توزیع سری لگاریتمی مارکوف و برآورد پارامترهای آن به روش $E-$ بیزی

حسن اسفندیاری‌فر [۱]، پرویز نصیری [۲]، رقیه ماکویی [۳]

تاریخ دریافت: ۹۸/۲/۳

تاریخ پذیرش: ۹۹/۳/۱

چکیده:

در تجزیه و تحلیل متغیرهای برنولی، بررسی وابستگی بین آن‌ها از اهمیت زیادی برخوردار است. در این مقاله با اعمال وابستگی مرتبه اول بین متغیرهای برنولی، توزیع سری لگاریتمی مارکوف معرفی می‌شود. برای برآورد پارامترهای این توزیع از روش‌های ماکسیمم درستنمایی، گشتاوری، بیزی و همچنین روش جدیدی موسوم به روش بیزی مورد انتظار ($E-$ بیزی) استفاده می‌شود. در ادامه با استفاده از یک مطالعه شبیه‌سازی نشان داده‌شده که برآوردگر بیزی مورد انتظار در مقایسه با برآوردگرهای دیگر بهتر عمل می‌کند.

واژه‌های کلیدی: توزیع سری لگاریتمی مارکوف، برآورد $E-$بیزی، برآورد ماکسیمم درستنمایی، برآورد گشتاوری، میانگین توان دوم خطا.

۱ مقدمه

برآورد پارامترهای توزیع‌های آماری از مباحث مهم استنباط آماری است. این امر معمولاً با دو رویکرد فراوانی گرا و بیزی انجام می‌پذیرد. بنا به دیدگاه دوم، برآوردگر بیزی با معرفی یک توزیع پیشین و ترکیب آن با تابع درستنمایی منجر به ارائه توزیع پسین شده و توزیع حاصل مبنای استنباط برای برآورد پارامتر موردمطالعه قرار می‌گیرد. هرچقدر میزان اطلاعات پیشین راجع به پارامتر افزایش یابد، توزیع پسین حاصل رفتار تصادفی پارامتر را واقعی‌تر توصیف می‌کند. انتخاب توزیع پیشین، خود از سابقه تاریخی برخوردار است. برای نمونه لیندلی و اسمیت [۱۲] بحث توزیع پیشین سلسله مراتبی را مطرح و سال‌ها بعد هان و دینگ [۹] این موضوع را بسط بیشتری داد. همچنین هان [۳] روش جدیدی به نام روش بیزی مورد انتظار[۴]، که به‌اختصار $E-$بیزی نامیده می‌شود، را معرفی کرد. پژوهش‌های مستمر هان منجر به مجموعه مقالاتی برای تشریح بیشتر ایده وی در مسائلی مانند پیش‌بینی مدل امنیت سرمایه‌گذاری، قابلیت اعتماد و سایر مباحث مرتبط شد. برای مطالعه به منابع [۳، ۹، ۴، ۵، ۶] مراجعه شود. در ادامه کارهای هان [۳]، و لی و همکاران [۱۱] آن ایده را برای احتمال تغییر وضعیت در مباحث قابلیت اعتماد مهندسی به کار گرفتند ([۶، ۷، ۸]). اخیراً، جاهین و اوکاشا [۱۰] روش مورداشاره را برای مدل بور[۵] و اوکاشا [۱۴] برای توزیع لوماکس مورداستفاده قراردادند. در این مقاله با اعمال وابستگی بین متغیرهای برنولی توزیع سری لگاریتمی مارکوف معرفی می‌شود. در برآورد بیزی پارامترهای توزیع سری لگاریتمی مارکوف، سعی بر آن است که توزیع پیشین مناسب برای ابر پارامترها معرفی شود و با اعمال شرایط روی پارامترهای توزیع پیشین، پارامترها به روش برآورد $E-$ بیزی برآورد می‌شوند.

فرض کنید $\{X_n,\ n=1,2,\ldots\}$ دنباله‌ای از متغیرهای برنولی باشد، به طوری که $P(X_1=1)=p$ و $P(X_1=0)=q$، دنباله یادشده دارای خاصیت زنجیر مارکوف مرتبه اول است، اگر رابطه

$$\begin{aligned}P(X_n=j_n|X_1=j_1,X_2=j_2,\ldots,X_{n-1}=j_{n-1})\\=P(X_n=j_n|X_{n-1}=j_{n-1})\end{aligned}$$

برقرار باشد. با فرض همگن بودن زنجیر مارکوف، ماتریس احتمال انتقالات بر اساس توزیع شرطی X_n به شرط X_{n-1} به صورت

$$P=\begin{pmatrix}1-\alpha & \alpha\\ \beta & 1-\beta\end{pmatrix}\ ,\ 0\le\alpha\le1\ ,\ 0\le\beta\le1$$

در نظر گرفته می‌شود. برای $\alpha+\beta>1$ و با فرض $p=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$ ماتریس احتمال انتقال پس از n گام برابر با

$$P^n=\frac{1}{\alpha+\beta}\begin{pmatrix}\beta+\alpha\delta^n & \alpha-\alpha\delta^n\\ \beta-\beta\delta^n & \alpha-\beta\delta^n\end{pmatrix}$$

[۱] گروه ریاضی دانشگاه افسری امام علی(ع)، ایران h50p50@yahoo.com

[۲] گروه آمار، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران، صندوق پستی ۱۹۳۹۵–۴۶۹۷ (نویسندهٔ مسئول)

[۳] گروه آمار، دانشگاه تبریز، ایران

[4] Expected Bayesian method

[5] Burr

است، که در آن $\delta = 1 - \alpha - \beta$. با توجه به ماتریس احتمال انتقال‌ها و توزیع آغازین، تابع مولد احتمال دوجمله‌ای منفی مارکوف برای k پیروزی برابر است با:

$$P_k(t) = \left[(1-\alpha) + \frac{\alpha\beta t}{1-(1-\beta)t}\right]^k \qquad (1)$$

یکی از روش‌های به دست آوردن توزیع سری لگاریتمی، استفاده از توزیع حدی، توزیع بریده‌شده توزیع دوجمله‌ای منفی در نقطه صفراست. بنابراین با استفاده از رابطه (۱)، می‌توان نشان داد که تابع چگالی توزیع سری لگاریتمی مارکوف برابر با

$$P(X{=}x) = \frac{-1}{\ln(1-\alpha)} \frac{(1-\beta)^x - (1-\frac{\beta}{1-\alpha})^x}{x}, x{=}1,2,\ldots \qquad (2)$$

است. (برای اطلاع بیشتر به [۱۳] مراجعه کنید).

در حالت خاص، برای $\beta = 1 - \alpha$ و یا اعمال فرض استقلال بین دنباله‌ها از (۲) رابطه

$$P(X = x) = \frac{-1}{\ln(1-\alpha)x}\frac{\alpha^x}{x}, x = 1, 2, \ldots \qquad (3)$$

نتیجه می‌شود، که همان توزیع سری لگاریتمی است. در بخش ۲ برآورد ماکسیمم درستنمایی و در بخش ۳ برآورد گشتاوری پارامترها ارائه می‌شوند. در بخش ۴، با استفاده از تابع توزیع پیشین بتا، برآورد بیزی پارامترها تحت تابع زیان توان دوم خطا معرفی و در بخش۵، با اعمال شرایط روی ابرپارامترهای توزیع پیشین بتا، برآورد E–بیزی پارامترهای توزیع سری لگاریتمی مارکوف ارائه می‌شود. در بخش ۶ یک مطالعه شبیه‌سازی انجام و با استفاده از معیار میانگین توان دوم خطا، برآوردگرها مقایسه می‌شوند.

۲ برآورد ماکسیمم درستنمایی

فرض کنید $X_1, X_2, \ldots, X_n$ یک نمونه تصادفی از رابطه (۲) باشد. می‌توان نشان داد که تابع درستنمایی برابر با

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \alpha, \beta) = \left(\frac{-1}{\ln(1-\alpha)}\right)^n \prod_{i=1}^n \frac{(1-\beta)^{x_i} - (1-\frac{\beta}{1-\alpha})^{x_i}}{x_i} \qquad (4)$$

است، و تابع لگ درستنمایی برابر

$$l(\alpha,\beta) = -n\ln(-\ln(1-\alpha)) + \sum_{i=1}^n \ln\frac{(1-\beta)^{x_i} - (1-\frac{\beta}{1-\alpha})^{x_i}}{x_i} \qquad (5)$$

است. اگر از رابطه (۵) نسبت به پارامترها مشتق و برابر صفر قرار دهیم، دستگاه معادلات نرمال

$$\frac{\partial l(\alpha,\beta)}{\partial\alpha} = \frac{n}{(1-\alpha)\ln(1-\alpha)} + \frac{\beta}{(1-\alpha)^2}\sum_{i=1}^n \frac{x_i\left(1-\frac{\beta}{1-\alpha}\right)^{x_i-1}}{(1-\beta)^{x_i} - \left(1-\frac{\beta}{1-\alpha}\right)^{x_i}} = 0 \qquad (6)$$

$$\frac{\partial l(\alpha,\beta)}{\partial\beta} = \frac{1}{(1-\alpha)}\sum_{i=1}^n \frac{x_i\left[\left(1-\frac{\beta}{1-\alpha}\right)^{x_i-1} - (1-\alpha)(1-\beta)^{x_i-1}\right]}{(1-\beta)^{x_i} - \left(1-\frac{\beta}{1-\alpha}\right)^{x_i}} = 0$$

به دست می‌آید.

اگر $A_i = \left(1-\frac{\beta}{1-\alpha}\right)^{x_i-1}$ و $B_i = (1-\beta)^{x_i} - \left(1-\frac{\beta}{(1-\alpha)}\right)^{x_i}$ در نظر گرفته شوند، دستگاه معادلات (۶) را می‌توان به صورت

$$\frac{\partial l(\alpha,\beta)}{\partial\alpha} = \frac{n}{\ln(1-\alpha)} + \frac{\beta}{(1-\alpha)}\sum_{i=1}^n \frac{x_i A_i}{B_i} = 0 \qquad (7)$$

$$\frac{\partial l(\alpha,\beta)}{\partial\beta} = \frac{1}{(1-\alpha)}\sum_{i=1}^n \frac{x_i(A_i - (1-\alpha)(1-\beta)^{x_i-1})}{B_i} = 0 \qquad (8)$$

نوشت، همان‌طور که ملاحظه می‌شود، معادلات نرمال توابع غیرصریح از پارامترها است. ازاین‌رو، برای برآورد پارامترها می‌توان از روش‌های عددی استفاده کرد.

۳ برآورد گشتاوری

با توجه به رابطه (۲) گشتاورهای غیر مرکزی مرتبه اول و دوم به ترتیب برابر با

$$E(X^2) = \frac{-2}{\ln(1-\alpha)}\frac{\alpha(1-\alpha-\beta)}{\beta^2} \quad , \quad E(X) = \frac{-1}{\ln(1-\alpha)}\frac{1}{\beta}$$

هستند. با در نظر گرفتن یک نمونه تصادفی از توزیع سری لگاریتمی مارکوف، و برابر قرار دادن گشتاورهای نمونه‌ای غیر مرکزی مرتبه اول و دوم با گشتاورهای غیر مرکزی مرتبه اول و دوم جامعه می‌توان نوشت:

$$\frac{-2}{\ln(1-\alpha)}\frac{\alpha(1-\alpha-\beta)}{\beta^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2 = \bar{X}^2 \quad , \qquad (9)$$

$$\frac{-1}{\ln(1-\alpha)}\frac{1}{\beta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i = \bar{X} \quad , \qquad (10)$$

با توجه به روابط (۹) و (۱۰) برآوردگرهای گشتاوری به ترتیب برابرند با:

$$\hat{\beta} = \frac{-1}{\ln(1-\hat{\alpha})}\frac{1}{\bar{X}} \quad , \quad \hat{\alpha}_i = \hat{\alpha}_{i-1} - \frac{g(\hat{\alpha}_{i-1})}{g'(\hat{\alpha}_{i-1})} \quad ,$$

به طوری که

$$g(\alpha) = 2\bar{X}^2\alpha(1-\alpha)\ln(1-\alpha) + 2\alpha\bar{X} + X^2$$
$$g'(\alpha) = 2\bar{X}^2(1-\alpha)\ln(1-\alpha) - 2\bar{X}^2\alpha\ln(1-\alpha) - 2\alpha\bar{X}^2 + 2\bar{X}.$$

۴ برآورد بیزی

در برآورد بیزی، یکی از مباحث مهم انتخاب توزیع پیشین مناسب است. با توجه به پارامترهای توزیع سری لگاریتمی مارکوف، برای β ثابت، توزیع پیشین α به صورت

$$\pi(\alpha) = \frac{\alpha^{s-1}(1-\alpha)^{t-1}}{\int_0^{1-\beta} \alpha^{s-1}(1-\alpha)^{t-1}d\alpha}\ ,\ 0<\alpha<1-\beta \tag{11}$$

در نظر گرفته می‌شود. در این صورت، با توجه به (۴)، توزیع پسین برابر است با:

$$\pi(\alpha|x) = \frac{(-\ln(1-\alpha))^{-n}\prod_{i=1}^{n}\frac{B_i}{x_i}\alpha^{s-1}(1-\alpha)^{t-1}}{\int_0^{1-\beta}(-\ln(1-\alpha))^{-n}\prod_{i=1}^{n}\frac{B_i}{x_i}\alpha^{s-1}(1-\alpha)^{t-1}d\alpha} \tag{12}$$

اما B_i را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} B_i &= (1-\beta)^{x_i} - \left(1-\frac{\beta}{1-\alpha}\right)^{x_i} \\ &= \sum_{j=1}^{x_i}\binom{x_i}{j}(-1)^j\beta^j - \sum_{j=1}^{x_i}\binom{x_i}{j}(-1)^j\beta^j(1-\alpha)^{-j} \\ &= \sum_{j=1}^{x_i}\binom{x_i}{j}(-1)^j\beta^j(1-(1-\alpha)^{-j}) \end{aligned}$$

از طرفی با توجه به مقاله کاستلارس و لمونته [۲]، می‌توان بسط

$$(-\ln(1-\alpha))^{-n} = \sum_{m_0}^{\infty}\rho_m(-n)\alpha^{m-n} \tag{13}$$

را در نظر گرفت، که در آن $\rho_0(-n) = 1$ و $\rho_m(-n) = n\psi_{m-1}(m-n)$، $m \geq 1$، به طوری که $\psi_n(.)$ ضرایب چندجمله‌ای استرلینگ است، و در رابطه

$$\begin{aligned} \psi_{n-1}(w) = \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)!}\Big[H_n^{n-1} &- \frac{w+2}{n+2}H_n^{n-2} \\ &+ \frac{(w+2)(w+3)}{(n+2)(n+3)}H_n^{n-3} - \dots \\ &+ (-1)^{n-1}\frac{(w+2)(w+3)\dots(w+n)}{(n+2)(n+3)\dots(2n)}H_n^0\Big] \end{aligned} \tag{14}$$

صدق می‌کنند. H_n^mها نیز اعداد صحیح مثبت هستند و در رابطه بازگشتی

$$H_{n+1}^m = (2n+1-m)H_n^m + (n-m+1)H_n^{m-1} \tag{15}$$

$$H_0^0 = H_{n+1}^n = 1 \text{ و } H_{n+1}^0 = 1\times 3\times 5\times\dots\times(2n+1) \tag{16}$$

صدق می‌کنند. با توجه به رابطه (۱۳)، جملات اول تا ششم $\psi_n(.)$ برابر است با:

$$\psi_0(w) = \frac{1}{2}\ ,\ \psi_1(w) = \frac{2+3w}{24}\ ,\ \psi_2(w) = \frac{w+w^2}{48} \tag{17}$$

$$\psi_3(w) = \frac{-8-10w+15w^2+15w^3}{5760} \tag{18}$$

$$\psi_4(w) = \frac{-6w-7w^2+2w^3+3w^4}{11520} \tag{19}$$

$$\psi_5(w) = \frac{96+140w-224w^2-31w^3+63w^5}{2903040} \tag{20}$$

با توجه به توزیع پسین (۱۲) و رابطهٔ (۳)، می‌توان نشان داد که برآورد بیزی α تحت تابع زیان توان دوم خطا، عبارت است از:

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_B &= E(\alpha|x) \\ &= \frac{\int_0^{1-\beta}(-\ln(1-\alpha))^{-n}\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{B_i}{x_i}\right)\alpha^{s}(1-\alpha)^{t-1}d\alpha}{\int_0^{1-\beta}(-\ln(1-\alpha))^{-n}\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{B_i}{x_i}\right)\alpha^{s-1}(1-\alpha)^{t-1}d\alpha} \end{aligned} \tag{21}$$

با استفاده از رابطه (۲۱) برآورد α_B برابر با

$$\hat{\alpha}_B = \frac{\sum_{m=0}^{\infty}\rho_m(-m)\int_0^{1-\beta}T(\alpha)\alpha^{s+m-n}(1-\alpha)^{t-1}d\alpha}{\sum_{m=0}^{\infty}\rho_m(-m)\int_0^{1-\beta}T(\alpha)\alpha^{s+m-n-1}(1-\alpha)^{t-1}d\alpha} \tag{22}$$

است، که در آن $T(\alpha) = \prod_{i=1}^{n}\frac{\sum_{j=1}^{x_i}\binom{x_i}{j}(-1)^j\beta^j(1-(1-\alpha)^{-j})}{x_i}$. ازآنجایی که برآوردگر بیزی نمایش بسته ندارد، برآورد آن به روش عددی امکان‌پذیر است. حال برای α ثابت، توزیع پیشین برای β به صورت

$$\pi(\beta) = \frac{\beta^{s-1}(1-\beta)^{t-1}}{\int_0^{1-\alpha}\beta^{s-1}(1-\beta)^{t-1}d\beta}\ ,\ 0<\beta<1-\alpha \tag{23}$$

در نظر گرفته می‌شود. با توجه به رابطه (۲۳)، توزیع پسین برابر است با:

$$\pi(\beta|x) = \frac{\prod_{i=1}^{n}\frac{B_i}{x_i}\beta^{s-1}(1-\beta)^{t-1}}{\int_0^{1-\alpha}\prod_{i=1}^{n}\frac{B_i}{x_i}\beta^{s-1}(1-\beta)^{t-1}d\beta} \tag{24}$$

تحت تابع زیان توان دوم خطا و رابطه (۱۳)، برآورد بیزی β عبارت است از:

$$\hat{\beta}_B = E(\beta|x) = \frac{\int_0^{1-\alpha} T(\alpha)\beta^s(1-\beta)^{t-1}d\beta}{\int_0^{1-\alpha} T(\alpha)_{i=1}^n \beta^{s-1}(1-\beta)^{t-1}d\beta} \qquad (25)$$

ازآنجایی‌که برآوردگر بیز نمایش بسته ندارد، برآورد آن به روش عددی امکان‌پذیر است.

۵ برآورد E–بیزی

در مفهوم روش سلسله مراتبی، برای متغیر تصادفی X به شرط θ توزیعی در نظر می‌گیریم که در آن θ دارای تابع چگالی احتمال یا توزیع پیشین است. علاوه بر این پارامترهای توزیع پیشین که از آن‌ها به عنوان ابر پارامترها یاد می‌کنند نیز به صورت متغیر تصادفی در نظر گرفته می‌شوند، که این امر باعث اضافه شدن مرحله دیگری به مسئله برآورد می‌شود. که این مفهوم دیدگاه سلسله مراتبی در استنباط بیزی است. در واقع نوع خاص از بحث سلسله مراتبی که در قابلیت اعتماد و پایایی سیستم کاربرد دارد، توسط هان [۳] معرفی شد. در این دیدگاه توزیع‌های پیشین طوری در نظر گرفته می‌شوند که تابعی نزولی از پارامترها باشند. با اعمال شرایط اقدام به معرفی تابع چگالی احتمال برای ابر پارامترها گردد. دلیل نزولی بودن تابع چگالی احتمال توزیع پیشین بر حسب ابرپارامترها این است که در مباحث قابلیت اعتماد هر اندازه احتمال شکست و نرخ شکست کم باشد، سیستم پایدار و قابل‌اعتماد است. با این مقدمه در توزیع‌های سلسله مراتبی، برآوردگرهایی موسوم به برآوردگر بیزی مورد انتظار یا E– بیزی است.

در بخش ۴ با فرض ثابت بودن ابرپارامترهای t و s، برای پارامترهای α و β توزیع‌های پیشین در نظر گرفته شد. حال فرض کنید یک یا هر دو ابرپارامتر متغیر تصادفی و دارای توزیع احتمال باشند. در این صورت با استفاده از بحث بیزی سلسله مراتبی می‌توان پارامترها را برآورد کرد. بیزی سلسله مراتبی، ابتدا توسط لیندلی و اسمیت [۱۲] و سپس هان [۳] موردتوجه قرارگرفته است. پیشنهاد هان و دینگ [۹]، معرفی توزیع پیشین سلسله مراتبی به صورت تابعی نزولی از ابر پارامترها است. هان [۴] از برآورد بیزی پارامتر، نسبت به توزیع ابر پارامترها امید ریاضی گرفت و آن را برآورد بیزی مورد انتظار یا E–بیز نامید و نشان داد که به دست آوردن برآوردگرها با این شیوه راحت‌تر از روش سلسله مراتبی است. با توجه به اینکه کدام‌یک از پارامترها ثابت و کدام‌یک متغیر هستند حالت‌های زیر در نظر گرفته می‌شود:

در حالت نخست، فرض کنید β مقدار ثابت و α دارای تابع چگالی پیشین بتای ناقص به صورت

$$\pi(\alpha) = \frac{\alpha^{s-1}(1-\alpha)^{t-1}}{\int_0^{1-\beta} \alpha^{s-1}(1-\alpha)^{t-1}d\alpha} \ , \ 0 < \alpha < 1-\beta \qquad (26)$$

باشد. پس از مشتق‌گیری از رابطه (۲۶) نسبت به α می‌توان نوشت:

$$\frac{d\pi(\alpha)}{d\alpha} = \frac{\alpha^{s-2}(1-\alpha)^{t-2}}{\int_0^{1-\beta} \alpha^{s-1}(1-\alpha)^{t-1}d\alpha}((s-1)(1-\alpha)-(t-1)\alpha) \qquad (27)$$

واضح است که شرط لازم نزولی بودن تابع $\pi(\alpha)$، منفی بودن کمیت $\frac{d\pi(\alpha)}{d\alpha}$ است. برای تحقق این امر لازم است که $1 < t$ و $0 < s \leq 1$ در نظر گرفته شود. با توجه به مقادیر s و t نیاز است، توزیع پیشین‌های مناسبی برای آن‌ها در نظر گرفت. برگر [۱] اعتقاد دارد که برای رسیدن به برآوردگری نیرومند نیازی به بزرگ اختیار کردن t نیست. بر این اساس، هان و دینگ [۹] برای مقدار ثابت s، توزیع

$$g(t) = \frac{1}{c-1} \ , \ 1 < t < c \ , \ c > 0 \qquad (28)$$

را برای t در نظر گرفت. بر این اساس برآوردگر بیزی سلسله مراتبی پارامتر α به صورت

$$\hat{\alpha}_{EB} = E_t(\hat{\alpha}_B) = \int_1^c \hat{\alpha}_B g(t)dt$$

$$= \frac{1}{c-1}\int_1^c \frac{\sum_{m=0}^{\infty} \rho_m(-m) \int_0^{1-\beta} T(\alpha)\alpha^{s+m-n}(1-\alpha)^{t-1}d\alpha}{\sum_{m=0}^{\infty} \rho_m(-m) \int_0^{1-\beta} T(\alpha)\alpha^{s+m-n-1}(1-\alpha)^{t-1}d\alpha}dt \qquad (29)$$

به دست می‌آید، که در آن $\hat{\alpha}_{EB}$ برآورد بیزی مورد انتظار α است. با توجه به پیچیدگی نمایش تابعی برآوردگر یادشده، محاسبه مقدار عددی این برآوردگر تنها با استفاده از روش‌های عددی شدنی است. برآوردگر سلسله مراتبی برای پارامتر β نیز به صورت مشابه به صورت

$$\hat{\beta}_{EB} = E_t(\hat{\beta}_B) = \int_1^c \hat{\beta}_B g(t)dt \qquad (30)$$

$$= \frac{1}{c-1}\int_1^c \frac{\int_0^{1-\beta} T(\alpha)\beta^s(1-\beta)^{t-1}d\beta}{\int_0^{1-\beta} T(\alpha)\beta^{s-1}(1-\beta)^{t-1}d\alpha}dt$$

به دست می‌آید. در اینجا هم چون رابطه (۳۰) دارای نمایش بسته نیست، روش‌های عددی برای برآورد بیزی مورد انتظار β به کار می‌رود.

۶ شبیه‌سازی

در این بخش برای مقایسه برآوردگرهای مختلفی که در بخش‌های پیشین برای پارامترهای توزیع سری لگاریتمی مارکوف موردبحث قرار گرفت، یک مطالعه شبیه‌سازی اجراشده است. برای این منظور، با استفاده از نرم‌افزار R اقدام به شبیه‌سازی از رابطه (۲) شده است. اندازه نمونه برابر با $n =$ ۵,۱۵,۳۰,۵۰,۱۰۰ در نظر گرفته‌شده است. برای دقت برآوردگرها هر اندازه نمونه، ۱۰۰۰ تکرار شده است. با توجه به نتایج شبیه‌سازی، میانگین توان دوم خطا برای همه روش‌های ماکسیمم درستنمایی، گشتاوری، بیزی و E–بیزی با افزایش اندازه نمونه کاهش می‌یابد. علاوه بر آن در تمام جداول ۱ تا ۹ روش بیزی و علی‌الخصوص روش E–بیزی در مقایسه با سایر روش‌های برآورد دارای میانگین توان دوم خطای کمتری هستند. همچنین قابل‌ذکر است در جداول ۱ تا ۳ برای $\alpha =$ ۰٫۲ با افزایش مقدار β، میانگین توان دوم خطا نیز افزایش می‌یابد. این حالت برای $\beta =$ ۰٫۳ با افزایش مقدار α نیز قابل‌رؤیت است. در جمع‌بندی با مقایسه میانگین‌های توان دوم خطای برآوردگرها، برآوردگر به روش E–بیزی توصیه می‌شود.

جدول ۱. میانگین توان دوم خطا ($\alpha =$ ۰٫۲ , $\beta =$ ۰٫۱)

اندازه نمونه	برآوردگر				
n	ماکسیمم درستنمایی	گشتاوری	بیزی	E– بیزی ($c =$ ۲)	E– بیزی ($c =$ ۵)
۵	۰٫۰۰۳۸۰	۰٫۰۰۰۳۸	۰٫۰۰۰۳۵	۰٫۰۰۰۴۱	۰٫۰۰۰۲۸
۱۵	۰٫۰۰۰۶۸	۰٫۰۰۰۶۷	۰٫۰۰۰۶۲	۰٫۰۰۰۷۱	۰٫۰۰۰۴۹
۳۰	۰٫۰۰۰۲۹	۰٫۰۰۰۲۸	۰٫۰۰۰۳۱	۰٫۰۰۰۲۱	۰٫۰۰۰۱۲
۵۰	۰٫۰۰۰۱۷	۰٫۰۰۰۱۷	۰٫۰۰۰۱۶	۰٫۰۰۰۱۵	۰٫۰۰۰۱۰
۱۰۰	۰٫۰۰۰۱۱	۰٫۰۰۰۱۰	۰٫۰۰۰۱۲	۰٫۰۰۰۱۰	۰٫۰۰۰۰۹

جدول ۲. میانگین توان دوم خطا ($\alpha =$ ۰٫۲ , $\beta =$ ۰٫۳)

اندازه نمونه	برآوردگر				
n	ماکسیمم درستنمایی	گشتاوری	بیزی	E– بیزی ($c =$ ۲)	E– بیزی ($c =$ ۵)
۵	۰٫۰۱۳۲	۰٫۰۱۳۴۰	۰٫۰۱۲۹	۰٫۰۱۲۴	۰٫۰۱۲۷
۱۵	۰٫۰۰۳۵	۰٫۰۰۳۵۱	۰٫۰۰۳۴	۰٫۰۰۳۲	۰٫۰۰۲۵
۳۰	۰٫۰۰۲۵	۰٫۰۰۲۵۵	۰٫۰۰۲۴	۰٫۰۰۲۲	۰٫۰۰۱۹
۵۰	۰٫۰۰۰۸	۰٫۰۰۰۸۰	۰٫۰۰۰۷	۰٫۰۰۰۷	۰٫۰۰۰۶
۱۰۰	۰٫۰۰۰۶	۰٫۰۰۰۶۰	۰٫۰۰۰۶	۰٫۰۰۰۵	۰٫۰۰۰۴

جدول ۳. میانگین توان دوم خطا ($\alpha =$ ۰٫۲ , $\beta =$ ۰٫۵)

اندازه نمونه	برآوردگر				
n	ماکسیمم درستنمایی	گشتاوری	بیزی	E– بیزی ($c =$ ۲)	E– بیزی ($c =$ ۵)
۵	۰٫۰۲۹۲	۰٫۰۲۵۰	۰٫۰۲۵۱	۰٫۰۱۹۶	۰٫۰۱۲۵
۱۵	۰٫۰۰۹۳	۰٫۰۰۹۴	۰٫۰۰۹۲	۰٫۰۰۹۰	۰٫۰۰۷۵
۳۰	۰٫۰۰۲۹	۰٫۰۰۲۹	۰٫۰۰۲۸	۰٫۰۰۲۵	۰٫۰۰۱۶
۵۰	۰٫۰۰۲۲	۰٫۰۰۲۳	۰٫۰۰۲۱	۰٫۰۰۱۸	۰٫۰۰۱۲
۱۰۰	۰٫۰۰۱۴	۰٫۰۰۱۳	۰٫۰۰۱۰	۰٫۰۰۰۹	۰٫۰۰۰۹

جدول ۴. میانگین توان دوم خطا ($\alpha =$ ۰/۳ , $\beta =$ ۰/۱)

اندازه نمونه	برآوردگر				
n	$E-$ بیزی ($c =$ ۵)	$E-$ بیزی ($c =$ ۲)	بیزی	گشتاوری	ماکسیمم درستنمایی
۵	۰/۰۰۲۹۵	۰/۰۰۳۰۱	۰/۰۰۳۰۸	۰/۰۰۳۱۸۰	۰/۰۰۳۱۴۰
۱۵	۰/۰۰۰۰۸	۰/۰۰۰۰۹	۰/۰۰۰۰۹	۰/۰۰۰۰۹۵	۰/۰۰۰۰۹۴
۳۰	۰/۰۰۰۰۲	۰/۰۰۰۰۲	۰/۰۰۰۰۳	۰/۰۰۰۰۲۸	۰/۰۰۰۰۲۹
۵۰	۰/۰۰۰۰۱	۰/۰۰۰۰۲	۰/۰۰۰۰۲	۰/۰۰۰۰۱۸	۰/۰۰۰۰۱۷
۱۰۰	۰/۰۰۰۰۱	۰/۰۰۰۰۱	۰/۰۰۰۰۱	۰/۰۰۰۰۰۷	۰/۰۰۰۰۰۷

جدول ۵. میانگین توان دوم خطا ($\alpha =$ ۰/۳ , $\beta =$ ۰/۳)

اندازه نمونه	برآوردگر				
n	$E-$ بیزی ($c =$ ۵)	$E-$ بیزی ($c =$ ۲)	بیزی	گشتاوری	ماکسیمم درستنمایی
۵	۰/۰۱۵۲	۰/۰۱۸۹	۰/۰۱۹۸	۰/۰۱۹۹	۰/۰۲۳۷
۱۵	۰/۰۰۲۱	۰/۰۰۳۹	۰/۰۰۴۵	۰/۰۰۴۲	۰/۰۰۴۱
۳۰	۰/۰۰۱۶	۰/۰۰۲۴	۰/۰۰۲۶	۰/۰۰۲۲	۰/۰۰۲۱
۵۰	۰/۰۰۰۷	۰/۰۰۰۸	۰/۰۰۰۹	۰/۰۰۱۰	۰/۰۰۱۰
۱۰۰	۰/۰۰۰۴	۰/۰۰۰۶	۰/۰۰۰۶	۰/۰۰۰۷	۰/۰۰۰۷

جدول ۶. میانگین توان دوم خطا ($\alpha =$ ۰/۳ , $\beta =$ ۰/۵)

اندازه نمونه	برآوردگر				
n	$E-$ بیزی ($c =$ ۵)	$E-$ بیزی ($c =$ ۲)	بیزی	گشتاوری	ماکسیمم درستنمایی
۵	۰/۰۱۳۲	۰/۰۱۷۵	۰/۰۱۸۰	۰/۰۱۶۸	۰/۰۱۸۳
۱۵	۰/۰۰۴۰	۰/۰۰۵۹	۰/۰۰۶۹	۰/۰۰۷۳	۰/۰۰۷۱
۳۰	۰/۰۰۲۵	۰/۰۰۳۸	۰/۰۰۳۹	۰/۰۰۴۳	۰/۰۰۴۲
۵۰	۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۰۲	۰/۰۰۰۲	۰/۰۰۰۲	۰/۰۰۰۲
۱۰۰	۰/۰۰۰۳	۰/۰۰۰۶	۰/۰۰۰۷	۰/۰۰۰۸	۰/۰۰۰۸

جدول ۷. میانگین توان دوم خطا ($\alpha = ۰٫۴$, $\beta = ۰٫۱$)

اندازه نمونه	برآوردگر				
n	ماکسیمم درستنمایی	گشتاوری	بیزی	E-بیزی ($c = ۲$)	E-بیزی ($c = ۵$)
۵	۰٫۰۰۴۸۰	۰٫۰۰۴۹۰	۰٫۰۰۴۵۰	۰٫۰۰۳۸۰	۰٫۰۰۲۸
۱۵	۰٫۰۰۰۷۲	۰٫۰۰۰۷۳	۰٫۰۰۰۷۱	۰٫۰۰۰۶۹	۰٫۰۰۰۶
۳۰	۰٫۰۰۰۳۵	۰٫۰۰۰۳۶	۰٫۰۰۰۳۱	۰٫۰۰۰۳۰	۰٫۰۰۰۲
۵۰	۰٫۰۰۰۱۶	۰٫۰۰۰۱۵	۰٫۰۰۰۱۷	۰٫۰۰۰۱۲	۰٫۰۰۰۱
۱۰۰	۰٫۰۰۰۱۱	۰٫۰۰۰۱۰	۰٫۰۰۰۱۱	۰٫۰۰۰۱۰	۰٫۰۰۰۱

جدول ۸. میانگین توان دوم خطا ($\alpha = ۰٫۴$, $\beta = ۰٫۳$)

اندازه نمونه	برآوردگر				
n	ماکسیمم درستنمایی	گشتاوری	بیزی	E-بیزی ($c = ۲$)	E-بیزی ($c = ۵$)
۵	۰٫۰۲۳۱۰	۰٫۰۱۹۵۰	۰٫۰۲۲۵۰	۰٫۰۲۳۵۰	۰٫۰۰۲۸
۱۵	۰٫۰۰۴۷۰	۰٫۰۰۴۹۰	۰٫۰۰۴۱۰	۰٫۰۰۴۱۰	۰٫۰۰۳۱
۳۰	۰٫۰۰۲۴۰	۰٫۰۰۲۵۰	۰٫۰۰۰۳۱	۰٫۰۰۰۲۹	۰٫۰۰۰۲
۵۰	۰٫۰۰۰۷۰	۰٫۰۰۰۸۰	۰٫۰۰۰۷۰	۰٫۰۰۰۶۰	۰٫۰۰۰۳
۱۰۰	۰٫۰۰۰۵۷	۰٫۰۰۰۵۶	۰٫۰۰۰۱۱	۰٫۰۰۰۱۰	۰٫۰۰۰۱

جدول ۹. میانگین توان دوم خطا ($\alpha = ۰٫۴$, $\beta = ۰٫۵$)

اندازه نمونه	برآوردگر				
n	ماکسیمم درستنمایی	گشتاوری	بیزی	E-بیزی ($c = ۲$)	E-بیزی ($c = ۵$)
۵	۰٫۰۵۷۹	۰٫۰۱۸۰	۰٫۰۳۴۰	۰٫۰۳۱۰	۰٫۰۲۱۴
۱۵	۰٫۰۰۵۹	۰٫۰۰۶۶	۰٫۰۰۵۱	۰٫۰۰۵۰	۰٫۰۰۳۱
۳۰	۰٫۰۰۳۵	۰٫۰۰۳۸	۰٫۰۰۳۳	۰٫۰۰۳۱	۰٫۰۰۲۱
۵۰	۰٫۰۰۲۰	۰٫۰۰۲۱	۰٫۰۰۲۲	۰٫۰۰۱۹	۰٫۰۰۱۱
۱۰۰	۰٫۰۰۰۹	۰٫۰۰۱۰	۰٫۰۰۱۱	۰٫۰۰۰۹	۰٫۰۰۰۷

مراجع

[1] Berger, J. O. (1985). *Statistical decision theory and Bayesian analysis, (second Ed.)*, New York, Springer-verlag.

[2] Castellares, F. C. and A. J. Lemonte, A. J. (2015). A new generalized Weibull distribution generated by gamma random variables, *Journal of the Egyptian Mathematical Society*, **23** (2), 382-392.

[3] Han, M. (1997). The structure of hierarchical prior distribution and its application, *Chinese Operations research and management science*, **6**(3), 31-40.

[4] Han, M. (2005). Expected Bayes method for forecast of security investment, *Research and management science*, **14**(5), 98-102.

[5] Han, M. (2006). E-Bayesian estimation and hierarchical Bayesian estimation of Estate probability, *Operations research and management science*, **15**(5), 70-74.

[6] Han, M. (2007). E-Bayesian estimation of failure probability and its application, *Mathematical and computer modeling*, **45**, 1272-1279.

[7] Han, M. (2009). E-Bayesian estimation and hierarchical Bayesian estimation of rate, *Applied mathematical modeling*, **33**, 1915-1922.

[8] Han, M. (2011). E-Bayesian estimation of the reliability derived from binomial distribution, *Applied mathematical modeling*, **35**, 2419-2424.

[9] Han, M. and Ding, Y. (2004). Synthesized expected Bayesian method of parametric estimate, *Journal of systems science and systems engineering*, **13**(1), 98-111.

[10] Jaheen, Z. F and Okasha, H. M. (2011). E-Bayesian estimation for Burr type XII model based on type-2 censoring, *Applied mathematical modeling*, **35**, 4730-4737.

[11] Li, D., Wang, J. and Chen, D. (2012). E-Bayesian estimation and hierarchical Bayesian estimation for Estate probability in engineering, *System engineering*, **5**, 349-354.

[12] Lindley, D.V and Smit, A.F. M. (1972). Bayes estimates for the linear model, *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, **34**(1), 1-41.

[13] Nasiri, P. (1997). Generalizations of the Logarithmic series distribution under Markov dependence and its application to wet spell analysis, unpublished dissertation in university of Pune.

[14] Okasha, H. M. (2014). E-Bayesian estimation for the Lomax distribution based on type-II censored data, *Journal of the Egyptian Mathematical Society*, **22**, 489-495.