خانواده توزیع‌های سری توانی پارامتر آماسیده

محمد حسین علامت ساز[۱] ، فرشته مومنی [۲]

چکیده:

در مقاله مومنی و علامت ساز [۱] توزیع‌های دوجمله‌ای منفی و پوآسون پارامتر آماسیده[۳] به عنوان تعمیمی از توزیع‌های کلاسیک متناظر بررسی شدند. این توزیع‌ها در واقع دو عضو خانواده توزیع‌های سری توانی پارامتر آماسیده هستند که در مدلبندی داده‌های شمارشی همبسته بویژه در اقتصادسنجی، بیمه و دارایی کاربرد وسیعی دارند و توسط مینکووا [٦] بررسی شده‌اند.

در مقاله حاضر، توزیع‌های مهم باقیمانده از این خانواده مانند برنولی، دوجمله‌ای و سری لگاریتمی را مورد بررسی قرارداده و توابع جرم احتمال، توابع مولد احتمال و صورت کلی و متحد توزیع‌های این خانواده را ارائه خواهیم داد. در پایان با گروهی داده واقعی مربوط به تعداد خسارات بیمه کاربرد آنها را ارائه خواهیم داد.

واژه‌های کلیدی: خانواده توزیع‌های سری توانی، توزیع‌های پارامتر آماسیده، توزیع‌های مرکب.

۱ مقدمه

توزیع‌های گسسته برنولی، دوجمله‌ای، هندسی، دوجمله‌ای منفی، پوآسون و سری لگاریتمی که کاربرد وسیعی در داده‌های شمارشی دارند متعلق به خانواده توزیع‌های سری توانی (تعمیم یافته) هستند. توابع مولد احتمال این توزیع‌ها دارای صورت کلی زیر می‌باشد:

$$P(z) = \frac{h(\theta z)}{h(\theta)} \quad ,\theta > 0 \qquad (۱)$$

که در آن h تابعی متناهی، مثبت و مشتق‌پذیر است. متغیرهای تصادفی متعلق به این خانواده دارای تکیه گاه S از اعداد صحیح و نا منفی با تابع جرم احتمال زیر هستند:

$$p_k = \frac{a(k)\theta^k}{h(\theta)} \quad , \quad h \in S \subseteq N_0 \qquad (۲)$$

که در آن $a(k)$ تابعی نامنفی است به طوری که

$$h(\theta) = \sum_{k\varepsilon S} a(k)\theta^k$$

در ده سال اخیر پیشرفت قابل توجهی در زمینه گسترش توزیع‌های گسسته کلاسیک، بویژه توزیع‌های سری توانی، صورت گرفته است. از آن جمله خانواده توزیع‌های

[۱] گروه آمار دانشگاه اصفهان
[۲] دانشگاه آزاد بهشهر
[۳] Inflated

سری توانی پارامتر آماسیده است که شامل یک پارامتر اضافی ρ می‌باشد. دلیل این توجه، البته، ضرورت حضور چنین توزیع‌هایی در عمل و بویژه در داده‌های وابسته در زمینه‌های مختلف اقتصادسنجی، دارایی، بیمه، زیست شناسی و غیره و همچنین انعطاف پذیری بیشتر این توزیع‌ها می‌باشد. باورز و همکاران [۳]، رولسکی و همکاران [۸]، وینکلمن [۹]، کلا و همکاران [۵] و بویژه مینکووا ([٦] و [۷]) از جمله نویسندگانی هستند که به این مهم پرداخته‌اند. اخیراً مومنی و علامت‌ساز[۱] به توزیع‌های هندسی، دوجمله‌ای منفی و پوآسون پارامتر آماسیده توجه کرده‌اند. در ادامه مقاله آخر، مقاله حاضر به معرفی سایر توزیع‌های مهم خانواده سری توانی پارامتر آماسیده، بویژه توزیع‌های برنولی، دوجمله‌ای و سری لگاریتمی، می‌پردازد. در این مقاله توابع جرم احتمال و مولد احتمال آنها را به دست خواهیم آورد. سپس صورت کلی این توابع را برای این خانواده تعیین می‌کنیم و به برخی ساختارهای مشابه آنها با خانواده کلاسیک متناظر اشاره خواهیم کرد. در پایان، با مثالی از داده‌های واقعی، کاربرد توزیع‌های تعمیم یافته مذکور را نمایش خواهیم داد.

۲ توزیع های برنولی و دوجمله‌ای پارامتر آماسیده

در مومنی و علامت‌ساز [۱] توزیع‌های هندسی، دوجمله‌ای منفی و پوآسون با استفاده از توزیع‌های صفر آماسیده بررسی شده‌اند. در اینجا مشابه با حالت کلاسیک، توزیع‌های دوجمله‌ای را با استفاده از توزیع‌های برنولی پارامتر آماسیده تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱. متغیر تصادفی گسسته X یا توزیع آن را برنولی پارامتر آماسیده گوییم هرگاه

$$\begin{aligned} P(X=0) &= 1-\pi \\ P(X=k) &= \pi\rho^{k-1}(1-\rho), k=1,2,.. \quad (3) \end{aligned}$$

که در آن $\pi \in (0,1)$ و $\rho \in (0,1)$ پارامترهای ثابت آن می‌باشند. این توزیع را با نماد $\mathrm{IBe}(\pi,\rho)$[۴] نشان می‌دهیم.

به سهولت می‌توان دید که اگر $X \sim IBe(\pi,\rho)$، داریم

$$\begin{aligned} P_X(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} z^k P(X=k) \\ &= 1-\frac{\pi(1-z)}{1-\rho z} \quad ,|z|<1/\rho \quad (4) \end{aligned}$$

و در نتیجه

$$E(X)=\frac{\pi}{(1-\rho)} \;\;,\;\; Var(X)=\frac{\pi(1-\pi+\rho)}{(1-\rho)^2}$$

حال متغیر دوجمله‌ای پارامتر آماسیده را با تکرار مستقل مشاهدات برنولی پارامتر آماسیده به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

تعریف ۲. هرگاه متغیر تصادفی گسسته X برابر مجموع n متغیر تصادفی مستقل و همتوزیع $\mathrm{IBe}\,(\pi,\rho)$ باشد، X یا توزیع آن را دو جمله‌ای پارامتر آماسیده گوییم و بانماد $Ibin(n,\pi,\rho)$ نشان می‌دهیم.

پس اگر $X \sim Ibin(n,\pi,\rho)$، داریم

$$P_X(z)=[1-\frac{\pi(1-z)}{1-\rho z}]^n \quad ,|z|<1/\rho \qquad (5)$$

[۴] Inflated- parameter Bernulli distribution

و در نتیجه

$$E(X)=\frac{n\pi}{1-\rho}$$

و

$$Var(X)=\frac{n\pi(1-\pi+\rho)}{(1-\rho)^2}$$

قضیه ۱. تابع جرم احتمال متغیر تصادفی X با توزیع $Ibin(n,\pi,\rho)$ عبارت است

$$\begin{aligned} P(X=k) &= (1-\pi)^n \sum_{k_1,k_2,..} \binom{n}{k_1,k_2,\dots,n-k_1-k_2-\dots} \\ &\times \rho^k\Big[\frac{\pi(1-\rho)}{(1-\pi)\rho}\Big]^{k_1+k_2+\cdots} \qquad (6) \end{aligned}$$

که در آن $k=0,1,2,...$ و جمع‌بندی روی تمام اعداد صحیح و نامفنی k_1 و k_2 و ... است به طوری که $k_1+2k_2+3k_3+\cdots=k$

اثبات: با استفاده از تابع مولد احتمال (۵) می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} P_X(z) &= [1-\tfrac{\pi(1-z)}{1-\rho z}]^n \\ &= (1-\pi)^n \textstyle\sum_{i=0}^n \binom{n}{i}[\frac{\pi(1-\rho)z}{(1-\pi)(1-\pi z)}]^i \\ &= (1-\pi)^n \textstyle\sum_{i=0}^n \binom{n}{i}[\frac{\pi(1-p)}{\rho(1-\pi)}(\rho z+\rho^2z^2+\cdots)]^i \\ &= (1-\pi)^n \textstyle\sum_{i=0}^n \binom{n}{i}\sum_{i_1,i_2,\dots}\binom{i}{i_1,i_2,\dots}\times \\ &\quad [\tfrac{\pi(1-\rho)}{\rho(1-\pi)}]^i(\rho z)^{i_1+2i_2+\cdots} \end{aligned}$$

که در آن، در مجموع آخر، جمع‌بندی روی تمام اعداد صحیح و نامنفی $i_1, i_2, ...$ انجام می‌شود به طوری که $i_1+i_2+\cdots=i$.

پس با جایگذاری $k_j=i_j\ (j\geq 1)$ و $i=k-\sum_{j=1}^{\infty}(j-1)i_j$، رابطه آخری به صورت زیر در می آید.

$$P_X(z)=\sum_{k=0}^{\infty} z^k P(X=k)$$

که در آن $P(X=k)$ همان عبارت مطلوب (۶) می‌باشد.

تذکر ۱. ملاحظه می‌کنیم که برخلاف حالت کلاسیک، تکیه گاه‌های توزیع‌های برنولی و دوجمله‌ای پارامتر آماسیده متناهی نیستند. بلکه آنها دارای تکیه‌گاه به طور نامتناهی شمارای $S=\{0,1,2,...\}$ هستند.

تذکر ۲. مشابه حالت کلاسیک، هرگاه

$$n\longrightarrow\infty \quad , \quad \pi\longrightarrow 0 \Longrightarrow n\pi=\lambda$$

که در آن $\lambda>0$ ثابت است، آنگاه (۵) نتیجه می‌دهد که Y متغیر حدی متغیر دوجمله‌ای پارامتر آماسیده X دارای تابع مولد احتمال زیر خواهد بود که در واقع توزیع پوآسون پارامتر آماسیده را تعریف می‌کند.

$$\begin{aligned} P_Y(z) &= \lim_{\substack{n\to\infty \\ \pi\to 0}} P_X(z) \\ &= \lim_{n\longrightarrow\infty}[1-\frac{\pi(1-z)}{1-\rho z}] \\ &= \exp\{\frac{\lambda(z-1)}{1-\rho z}\} \qquad (7) \end{aligned}$$

از (۷) می توان تابع جرم احتمال توزیع پوآسون پارامتر آماسیده فوق را که با نماد $IPo(\lambda,\rho)$ نشان داده می‌شود به صورت زیر به دست آورد.

$$\begin{aligned} P(Y=k) &= \sum_{k_1,k_2,\dots}\frac{e^{-\lambda}}{k_1!k_2!\dots} \\ &\times[\lambda(1-\rho)]^{k_1+k_2+\cdots}\rho^{k_2+2k_3+\cdots};\ k=0,1,2,... \end{aligned}$$

که در آن جمع‌بندی روی تمام اعداد صحیح و نامنفی $k_1, k_2, ...$ به طوری که $k_2+2k_3+\cdots=k$ انجام می‌پذیرد (قضیه ۴ در [۱] را ملاحظه می‌کنید.) همچنین از (۷) داریم

$$E(Z)=\frac{\lambda}{1-\rho} \quad , \quad Var(Z)=\frac{\lambda(1+\rho)}{(1-\rho)^2}$$

۳ توزیع سری لگاریتمی پارامتر آماسیده

ابتدا خاطرنشان می‌کنیم که یک متغیر تصادفی دوجمله‌ای منفی پارامتر آماسیده Y به صورت مجموع r متغیر تصادفی مستقل هم‌توزیع هندسی پارامتر آماسیده تعریف می‌شود و با نماد $Inb(r,\pi,\rho)$ نشان داده می‌شود[۱]. تابع مولد احتمال این توزیع عبارت است از

$$P_Y(z)=[\frac{\pi(1-\rho z)}{1-z(1-\pi+\rho\pi)}]^r \qquad (8)$$

حال اگر $Y\sim Inb(r,\pi,\rho)$ ، از (۸) می‌توان یافت که $P(Y=0)=\pi^r$ و در نتیجه $P(Y>0)=1-\pi^r$. پس اگر متغیر تصادفی Y_1 با توزیع $Inb(r,\pi,\rho)$ بریده شده در صفر را در نظربگیریم، تابع جرم احتمال آن با رابطه زیر تعیین می‌شود.

$$P(Y_1=y_1)=\frac{P(Y=y_1)}{1-\pi^r}, \qquad y_1\; 1,2,...$$

در نتیجه تابع مولد احتمال متناظر به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} P_{Y_1}(z) &= \frac{1}{1-\pi^r}[\frac{\pi^r(1-z\rho)^r}{1-z(1-\pi+\rho\pi)}-\pi^r] \\ &= \frac{\pi^r}{1-\pi^r}[\frac{(1-t\rho)^r-[1-z(1-\pi+\rho\pi)]^r}{[1-z(1-\pi+\rho\pi]^r}] \end{aligned}$$

پس با استفاده از قاعده هوپیتال داریم:

$$\lim_{r\longrightarrow 0} P_{Y_1}(z)=Ln[\frac{1-\rho z}{1-z(1-\pi+\rho\pi)}](-Ln\pi)^{-1}$$

اگر متغیر تصادفی حدی را با L نشان دهیم آنگاه

$$\begin{aligned} P_L(z) &= Ln[1+\frac{(1-\pi)(1-\pi)z}{1-z(1-\pi+\rho\pi)}](-Ln\pi)^{-1} \\ &= Ln[1-\frac{(1-\pi)(1-\rho)z}{1-\rho z}](-Ln\pi)^{-1} \qquad (9) \end{aligned}$$

تعریف ۳. متغیر تصادفی L دارای توزیع سری لگاریتمی پارامتر آماسیده با پارامترهای $\pi\in(0,1)$ و $\rho\in(0,1)$ است هرگاه دارای تابع مولد احتمال $P_L(t)$ در (۹) باشد. آن را با نماد $L\sim ILS(\pi,\rho)$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۲. تابع جرم احتمال متغیر تصادفی L با توزیع $ILS(\pi,\rho)$ عبارت‌است از:

$$\begin{aligned} P(L=k) &= \sum_{k_1,k_2,...}\frac{(-1+k_1+k_2+\cdots)!}{(-Ln\pi)k_1!k_2!...} \\ \times &\quad [(1-\pi)(1-\rho)]^{k_1+k_2+\cdots}\rho^{k_2+2k_3+\cdots} \qquad (10) \end{aligned}$$

که در آن $k=1,2,...$ و مجموع روی اعداد صحیح نامنفی $k_1,k_2,...$ انجام می‌گیرد به طوری که $k_1+2k_2+3k_3+\cdots=k$

اثبات: از (۹) داریم:

$$\begin{aligned} P_L(z) &= Ln[1-(1-\pi)(1-\rho) \\ &\times (1+\rho z+\rho^2z^2+\cdots)](Ln\pi)^{-1} \end{aligned}$$

پس با استفاده از بسط تیلور تابع لگاریتمی $Ln(1-x)$ داریم:

$$\begin{aligned} P_L(z) &= -(Ln\pi)^{-1}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i+1}\sum_{n_1,n_2,...}\binom{i+1}{n_1,n_2,...} \\ &\times [(1-\pi)(1-\rho)]^{n_1+n_2+\cdots} \\ &\times \rho^{n_2+2n_3+\cdots}z^{n_1+2n_2+3n_3+\cdots} \end{aligned}$$

با توجه به اینکه $n_1+n_2+...=i+1$ با جایگذاری $n_1=k_1, i\ge 1$ و $i=k-\sum_{j=1}^{\infty}(j-1)k_j$ به دست می آوریم:

$$\begin{aligned} P_L(z) &= -(Ln\pi)^{-1}\sum_{k=1}^{\infty}z^k\sum_{k_1,k_2,...} \\ &\quad \frac{(-1+k_1+k_2+\cdots)!}{k_1!k_2!...} \\ &\times [(1-\pi)(1-\rho)]^{k_1+k_2+\cdots}\rho^{k_2+2k_3+\cdots} \end{aligned}$$

که همان عبارات (۱۰) را نتیجه می‌دهد.

با توجه به تعریف، قضیه زیر در مورد ارتباط توزیع‌های دوجمله‌ای منفی پارامتر آماسیده و سری لگاریتمی پارامتر آماسیده به دست می‌آید.

قضیه ۳. اگر $Y \sim Inb(\pi, \rho, r)$، آنگاه همگرایی زیر برقراراست:

$$\lim_{r \longrightarrow 0} P(Y = y | Y \geq 1) = P(L = y)$$

که در آن $L \sim ILS(\pi, \rho)$

اثبات: با توجه به اینکه $P(Y \geq 1) = 1 - \pi^2$، داریم:

$$\begin{aligned} P(Y = y | Y \geq 1) &= \frac{P(Y = y, Y \geq 1)}{P(Y \geq 1)} \\ &= \frac{P(Y = y, Y \geq 1)}{1 - \pi^r} \end{aligned}$$

لذا، با استفاده از رابطه (٦) داریم:

$$\begin{aligned} &P(Y = y | Y \geq 1) = \tfrac{\pi^r}{1-\pi^r} \\ &\times \textstyle\sum_{y_1, y_2, \ldots} \binom{y_1 + y_2 + \cdots + r - 1}{y_1, y_2, \ldots, r-1} \\ &\times [(1 - \pi)(1 - \rho)]^{y_1 + y_2 + \cdots} \rho^{y_2 + 2y_3 + \cdots} \\ &= \tfrac{r\pi^r}{1-\pi^r} \textstyle\sum_{y_1, y_2, \ldots} \frac{(y_1 + y_2 + \cdots + r - 1) \ldots (r+2)(r+1)}{y_1! y_2! \ldots} \\ &\times [(1 - \pi)(1 - \rho)]^{y_1 + y_2 + \cdots} \rho^{y_2 + 2y_3 + \cdots} \end{aligned}$$

پس چون بنابر قانون هوپیتال

$$\lim_{r \longrightarrow 0} \frac{r\pi^r}{1 - \pi^r} = -(Ln\pi)^{-1}$$

$\lim_{r \longrightarrow 0} P(Y = Y | Y \geq 1)$ به تابع جرم احتمال $P(L = Y)$ توزیع سری لگاریتمی پارامتر آماسیده (۸) همگراست.

میانگین و واریانس متغیر تصادفی $L \sim ILS(\pi, \rho)$ عبارتند از:

$$E(L) = \frac{-(1 - \pi)}{\pi(1 - \rho) Ln\pi} \qquad (11)$$

$$Var(L) = \frac{-(1 - \pi)[Ln\pi(1 + \pi\rho) + 1 - \pi]}{\pi^2 (1 - \rho)^2 (Ln\pi)^2}$$

۴ صورت کلی و مشترک توزیع‌های خانواده سری توانی پارامتر آماسیده

با تعریف مناسب $h(\theta), \theta$ و $a(k)$ به سادگی می‌توان دید که توابع جرم احتمال خانواده توزیع‌های پارامتر آماسیده دارای صورت مشترک زیرند:

$$\begin{aligned} p_k^* &= \frac{1}{h(\theta)} \sum_{k_1, k_2} a(k) \\ &\times \quad [\theta(1 - \rho)]^{k_1 + k_2} \rho^{k_2 + 2k_3 + \cdots} \qquad (12) \end{aligned}$$

که در آن $k = 0, 1, 2, \ldots$ (به جز در حالت ILS که در آن $k = 1, 2, \ldots$ است) و مجموع روی تمام اعداد صحیح و نامنفی $k_1, k_2, \ldots$ به طوری که $k_1 + 2k_2 + \cdots = k$ (به جز در حالت ILS) که به صورت $k_1 + 2k_2 + \cdots = k + 1$ است) انجام می‌پذیرد.

تابع مولد احتمال مشترک این توزیع‌ها عبارت است از

$$P^*(z) = \frac{h[\theta G(z)]}{h(\theta)} \quad \theta > 0 \qquad (13)$$

که در آن $G(z) = \frac{z(1-\rho)}{1 - z\rho}$ تابع مولد احتمال توزیع هندسی $Ge(1 - \rho)$ است. بدیهی است که در هر دو عبارت (۱۲) و (۱۳) $h(\theta)$ تابعی مثبت، متناهی و مشتق پذیر است.

تذکر ۳. هرگاه در عبارات (۱۲) و (۱۳) $\rho = 0$ قرارداده شود، به ترتیب همان عبارات متناظر خانواده کلاسیک در (۲) و (۱) حاصل می‌شوند(جدول ۲).

تذکر ۴. باید توجه داشت که پارامتر θ و تابع $h(\theta)$ در صورت‌های مشترک دو خانواده توزیع‌های سری توانی کلاسیک و پارامتر آماسیده دقیقاً یکسانند و تنها توابع $a(k)$ آنها متفاوتند. همچنین خاطرنشان می‌کنیم که توزیع‌های پارامتر آماسیده خانواده سری توانی از جهات متعددی شبیه توزیع‌های کلاسیک متناظر عمل می‌کنند. برای نمونه می‌توان دید که هرگاه در $IPo(\lambda,\rho)$ پارامتر λ خود متغیری تصادفی با توزیع $\gamma(r,\beta)$ باشد توزیع آمیخته حاصل $Inb(r,\frac{\beta}{1+\beta},\rho)$ است ([۲] و [۴])

تذکر۵. به سادگی از طریق توابع مولد احتمال (۱) و (۱۳) می‌توان دید که نسبت واریانس به میانگین در توزیع‌های سری توانی پارامتر آماسیده نسبت به حالت کلاسیک متناظر بزرگتر است. به عبارت دیگر، هرگاه $\rho \in (0,1)$ باشد، خانواده جدید دارای پراکنش بیشتری می‌باشند.

۵ کاربرد

دراین بخش گروهی داده مربوط به تعداد ادعاهای خسارت موتوری(صفر، یک، دو،..) براساس ۴۲۱۲۴۰ سند (تعداد عبارتند از بیمه شدگان) را که در جدول ۳ رده بندی شده‌اند در نظر می‌گیریم.

حال توزیع پوآسون کلاسیک $Po(\lambda)$ را بر این داده‌ها برازش می‌دهیم. برای این کار مقدار مجهول پارامتر λ را به روش گشتاوری برآورد می‌کنیم: $\hat{\lambda}=\overline{X}=0/13174$. لذا نتایج جدول ۴ بدست خواهد آمد.

پس چون مقدار مشاهده‌ای آماره χ^2 از هر مقدار جدولی بزرگتر است، فرض پوآسون بودن توزیع داده‌ها قویاً رد می‌شود (مثلاً $\chi^2_{0/005}(5)=16/7496$).

اما برای حالت پوآسون پارامتر آماسیده $IPo(\lambda,\rho)$ برآوردهای گشتاوری پارامترهای λ و ρ عبارتند از:

$$\hat{\lambda}=\frac{2\overline{X}^2}{S^2+\overline{X}}=\frac{2(0/13174)^2}{0/13852+0/13174}=0/12843$$

$$\hat{\rho}=\frac{S^2-\overline{X}}{S^2+\overline{X}}=\frac{0/13852-0/3174}{0/13852+0/13174}=0/0251$$

لذا جدول محاسبات مربوط به برازش توزیع پوآسون پارامتر آماسیده به داده‌های مذکور به صورت جدول (۵) خواهد بود.

با توجه به مقدار مشاهده‌ای آماره $\chi^2=13/6$ و مقایسه آن با $\chi^2_{0/005}(4)=14/8602$، توزیع پوآسون پارامتر آماسیده در سطح معنی دار $\alpha=0/005$ بر داده‌ها برازش دارد.

جدول ۱

نام توزیع	نماد توزیع	p_k	S
برنولی	$Be(\pi)$	$\pi^k(۱-\pi)^{۱-k}$	$k=۰,۱$
دوجمله‌ای	$bin(n,\pi)$	$\binom{n}{k}\pi(۱-\pi)^{n-k}$	$k=۰,۱,..,n$
هندسی	$Ge(\pi)$	$\pi(۱-\pi)^k$	$k=۰,۱,۲,...$
دوجمله‌ای منفی	$nb(r,\pi)$	$\binom{r+k-۱}{k}\pi^r(۱-\pi)^k$	$k=۰,۱,۲,...$
پوآسون	$Po(\lambda)$	$e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$	$k=۰,۱,۲,...$
سری لگاریتمی	$LS(\pi)$	$\pi^k[kLn(۱-\pi)]^{-۱}$	$k=۰,۱,۲,..$
θ	$h(\theta)$	$A(k)$	$P(z)$
$\frac{\pi}{۱-\pi};۰<\pi<۱$	$۱+\theta$	۱	$(۱-\pi)+\pi z$
$\frac{\pi}{۱-\pi}$	$(۱+\theta)^n$	$\binom{n}{k}$	$[(۱-\pi)+\pi z]^n$
$۱-\pi$	$(۱-\theta)^{-۱}$	۱	$\pi[(۱-(۱-\pi)z]^{-۱}$
$۱-\pi$	$(۱-\theta)^{-r}$	$\binom{k+r-l}{k}$	$\pi^r[۱-(۱-\pi)z]^{-r}$
$\lambda;\lambda>۰$	e^θ	$۱/k!$	$e^{\lambda(z-۱)}$
π	$-L_n(۱-\theta)$	$۱/k$	$Ln(۱-\pi z)^{-۱}Ln^{-۱}(۱-\pi)$

جدول ۲

نام توزیع	نماد توزیع	S	θ	$h(\theta)$	$A(k)$
دوجمله‌ای	$Ibin(n,\pi,\rho)$	$۰,۱,۲,...$	$\frac{\pi}{۱-\pi}$	$(۱-\theta)^n$	$\binom{n}{k_۱,k_۲,...,n-\sum k_i}$
دوجمله‌ای منفی	$Inb(r,\pi,\rho)$	$۰,۱,۲,...$	$۱-\pi$	$-Ln(۱-\theta)^r$	$\binom{k+k_۲+...+r-۱}{k_۱,k_۲,...,r-۱}$
پوآسون	$IPo(\lambda,\rho)$	$۰,۱,۲,...$	λ	e^θ	$\frac{۱}{k_۱!k_۲!...}$
سری لگاریتمی	$ILS(\pi,\rho)$	$۱,۲,...$	$۱-\pi$	$-Ln(۱-\theta)$	$\frac{(-۱+k_۱+k_۲+...)}{k_۱!k_۲!...}$

جدول ۳

k: تعداد خسارات درخواستی	۰	۱	۲	۳	۴	۵	≥ ٦
O_k:فراوانی مشاهده شده	۳۷۰۴۱۲	۴٦۵۴۵	۳۹۳۵	۳۱۷	۲۸	۳	۰

جدول ۴

k	O_k	π_k	e_k	$(e_k-O_k)^۲/e_k$
۰	۳۷۰۴۱۲	۰/۸۷۹	۳٦۹۲۴٦/۸۸	۳/٦۷
۱	۴٦۵۴۵	۰/۱۱۵	۴۸٦۴۳/۵۷	۹۰/٦۱
۲	۳۹۳۵	$٦/۷*۱۰^{-۳}$	۳۲۰۴/۰۹	۱٦٦/٦۷
۳	۳۱۷	$۳/۳*۱۰^{-۴}$	۱۴۰/۷	۲۲۰/۹۰
۴	۲۸	$۱۰^{-۵}$	۴/٦۳	۱۱۷/۹٦
۵	۳	$۲/۸*۱۰^{-۷}$	۰/۱۲	٦۹/۱۲
≥ ٦	۰	$۰/۲*۱۰^{-۷}$	۰/۰۱	۰/۰۱
کل	۴۲۱۲۴۰	۱	۴۲۱۲۴۰	$\chi^۲=٦٦۷/۵۲$

جدول ۵

k	O_k	π_k	e_k	$(e_k - O_k)^۲/e_k$
۰	۳۷۰۴۱۲	۰/۸۷۹	۳۷۰۴۶۹/۹۳	۰/۰۰۹
۱	۴۶۵۴۵	۰/۱۱	۴۶۳۸۵/۳	۰/۵۶
۲	۳۹۳۵	$۹/۶ * ۱۰^{-۳}$	۴۰۶۸/۲۱	۴/۳۶
۳	۳۱۷	$۷ * ۱۰^{-۴}$	۲۹۶/۲	۱/۵
۴	۲۸	$۴/۴ * ۱۰^{-۵}$	۱۹/۱۴	۴/۱
۵	۳	$۲/۶ * ۱۰^{-۶}$	۱/۱۳	۳/۱
$\geq$ ۶	۰	$۱/۶ * ۱۰^{-۷}$	۰/۰۷	۰/۰۷
کل	۴۲۱۲۴۰	۱	۴۲۱۲۴۰	$\chi^۲ =$ ۱۳/۶

مراجع

[۱] مومنی، ف. وعلامت ساز، م. ح. ،۱۳۸۴، توزیع‌های دو جمله‌ای منفی و پوآسون پارامتر آماسیده، اندیشه آماری، سال دهم، شماره ۲، ۱۹—۱۴.

[۲] مومنی، ف. ،۱۳۸۲، تعمیم توزیع‌های گسسته کلاسیک، پایان نامه کارشناسی ارشد آمار، دانشگاه اصفهان.

[3] Bowers, N.L., Gerber, H.V., Hickman, J.C, Sones, D.A. and Nesbitt, C.J. ,1979, *Actuarial Mathematics*, 2nded. Schaumburg, III:Society of Actuaries.

[4] Grandal, J.,1997, *Mixed Poisson Processes*, Chapman and Hall, London.

[5] Klove, N., Minkova,L. and Neytchev, P.,2000,Inflated - Parameter Family of Generalized Power Seriesdistributions and their applications in Analysis of Overdispersed Insurance Data. *ARCH, Researeh Clearing House*,2.

[6] Minkova, L.,2002, A Generalization of the Classical Discrete Distributions, *Comm. Statists: Theory and Methods*, 31, 6.

[7] Minkova, L.,2001, A Family of Compound Discrete Distributions. *Compt. Randue Bulg . Acad. Aci*, 54, 2.

[8] Rolski, T., Schmidli, H., Schmidli, V. and Teugels,J., 1999, *Stochastic Processes for Insurance and Finace*, John Wiely and Sons, Chichester.

[9] Winkelmann, R.,2002,*Econometric Analysis of Count Data*, 3rd.ed. Springer Verlag; Berlin.