته‌ی وابسته ناهم‌توزیع $T_1, ..., T_n$ و T را به‌عنوان طول عمر سیستم در نظر

بگیرید. در اینجا این احتمال وجود دارد که تعدادی از مؤلفه‌های سیستم قبلاً خراب‌شده باشند، اما زمان خرابی ناشناخته است. ازاین‌رو، طبیعی است که بپرسیم احتمال اینکه i خرابی $i=0,1,\ldots,n-1$ تحت شرطی که سیستم در زمان نظارت t کارکند؛ برای $i=0,1,\ldots,n-1$ داریم:

$$\begin{aligned} p_t^c(i,n) &= P(T_{i:n}\le t<T_{i+1:n}\mid T>t)\\ &= \frac{P(T_{i:n}\le t<T_{i+1:n},T>t)}{P(T>t)}\\ &= \frac{P(T_{i:n}\le t<T_{i+1:n})}{P(T>t)} \qquad i=0,1,\ldots,n-1 \end{aligned} \tag{11}$$

عبارت فوق تعمیم عبارت ۱ است.

تعریف ۱.۳. گوییم که $P\subset 1,\ldots,n$ یک مجموعه مسیر یک سیستم منسجم است هرگاه سیستم کار می‌کند زمانی که همه اعضای بردار مسیر کارکند. یک مجموعه مسیر را مینیمال گویند هرگاه کوچک‌ترین مجموعه‌ای از مؤلفه‌ها باشد که کارکردن آن‌ها، کارکردن سیستم را تضمین می‌کند؛ بنابراین طول عمر سیستم بر اساس مجموعه‌ی مینیمال مسیر به‌صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$T=\max_{1\le j\le s}\min_{p\in P_j}T_P \tag{12}$$

که در آن $P_1,\ldots,P_s$ مجموعه‌های مینیمال مسیر می‌باشند. این بدان معناست که یک سیستم کار می‌کند اگر همه مؤلفه‌ها در یکی از مسیرهای آن کارکند. در سیستم‌های k از n، $\binom{n}{k}$ مجموعه مینیمال مسیر وجود دارد که همه مجموعه شامل دقیقاً k مؤلفه باشد. با استفاده از نمایش ۱۲، در [۲۳]، تابع قابلیت اعتماد T را به‌صورت زیر نمایش داده‌شده است:

$$P(T>t)=\sum_{j=1}^{s}(-1)^{j+1}\sum_{1\le k_1<\ldots<k_j\le s} P\left(\bigcap_{p\in P_{k_1}\cup\ldots\cup P_{k_j}}\{T_p>t\}\right) \tag{13}$$

با به کار بردن ۱۲، احتمال پیشامد $\{T_{i:n}\le t<T_{i+1:n},T>t\}$ به‌صورت محاسبه می‌گردد:

$$\begin{aligned} &P\{T_{i:n}\le t<T_{i+1:n},T>t\}\\ &=P\left(T_{i:n}\le t<T_{i+1:n},\max_{1\le j\le s}\min_{p\in P_j}T_p>t\right)\\ &=P\left(T_{i:n}\le t<T_{i+1:n},\bigcup_{j=1}^{s}\{\min_{p\in P_j}T_p>\}\right)\\ &=P\left(\bigcup_{j=1}^{s}\{T_{i:n}\le t<T_{i+1:n},\min_{p\in P_j}T_p>\}\right) \end{aligned}$$

بعلاوه با استفاده از فرمول شمول-عدم شمول، می‌توان نتیجه گرفت:

$$\begin{aligned} &P\{T_{i:n}\le t<T_{i+1:n},T>t\}\\ &=\sum_{j=1}^{s}(-1)^{j+1}\sum_{1\le k_1<\ldots<k_j\le s}\\ &P\left(T_{i:n}\le t<T_{i+1:n},\bigcap_{l=1}^{j}\{\min_{p\in P_{k_l}}T_p>t\}\right)\\ &=\sum_{j=1}^{s}(-1)^{j+1}\sum_{1\le k_1<\ldots<k_j\le s}\\ &P\left(T_{i:n}\le t<T_{i+1:n},\bigcap_{p\in P_{k_1},\ldots,P_{k_j}}T_p>t\right) \end{aligned} \tag{14}$$

با ترکیب ۱۳ و ۱۴ می‌توان نتیجه بعدی را ارائه داد.

قضیهٔ ۲.۳. فرض کنید که $T_1,\ldots,T_n$ طول‌های عمر گسسته‌ی وابسته باشد. آنگاه برای $i=0,1,\ldots,n-1$، داریم:

$$\begin{aligned} &p_t^c(i,n)=\\ &\frac{\sum_{j=1}^{s}(-1)^{j+1}\sum_{1\le k_1<\ldots<k_j\le s}}{\sum_{j=1}^{s}(-1)^{j+1}\sum_{1\le k_1<\ldots<k_j\le s}}\\ &\frac{P\left(T_{i:n}\le t<T_{i+1:n},\bigcap_{p\in P_{k_1},\ldots,P_{k_j}}T_p>t\right)}{P(\bigcap_{p\in P_{k_1},\ldots,P_{k_j}}\{T_p>t\})} \end{aligned} \tag{15}$$

تحت فرض تعویض‌پذیری طول‌های عمر مؤلفه‌ها، [۲۵]، نشان دادند که تابع قابلیت اعتماد T را می‌توان به‌صورت یک ترکیب از توابع قابلیت آماره‌های ترتیبی همبسته مثبت نوشت؛ بنابراین

$$P(T>t_{=}\sum_{m=1}^{n}s_mP(T_{m:n}>t) \tag{16}$$

که در آن $s_m\ge 0$ و $\sum_{m=1}^{n}s_m=1$. $\boldsymbol{S}=(s_1,\ldots,s_m)$ بردار علامت است که فقط به ساختار سیستم و توزیع $(T_1,\ldots,T_n)$ بستگی دارد. فرمول ۱۶ را نیز می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$P(T>t)=\sum_{m=1}^{n}\alpha_mP(T_{1:m}>t), \tag{17}$$

که در آن

$$\alpha_m=\sum_{j=1}^{s}(-1)^{j+1}\sum_{1\le k_1<\ldots<k_j\le s}I\left(|\bigcup_{l=1}^{j}P_{k_l}|=m\right), \tag{18}$$

که در آن $|\bigcup_{l=1}^{j}P_{k_l}|$ نشان‌دهنده کاردینال هر $\bigcup_{l=1}^{j}P_{k_l}$ و $\sum_{m=1}^{n}\alpha_m=1$. بردار $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ بردار مینیمال علامت سیستم است که در [۲۳]، معرفی‌شده است. برای جزئیات بیشتر به

مقاله [۷] مراجعه شود. با ترکیب ۱۷ و ۱۸ داریم: الف) اگر $T_1,...,T_n$ تبادل‌پذیر باشند،

$$P(T>t)=\sum_{m=1}^{n}P(\cap_{l=1}^{m}\{X_l>t\}) \sum_{j=1}^{s}(-1)^{j+1}\sum_{1\leq k_1<...<k_j\leq s} I\left(|\bigcup_{l=1}^{j}P_{k_l}|=m\right), \qquad (۱۹)$$

ب) اگر $T_1,...,T_n$ مستقل باشند،

$$P(T>t)=\sum_{m=1}^{n}P(\prod_{l=1}^{m}\{X_l>t\}) \sum_{j=1}^{s}(-1)^{j+1}\sum_{1\leq k_1<...<k_j\leq s} I\left(|\bigcup_{l=1}^{j}P_{k_l}|=m\right), \qquad (۲۰)$$

بنابراین می‌توان به دست آورد:

$$\begin{aligned} &P\left(T_{i:n}\leq t<T_{i+1:n}, \bigcap_{p\in P_{k_1},...,P_{k_j}}\{T_p>t\}\right)\\ &=\sum_{m=1}^{n-i} I\left(|\bigcup_{l=1}^{j}P_{k_l}=m\right)\sum_{j_1,...,j_{n-m}\in\mathcal{P}_i^{n-m}}\\ &P\left((\bigcap_{l=1}^{m}\{T_{p_i}>t\})\cap(\bigcap_{l=1}^{i}\{T_{j_i}\leq t\})\cap(\bigcap_{l=i+1}^{n-m}\{T_{j_l}>t\})\right) \end{aligned} \qquad (۲۱)$$

که در آن $p_1,...,p_m\in P_{k_1}\cup...\cup P_{k_j}$ و $\{j_1,...,j_{n-m}\}=\{1,...,n\}-\{p_1,...,p_m\}$. بنابراین الف) اگر $T_1,...,T_n$ تبادل‌پذیر باشند،

$$\begin{aligned} &P\left(T_{i:n}\leq t<T_{i+1:n}, \bigcap_{p\in P_{k_1},...,P_{k_j}}\{T_p>t\}\right)\\ &=\sum_{m=1}^{n-i} I\left(|\bigcup_{l=1}^{j}P_{k_l}|=m\right)\binom{n-m}{i}\\ &P\left((\bigcap_{l=1}^{m}\{T_{p_i}>t\})\cap(\bigcap_{l=1}^{i}\{T_{j_i}\leq t\})\cap(\bigcap_{l=i+1}^{n-m}\{T_{j_l}>t\})\right) \end{aligned} \qquad (۲۲)$$

ب) اگر $T_1,...,T_n$ مستقل باشند،

$$\begin{aligned} &P\left(T_{i:n}\leq t<T_{i+1:n}, \bigcap_{p\in P_{k_1},...,P_{k_j}}\{T_p>t\}\right)\\ &=\sum_{m=1}^{n-i} I\left(|\bigcup_{l=1}^{j}P_{k_l}|=m\right)\\ &\prod_{l=1}^{m}\overline{F}_{p_l}(t)\sum_{j_1,...,j_{n-m}\in\mathcal{P}_i^{n-m}}\prod_{l=1}^{j}F_{j_l}(t)\prod_{l=j+1}^{n-m}\overline{F}_{j_l}(t) \end{aligned} \qquad (۲۳)$$

نتیجه ۳.۳. با ترکیب ۲۱ و ۲۰ فرم بسته‌ای از فرمول ۱۶، زمانی‌که طول‌های عمر $T_1,...,T_n$ تبادل‌پذیر یا مستقل و ناهم‌توزیع باشند، به دست می‌آید.

تذکر ۴.۳. همان اثبات‌های قضیه ۲.۳ و فرمول‌های ۲۰ و ۲۱ زمانی‌که فرض گسسته بودن طول‌های عمر $T_1,...,T_n$ را کنار بگذاریم، همچنان ادامه‌دارند؛ بنابراین قضیه ۲.۳ و نتیجه ۳.۳ را می‌توان نه‌تنها در حالت گسسته بلکه در حالت کلی هر توزیع طول عمر مؤلفه به کار برد.

قضیهٔ ۵.۳. فرض کنید طول‌های عمر مؤلفه‌ها $T_1,...,T_n$ مستقل و هم‌توزیع با توزیع مشترک باشند، آنگاه برای هر $i=0,,n-1$، داریم:

$$p_t^c(i,n)=\frac{F^i(t)\overline{F}^{n-i}(t)}{\sum_{m=1}^{n}\overline{F}^m(t)}\times \frac{\sum_{j=1}^{s}(-1)^{j+1}\sum_{1\leq k_1<...<k_s\leq 1}I\left(|\bigcup_{l=1}^{j}P_{k_l}|=m\right)\binom{n-m}{i}}{\sum_{j=1}^{s}(-1)^{j+1}\sum_{1\leq k_1<...<k_s\leq 1}I\left(|\bigcup_{l=1}^{j}P_{k_l}|=m\right)} \qquad (۲۴)$$

با استفاده از ۱۶ رابطه ۲۴ معادل با

$$p_t^c(i,n)=F^i(t)\overline{F}^{n-i}(t)\times \frac{\sum_{j=1}^{s}(-1)^{j+1}\sum_{1\leq k_1<...<k_s\leq 1}I\left(|\bigcup_{l=1}^{j}P_{k_l}|=m\right)\binom{n-m}{i}}{\sum_{w=0}^{n-1}(\sum_{m=w+1}^{n}s_m)\binom{n}{m}F^w(t)\overline{F}^{n-w}(t)} \qquad (۲۵)$$

نتیجه ۶.۳. در سیستم‌های k از n احتمال در ۱۵ به ۶ و ۲۴ و ۲۵ به ۱۰ تبدیل می‌شود. در [۱] احتمال $p_t^c(i,n)$ را در حالتی‌که سیستم منسجم متشکل از n مؤلفه با طول‌های عمر هم‌توزیع و مستقل که در آن F پیوسته می‌باشد، محاسبه‌شده است‌که تحت شرط $S=\sum_{m=w+1}^{n}s_m$، $0\leq w\leq n-1$ به‌صورت زیر به‌دست‌آمده است:

$$\begin{aligned} p_t^c(i,n)&=\frac{\binom{n}{i}F^i(t)\overline{F}^{n-i}(t)S_i}{\sum_{w=0}^{n-1}S_w\binom{n}{w}F^w(t)\overline{F}^{n-w}(t)}\\ &=\frac{\binom{n}{i}\phi^i(t)S_i}{\sum_{w=0}^{n-1}S_w\binom{n}{w}\phi^w(t)} \end{aligned} \qquad (۲۶)$$

به‌راحتی می‌توان نشان داد‌که فرمول بالا معادل با فرمول به‌دست‌آمده در ۲۵ می‌باشد. بامطالعه ۲۵ و ۲۶ کافی است‌که تساوی بین صورت‌های دو رابطه را بررسی‌کرد. مقایسه روابط ۱۶ و ۱۷ با روابط موجود در [۷] که بردار مینیمال علامت به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\alpha_m=\binom{n}{m}\sum_{r=n-m+1}^{n}s_r(-1)^{r-1-n+m}\binom{m-1}{n-r}, \quad m=1,...,n.$$

بنابراین می‌توان فرمول‌ها را برای s_m برحسب عبارت‌های $\alpha_1,...,\alpha_m$ به دست آورد:

$$s_m = \sum_{r=1}^{n-m+1} \frac{\binom{n-m}{r-1}}{\binom{n}{r}}\alpha_r, \quad m=1,...,n \qquad (27)$$

با استفاده از ۲۷ می‌توان به دست آورد:

$$S_i = \sum_{m=i+1}^{n} s_m = \sum_{m=i+1}^{n}\left[\sum r = i^{n-m+1}\binom{n-r}{m-1}\right]\alpha_m. \qquad (28)$$

با ترکیب $\sum_{r=i}^{n-m+1}\binom{n-r}{m-1}=\binom{n-i}{m}$ با ۱۸ داریم:

$$S_i = \sum_{m=1}^{n-i}\left[\frac{1}{\binom{n}{m}}\binom{n-i}{m}\times\right. \left.\sum_{j=1}^{s}(-1)^{j+1}\sum_{1\le k_1<\ldots<k_s\le j} I\left(|\bigcup_{l=1}^{j}P_{k_l}|=m\right)\right]. \qquad (29)$$

با قرار دادن ۲۹ در صورت کسر ۲۶ و با استفاده از مساوی $\sum_{r=i}^{n-m+1}\binom{n-r}{m-1}=\binom{n-i}{m}$، صورت ۲۵ را به دست می‌آوریم؛ بنابراین احتمال $p_t^c(i,n)$ به‌وسیله همان با فرمول در حالتی که طول‌های عمر مؤلفه‌ها $T_1,...,T_n$ مستقل و هم‌توزیع باشند (خواه پیوسته و خواه گسسته) محاسبه می‌شود. **مثال:** یک سیستم منسجم با طول عمر زیر را در نظر بگیرید:

$$T=\min\{T_1,T_2,\max\{T_3,T_4\}\}, \qquad (30)$$

که در T_i، $i=1,2,3,4$ متغیرهایی مستقل و دارای توزیع هندسی با پارامتر p_i، باشندکه درآن $p_1=p_3=p\in(0,1)$ و $p_2=p_4=\theta\in(0,1)$ و $p\neq\theta$. بنابراین در این مثال، دو نمونه متغیر تصادفی داریم: $T_{1,3}\sim F_1$ و $T_2,T_4\sim F_2$.

$$F_1(x)=1-(1-p)^t,\quad \overline{F}_1(t)(1-p)^t$$

$$F_2(x)=1-(1-\theta)^t,\quad \overline{F}_2(t)(1-\theta)^t$$

این سیستم منسجم دارای دو مجموعه‌ی مینیمال مسیر، $P_1=\{1,2,3\}$ و $P_2=\{1,2,4\}$ است. با استفاده از نتیجه‌ی ۳.۳ می‌توان برای $t=0,1,...$ ، به دست آورد:

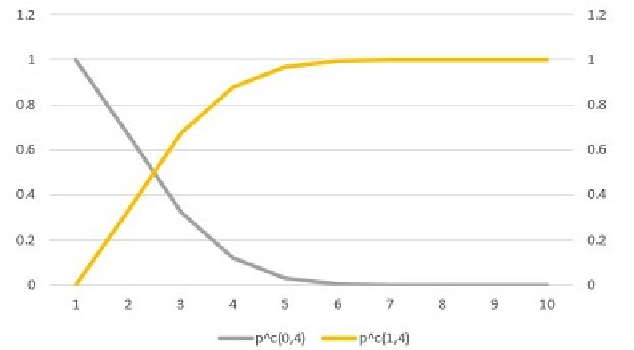
$$p_t^c(0,4)=\frac{\overline{F}_1^2(t)\overline{F}_2^2(t)}{\overline{F}_1^2(t)\overline{F}_2(t)+\overline{F}_1(t)\overline{F}_2^2(t)-\overline{F}_1^2(t)\overline{F}_2^2(t)} = \frac{1}{(1-p)^{-t}+(1-\theta)^{-t}-1},$$

$$p_t^c(1,4)=\frac{F_2(t)\overline{F}_1^2(t)\overline{F}_2(t)+F_1(t)\overline{F}_2^2(t)\overline{F}_1(t)}{\overline{F}_1^2(t)\overline{F}_2(t)+\overline{F}_1(t)\overline{F}_2^2(t)-\overline{F}_1^2(t)\overline{F}_2^2(t)} = \frac{(1-p)^{-t}+(1-\theta)^{-t}-2}{(1-p)^{-t}+(1-\theta)^{-t}-1},$$

بعلاوه به دلیل ساختار سیستم مذکور، $p_t^c(2,4)=p_t^c(3,4)=0$. اگر $p=\theta$، یعنی T_i مستقل و هم‌توزیع باشند، داریم:

$$p_t^c(0,4)=\frac{1}{2(1-p)^{-t}-1};$$
$$p_t^c(1,4)=\frac{2(1-p)^{-t}-2}{2(1-p)^{-t}-1} \quad t=0,1,2,...$$

از طرف دیگر، فرمول ارائه‌شده در فوق می‌توان به‌وسیله فرمول ۲۶ به دست آید. برای این مهم، کافی است که از بردار علامت سیستم که به فرم $s=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,0)$ استفاده گردد.



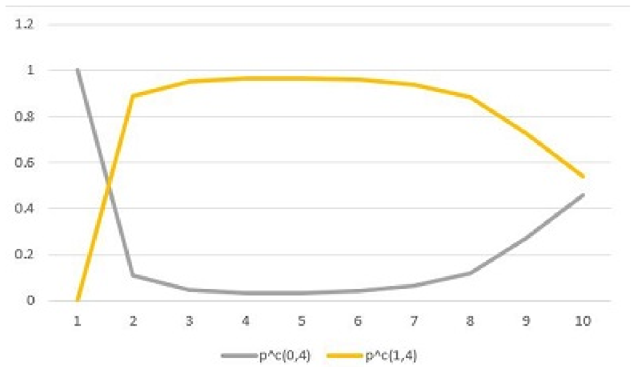
شکل ۲. تابع جرم احتمال خرابی‌ها در یک سیسستم منسجم متشکل از چهار مؤلفه‌ی با طول‌های عمر مستقل و هم‌توزیع

شکل ۲ نشان می‌دهد که $p_t^c(0,4)$ برحسب t تابعی نزولی است و $p_t^c(1,4)$ برحسب t صعودی می‌باشد. این نتیجه منطبق بر نتیجه ارائه‌شده در مقاله [۱] است.

اکنون فرض کنید طول‌های عمر T_1,T_2,T_3,T_4 متغیرهایی تصادفی ارائه‌شده در مثال ۲.۲ باشند. به‌وسیله نتیجه‌ی ۳.۳ بعد از عملیات جبری ساده داریم:

$$p_t^c(0,4)=\frac{p^t}{2-p^t}$$

$$p_t^c(1,4)=\frac{2-2p^t}{2-p^t}$$



شکل ۳. تابع جرم احتمال خرابی‌ها در یک سیسستم منسجم متشکل از چهار مؤلفه‌ی با طول‌های عمر تبادل‌پذیر و هم‌توزیع

شکل۳ نشان می‌دهد که رفتار تابع $p_t^c(0,4)$ ابتدا نزولی و سپس در یک بازه زمانی، دارای روندی تقریباً ثابت و در ادامه، شروع به افزایش کردن می‌کند. رفتار تابع $p_t^c(1,4)$ ابتدا صعودی و سپس در یک بازه زمانی دارای روندی تقریباً ثابت و در ادامه‌ی آن دارای روندی نزولی است.

۴ بحث و نتیجه‌گیری

مهندسان سیستم علاقه‌مند به نگهداری سیستم در شرایط بهینه‌ی کاری هستند؛ بنابراین برای این منظور، آن‌ها باید تعداد لوازم‌یدکی موجود در انبار، تعیین کنند. این مسئله مهم است؛ زیرا خرابی و در دسترس نبودن سیستم ممکن است هزینه‌های غیرمنتظره بالایی را برای کاربران بالقوه ایجاد کند. سیستم‌های منسجم نقش مهمی در زمینه‌های مختلف، ایفا دارند. بسته به نوع استفاده، هر سیستم فنی، طراحی یا ساختار خاصی دارد. کل سیستم (دستگاه) می‌تواند حتی اگر تعدادی از مؤلفه‌های (قطعات) آن قبلاً خراب‌شده باشند، کار کند. بااین‌حال، اگر تعداد خرابی‌های آن از آستانه خاصی عبور کند، سیستم از کار می‌افتد. ازاین‌رو، محاسبه احتمال تعداد خرابی‌های موجود در سیستم، ضروری و مفید است که در این مقاله ارائه شد. این امر به اپراتورهای سیستم‌ها امکان برنامه‌ریزی بیشتر و استفاده کارآمدتر از منابع را می‌دهد. احتمال اطلاعات حیاتی برای جلوگیری از خرابی سیستم فراهم می‌کند. اپراتورهای سیستم می‌توانند برای جلوگیری یا کاهش وقوع خرابی سیستم، سعی کنند یک مؤلفه‌ی خراب را به حالت عملیاتی تغییر دهند یا بازگردانند. این اقدامات برای ایجاد طرح‌های بهینه سیستم‌های تولیدی، شبکه‌های مخابراتی، زنجیره تأمین و غیره بسیار مهم است.

مراجع

[1] Asadi, M. and Berred, A. (2012). On the number of failed components in a coherent operating system. *Stat Probab Lett*, **82(12)**, 2156-2163.

[2] Ashrafi, S., Zarezadeh, S. and Asadi, M. (2018). Reliability modeling of coherent systems with shared components based on sequential order statistics. *J Appl Probab*, **55(3)**, 845-861.

[3] Barlow, R.E. and Proschan, F. (1975). *Statistical theory of reliability and life testing: probability models*. Holt, Rinehart and Winston, New York

[4] Davies, K. and Dembi´nska, A. (2019). On the number of failed components in a k-out-of-n system upon system failure when the lifetimes are discretely distributed. *Reliab Eng Syst Saf* , **188**, 47-61.

[5] Dembi´nska, A, (2018). On reliability analysis of k-out-of-n systems consisting of heterogeneous components with discrete lifetimes. *IEEE Trans Reliab*, **67**, 1071-1083.

[6] Dembi´nska, A. and Goroncy, A. (2020). Moments of order statistics from DNID discrete random variables with application in reliability. *J Comput Appl Math*, **371**, 112703.

[7] Dembi´nska, A. and Jasi´nski, K. (2020). Maximum likelihood estimators based on discrete component lifetimes of a k-out-of-n system. *Test*, **30(2)**, 407-428.

[8] Dembi´nska, A., Nikolov, N.I. and Stoimenova, E. (2021). Reliability properties of k-out-of-n systems with one cold standby unit. *J Comput Appl Math*, **388**, 1-27.

[9] Eryilmaz, S. (2010). Number of working components in consecutive k-out-of-n system while it is working. *Commun Stat Simul Comput*, **39**, 683-692.

[10] Eryilmaz, S. (2013). On reliability of a k-out-of-n system equipped with a single warm standby component. *IEEE Trans Reliab*, **62**, 499-503.

[11] Eryilmaz, S. and Bayramoglu, K. (2018).Residual life time of consecutive k-out-of-n systems under double monitoring. *IEEE Trans Reliab* **61(3)**, 792-797

[12] Eryilmaz, S., Koutras, M.V. and Triantatyllou, J.S. (2016). Mixed three-state k-out-of-n systems under double monitoring. *IEEE Trans Reliab* **61**, 792–797

[13] Esary, J.D. and Marshall, A.W. (1973).Multivariate geometric distributions generated by a cumulative damage process. *Techinal Report*. **5573041A**. Naval Postgraduate School، Monterey، California.

[14] Feller, W. (1957). *An introduction to probability theory and its applications*. vol I, 2nd- edn. Wiley, New York

[15] Goli, S. (2019). On the conditional residual lifetime of coherent systems under double regularly checking. *Naval Res Logist*, **66(4)**, 352-363

[16] Hazra, N.K. and Finkelstein, M. (2019).Comparing life times of coherent systems with dependent components operating in random environments. *J Appl Probab*, **56(3)**, 937 - 957

[17] Kelkinnama, M. and Asadi, M. (2019). Stochastic and ageing properties of coherent systems with dependent identically distributed components. *Stat Papers*, **60**, 805-821.

[18] Kelkinnama, M., Tavangar, M. and Asadi, M. (2015). New developments on stochastic properties of coherent systems. *IEEE Trans Reliab*, **64(4)**, 1276-1286.

[19] Miziua, P. and Rychlik. T. (2014). Sharp bounds for lifetime variances of reliability systems with exchangeable components. *IEEE Trans Reliab*, **64(4)**, 850-857.

[20] Nair. N.U., Sankaran, P.G. and Balakrishnan, N. (2018). *Reliability modelling and analysis in discrete time.* Academic Press, London.

[21] Navarro, J. and Burkschat, M. (2011). Coherent systems based on sequential order statistics. *Naval Res Logist*, **58(2)**, 122-135.

[22] Navarro, J. and Cali, C. (2019). Inactivity times of coherent systems with dependent components under periodical inspections. *Appl Stoch Models Bus Ind*, **35(3)**, 871-892.

[23] Navarro, J., Longobardi, M. and Pellerey, F. (2017). Comparison results for inactivity times of k-out of-n and general coherent systems with dependent components. *Test*, **26(4)**, 822-846.

[24] Navarro, J., Ruiz, J.M., Sandoval, C.J. (2007). Properties of coherent systems with dependent components. *Commun Stat Theory Methods*, **36(1)**, 175-191.

[25] Navarro, J. and Rychlik, T. (2007). Reliability and expectation bounds for coherent systems with exchangeable components. *J Multivar Anal*, **98(1)**, 102-113.

[26] Navarro, J., Samaniego, F.J., Balakrishnan, N. and Bhattacharya, D. (2008). On the application and extension of system signatures in engineering reliability. *Naval Res Logist*, **54(4)**, 313-327.

[27] Ross, S.M., Shahshahani, M. and Weiss, G. (1980). On the number of component failures in systems whose component lives are exchangeable. *Math Oper Res*, **5(3)**, 358-365.

[28] Samaniego, F.J. (1985). On closure of the IFR class under formation of coherent systems. *IEEE Trans Reliab*,**34(1)**, 69-72.

[29] Shaked, M. and Suarez-Llorens, A. (2003). On the comparison of reliability experiments based on the convolution order. *J Am Stat Assoc*, **98(463)**, 693-702.

[30] Tank, F. and Eryilmaz, S. (2015).The distributions of sum، minima and maxima of generalized geometric random variables. *Stat Pap*, **56(4)**, 1191-1203.

[31] Tavangar, M. (2016). Conditional inactivity time of components in a coherent operating system. *IEEE Trans Reliab*, **65(1)**, 359-369.

[32] Weiss, G. (1962).On certain redundant systems which operate at discrete times. *Technometrics*, **4(1)**, 69-74.

[33] Young, D. (1970). The order statistics of the negative binomial distribution. *Biometrika*, **57(1)**, 181-186.

Distribution of failures of a coherent system under the condition of operating the system with discrete lifetimes

Mohammad Jarire[1]

Abstract:

In this article, the number of failures of a coherent system has been studied under the assumption that the lifetime of system components are non-distributed discrete and dependent random variables. First, the probability that exactly i Failure $i = 0, ..., n-k$, in a system k From n Under the condition that the system at the time of monitoring t it works it will be counted. In the following, this result has been generalized to other coherent systems. In addition, it has been shown that in the case of independence and co-distribution of component lifetimes, the probability obtained is consistent with the corresponding probability in the continuous state obtained in the existing literature. Finally, by presenting practical examples, the behavior of this probability has been investigated in the case that the system components have interchangeable and necessarily non-distributed lifetimes.

Keywords: Reliability, coherent system, Signature, $k-out-of-n$ System, Discrete lifetime distribution, Order Statistics, Exchangeable.

[1] **Ph.D. student of Isfahan University**