توزیع نیمه لجستیک [۱]

اکبر اصغرزاده [۲] ، صدیقه رحیم پور [۲]

چکیده:

در این مقاله، ابتدا توزیع نیمه لجستیک معرفی و در ادامه گشتاورها، ضرایب چولگی و کشیدگی این توزیع محاسبه می‌شوند. روش ماکزیمم درستنمایی، جواب صریحی را برای برآورد پارامتر مقیاس این توزیع در اختیار ما قرار نمی‌دهد. با تقریب معادله درستنمایی، یک جواب تقریبی برای MLE ارائه داده و کارایی آنها به کمک شبیه سازی بررسی می‌شود.

واژه‌های کلیدی: توزیع نیمه لجستیک، ضریب چولگی، برآورد MLE، برآورد گشتاوری.

۱ مقدمه

توزیع نیمه لجستیک، یک توزیع مهم و شناخته شده در آزمون طول عمر [۳] و قابلیت اعتماد [۴] می‌باشد. فرض کنید متغیر تصادفی y، زمان شکست یک قطعه، دارای توزیع نیمه لجستیک با تابع چگالی

$$g(y,\mu,\sigma)=\frac{2e^{-\frac{y-\mu}{\sigma}}}{\sigma(1+e^{-\frac{y-\mu}{\sigma}})^2} \qquad y\geq\mu$$

و تابع توزیع

$$G(y,\mu,\sigma)=\frac{2e^{-\frac{y-\mu}{\sigma}}}{\sigma(1+e^{-\frac{y-\mu}{\sigma}})^2} \qquad y\geq\mu$$

باشد که $\mu\in\Re$ یک پارامتر مکان و $\sigma>0$ یک پارامتر مقیاس می‌باشد [۴و۲].

اگر متغیر تصادفی X را به صورت $X=(Y-\mu)/\sigma$ در نظر بگیریم، در آن صورت x دارای توزیع نیمه لجستیک استاندارد با تابع چگالی

$$f(x)=\frac{2e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} \qquad x\geq 0$$

و تابع توزیع

$$F(x)=\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}} \qquad x\geq 0$$

خواهد بود. نمودارهای $f(x)$ و $F(x)$ به ترتیب در شکل‌های ۱ و ۲ رسم شده‌اند. همانطوریکه مشاهده می‌شود $f(x)$ یک تابع اکیداً نزولی از x با یک دنباله طولانی به سمت راست می‌باشد.

همچنین تابع خطر [۵] این توزیع یعنی

$$h(x)=\frac{f(x)}{1-F(x)}=\frac{1}{1+e^{-x}}$$

یک تابع اکیداً صعودی از x بوده و هنگامی که $x\to\infty$، به یک نزدیک می‌شود. بنابراین این توزیع دارای نرخ

[۱] Half- logistic distribution

[۲] دانشگاه مازندران

[۳] Life time-testing

[۴] Reliability

[۵] Hazard function

خطر صعودی است. یعنی با افزایش زمان، قطعه خراب شده و از بین می‌رود. بر این اساس توزیع نیمه لجستیک می‌تواند به عنوان یک مدل طول عمر در آزمون‌های طول عمر بکار رود [۴]. شکل ۳ نمودار تابع خطر $h(x)$ را نشان‌می دهد.

۲ گشتاورها، ضرایب چولگی و کشیدگی

گشتاور مرتبه اول توزیع نیمه لجستیک با یک انتگرال ساده به صورت زیر بدست می آید :

$$\begin{aligned} E(X) &= 2\int_0^\infty \frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2}dx \\ &= 2\int_{\frac{1}{2}}^1 \ln\frac{u}{1-u}du \qquad (u=(1+e^{-x})^{-1}) \\ &= 2\int_{\frac{1}{2}}^1 [\ln u - \ln(1-u)]du = 2\ln 2 \end{aligned}$$

برای پیدا کردن گشتاورهای بالاتر به صورت زیر اقدام می‌شود. از بسط

$$(1+x)^{-2} = \sum_{n=0}^\infty \binom{-2}{n} x^n = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n (n+1)x^n$$

گشتاورهای زوج x می‌شود: برای $(m=1,2,3,\ldots)$

$$\begin{aligned} E(X^{2m}) &= \int_0^\infty x^{2m}\frac{2e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}dx \\ &= 2\int_0^\infty \sum_{n=0}^\infty (-1)^n(n+1)(e^{-x})^n x^{2m}e^{-x}dx \\ &= 2\sum_{n=0}^\infty (-1)^n(n+1)\int_0^\infty x^{2m}e^{-(n+1)x}dx \\ &= 2\sum_{n=0}^\infty (-1)^n(n+1)\frac{\Gamma(2m+1)}{(n+1)^{2m+1}} \\ &= 2(2m)!\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n^{2m}} \end{aligned}$$

و یا

$$\begin{aligned} E(X^{2m}) &= 2(2m)!\{\sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^{2k-2}}{(2k-1)^{2m}} \\ &\quad + \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^{2k-1}}{(2k)^{2m}}\} \\ &= 2(2m)!\{\sum_{k=1}^\infty k^{-2m} - 2^{(1-2m)}\sum_{k=1}^\infty k^{-2m}\} \\ &= 2(2m)!(1-2^{-(2m-1)})\sum_{k=1}^\infty k^{-2m} \\ &= 2(2m)!(1-2^{-(2m-1)})\eta(2m). \end{aligned}$$

که در آن $\eta(s)$ تابع زتای ریمان[۶] بوده که به صورت زیر تعریف می‌شود[۱]:

$$\eta(s) = \sum_{k=1}^\infty k^{-s} \qquad s>1$$

با توجه به مقادیر شناخته شده

$$\eta(4) = \frac{\pi^4}{90} \qquad \eta(2) = \frac{\pi^2}{6}$$

نتیجه می‌شود که

$$E(X^2) = 2\eta(2) = \frac{\pi^2}{3} \qquad E(X^4) = 42\eta(4) = \frac{7\pi^4}{15}$$

گشتاورهای فرد بطور مشابه بصورت زیر بدست می آیند:

$$E(X^{2m+1}) = 2(2m+1)!(1-2^{-2m})\eta(2m+1)$$

$$m = 1,2,3,\ldots\ldots$$

در حالت خاص نتیجه می شود:

$$E(X^3) = 2(3!)(1-2^{-2})\eta(3) = 9\eta(3) \cong 10/8$$

[۶] Riemann Zeta-function

گشتاور مرکزی مرتبه n توزیع نیمه لجستیک عبارت است از:

$$\beta_n = E(X-E(X))^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} E(X^k)[-E(X)]^{n-k}$$

در حالت خاص داریم:

$$\beta_2 = \sigma^2 = \frac{\pi^2}{3} - (\ln 4)^2$$

$$\beta_3 = \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} E(X^k)(-\ln 4)^{3-k} \cong 2/446$$

$$\beta_4 = \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} (-\ln 4)^{4-k} E(X^k) \cong 12/425$$

از گشتاورهای مرکزی فوق می‌توان ضرایب چولگی و کشیدگی را محاسبه کرد.

ضریب چولگی[7] برابر است با:

$$\gamma_1 = \frac{\beta_3}{\sigma^3} = \frac{\beta_3}{(\beta_2)^{\frac{3}{2}}} \cong 1/529$$

بر این اساس توزیع نیمه لجستیک یک توزیع چوله به راست می‌باشد.

همچنین ضریب کشیدگی[8] می‌شود:

$$\gamma_2 = \frac{\beta_4}{\sigma^4} = \frac{\beta_4}{(\beta_2)^2} \cong 6/638$$

و لذا توزیع نیمه لجستیک در مقایسه با توزیع نرمال استاندارد کشیده‌تر یا به عبارتی تیزتر می‌باشد. در شکل ۴ دو تابع چگالی نرما ل استاندارد و تابع چگالی نیمه لجستیک استاندارد باهم رسم شده‌اند، که حقایق فوق آشکارا دیده می‌شود.

[7] Skewness coefficient
[8] Kortusis coefficient

ذکر این نکته ضروری است که گشتاورهای فوق را می‌توان از روی تابع مولد گشتاور نیز محاسبه کرد. تابع مولد گشتاور عبارت است از:

$$\begin{aligned}
M_X(t) &= \int_0^{\infty} \frac{2e^{tx}e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}dx \\
&= 2\int_{\frac{1}{2}}^{1} u^t(1-u)^{-t}du \qquad (u=(1+e^{-x})^{-1}) \\
&= 2\{\int_0^1 u^t(1-u)^{-t}du - \int_0^{\frac{1}{2}} u^t(1-u)^{-t}du\} \\
&= 2\Gamma(1+t)\Gamma(1-t) - 2B(\frac{1}{2}, 1+t, 1-t)
\end{aligned}$$

که درآن $B(x,\alpha,\beta)$ تابع بتای ناقص بوده وبصورت زیر تعریف می‌شود:

$$B(x,\alpha,\beta) = \int_0^x t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt$$

۳ ارتباط با دیگر توزیع‌ها

دراین بخش ارتباط توزیع نیمه لجستیک استاندارد با برخی دیگر از توزیع‌ها مطالعه می‌شود.

۱.۳ ارتباط با توزیع یکنواخت

اگر متغیر تصادفی V دارای توزیع نیمه لجستیک استاندارد باشد، درآن صورت به کمک قضیه تبدیل انتگرال احتمال، می‌توان نشان دادکه

$$U = \frac{2}{1+e^V}$$

دارای توزیع یکنواخت $U(0,1)$ می‌باشد.

۲.۳ ارتباط با توزیع گاما

اگر متغیر تصادفی V دارای توزیع نیمه لجستیک استاندارد باشد، درآن صورت به سادگی می‌توان نشان داد که

$$T = \ln\left(\frac{1+e^V}{2}\right)^{\theta}$$

دارای توزیع گاما با پارامترهای $\alpha = 1$ و $\beta = \theta$ می‌باشد. در حالت خاص $\theta = 2$ ، V دارای توزیع کای‌دو با دو درجه آزادی یا توزیع نمایی با میانگین دو خواهد بود.

۳.۳ ارتباط با توزیع وایبل

اگر متغیر تصادفی V دارای توزیع نیمه لجستیک استاندارد باشد، درآن صورت تابع چگالی

$$W = \left[\ln\left(\frac{1+e^V}{2}\right)^{\theta}\right]^{\frac{1}{\alpha}}$$

عبارت است از:

$$f(w) = \frac{\alpha}{\theta} w^{\alpha-1} e^{-\frac{w^{\alpha}}{\theta}}$$

یعنی W دارای توزیع وایبل با پارامترهای α و $\frac{1}{\theta}$ است. با توجه به ارتباط توزیع وایبل و رایلی، در حالت خاص $\theta = 2$، توزیع رایلی با چگالی زیر بدست می آید:

$$f(w) = \frac{2}{\theta} w e^{-\frac{w^2}{\theta}}$$

۴ برآورد پارامترها

فرض کنید $y_1, y_2, ..., y_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع نیمه لجستیک با پارامترهای σ و μ باشد. برای برآورد پارامترهای σ و μ از چندین روش استفاده می‌کنیم:

۱.۴ روش گشتاوری

با توجه به اینکه متغیر تصادفی $X = (Y-\mu)/\sigma$ دارای توزیع نیمه لجستیک استاندارد می‌باشد، گشتاورهای اول و دوم y را می‌توان بصورت زیر محاسبه کرد:

$$E(Y) = \mu + \sigma E(X) = \mu + \sigma \ln 4$$

$$E(Y^2) = E(\mu + \sigma X)^2 = \mu^2 + 2\mu\sigma \ln 4 + \frac{\sigma^2 \pi^2}{3}$$

از حل دستگاه معادلات

$$E(Y^2) = \overline{y^2} \quad , \qquad E(Y) = \overline{y}$$

برآوردهای گشتاوری μ, σ بصورت زیر بدست می آیند:

$$\tilde{\mu} = \bar{y} - \ln 4 \sqrt{\frac{\overline{y^2} - \bar{y}^2}{\frac{\pi^2}{3} - (\ln 4)^2}} \quad , \quad \tilde{\sigma} = \sqrt{\frac{\overline{y^2} - \bar{y}^2}{\frac{\pi^2}{3} - (\ln 4)^2}}$$

۲.۴ روش ماکزیمم درستنمایی

تابع درستنمایی نمونه عبارت است از:

$$L(\mu,\sigma) = 2^n \sigma^{-n} \quad e^{-\frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu)} \prod_{i=1}^{n}\left(1 + e^{-\frac{y_i-\mu}{\sigma}}\right)^{-2}$$

$$\mu \le y_{(1)}$$

که $y_{(1)} = \min(y_1, y_2, ... y_n)$ کوچکترین عنصر نمونه است. باتوجه به اینکه $L(\mu,\sigma)$ یک تابع اکیداً صعودی از μ است لذا برآورد ماکزیمم درستنمایی (MLE) μ، عبارت است از:

$$\hat{\mu} = y_{(1)}$$

با جایگذاری $\hat{\mu}$ به جای μ ومشتق گیری از لگاریتم تابع درستنمایی داریم:

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}\log L(\hat{\mu},\sigma) = \frac{-n}{\sigma}+\frac{۱}{\sigma^۲}\sum_{i=۱}^{n}(y_i-\hat{\mu}) - \frac{۲}{\sigma^۲}\sum_{i=۱}^{n}\frac{(y_i-\mu)e^{-\frac{(y_i-\hat{\mu})}{\sigma}}}{۱+e^{-\frac{(y_i-\hat{\mu})}{\sigma}}}$$

که جواب صریحی برای σ به دست نمی‌آید. بنابراین برای پیدا کردن MLE برای σ، باید از روش‌های عددی استفاده کرد.

۳.۴ تقریبی ماکزیمم درستنمایی

همانطوریکه مشاهده شد، روش ماکزیمم درستنمایی، جواب صریحی را برای σ به دست نمی‌دهد. در اینجا یک روش ساده برای پیدا کردن برآورد MLE تقریبی، با تقریب تابع درستنمایی ماکزیمم ارائه می‌شود.

از تبدیل $x=(y-\mu)/\sigma$ می‌توان تابع چگالی توزیع نیمه لجستیک را بصورت زیر نوشت:

$$g(y,\mu,\sigma)=\frac{۱}{\sigma}f(x)$$

که در آن $f(x)$ تابع چگالی توزیع نیمه لجستیک استاندارد است. با توجه به این تابع درستنمایی نمونه می‌شود:

$$L(\hat{\mu},\sigma)=\prod_{i=۱}^{n}g(y_i,\hat{\mu},\sigma)=\sigma^{-n}\prod_{i=۱}^{n}f(x_i)$$

لگاریتم تابع درستنمایی می‌شود:

$$\ell(\hat{\mu},\sigma)=-n\ln\sigma+\sum_{i=۱}^{n}\ln f(x_i) \qquad (۱)$$

با مشتق گیری نسبت به σ خواهیم داشت:

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}\ell(\hat{\mu},\sigma)=\frac{-n}{\sigma}+\frac{۱}{\sigma}\sum_{i=۱}^{n}x_iF(x_i)$$

معادله درستنمایی فوق بخاطر حضور جمله $F(x_i)$ جواب صریحی را برای σ به دست نمی‌دهد. با بسط تیلور $F(x_i)$ حول نقطه $E(X_i)=\ln ۴$ می‌توان این جمله را تقریب زده و لذا معادله را حل کرد. برای مطالعه بیشتر روی روش تقریبی MLE ، می‌توان به مراجع [۵و۴و۳] مراجعه کرد. از بسط تیلور $F(x_i)$ حول $\ln ۴$ و نگه داشتن دو جمله اول آن داریم:

$$F(x_i)\cong F(\ln ۴)+(x_i-\ln ۴)f(\ln ۴)=\alpha+\beta x_i$$

که در آن

$$\alpha=F(\ln ۴)-\ln ۴ f(\ln ۴)=\frac{۳}{۵}-\frac{۸}{۲۵}\ln ۴$$

$$\beta=f(\ln ۴)=\frac{۸}{۲۵}$$

از تقریب فوق، معادله ماکزیمم درستنمایی را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\sigma}\ell(\hat{\mu},\sigma) &= \frac{-n}{\sigma}+\frac{۱}{\sigma}\sum_{i=۱}^{n}x_i(\alpha+\beta x_i)\\ &= \frac{-n}{\sigma}+\frac{\alpha}{\sigma}\sum_{i=۱}^{n}x_i+\frac{\beta}{\sigma}\sum_{i=۱}^{n}x_i^۲\\ &= \frac{-n}{\sigma}+\frac{\alpha}{\sigma^۲}\sum_{i=۱}^{n}(y_i-y_{(۱)})\\ &\quad+\frac{\beta}{\sigma^۳}\sum_{i=۱}^{n}(y_i-y_{(۱)})^۲\end{aligned}$$

از معادله فوق ،چند جمله‌ای درجه دو زیر برحسب σ بدست می‌آید:

$$n\sigma^۲-\alpha\sum_{i=۱}^{n}(y_i-y_{(۱)})\sigma-\beta\sum_{i=۱}^{n}(y_i-y_{(۱)})^۲=۰$$

ازحل معادله فوق برآورد MLE برای σ، بصورت زیر حاصل می‌شود:

$$\hat{\sigma} = \frac{B + \sqrt{B^{۲} + ۴AC}}{۲A} \qquad (۲)$$

که در آن

$$A = n \ , \quad B = \alpha \sum_{i=۱}^{n} (y_i - y_{(۱)})$$

$$C = \beta \sum_{i=۱}^{n} (y_i - y_۱)^{۲}$$

ذکر این نکته ضروری است که معادله درجه دوم فوق دو ریشه دارد که یکی ازآنها قابل قبول نیست چون $C > ۰$ است.

برآورد MLE تقریبی که برای σ ارائه شده است، می‌تواند مقدار اولیه خوبی برای حل تکراری معادله درستنمایی (۱) به روش‌های آنالیز عددی باشد.

۵ محاسبات عددی

در این بخش، به منظور بحث و مقایسه روش‌های برآورد، یک مثال عددی و یک مطالعه شبیه سازی ارائه می‌شود.

۱.۵ مثال عددی

با استفاده از روش مونت کارلو، نمونه‌های به اندازه ۱۵ از توزیع نیمه لجستیک استاندارد تولید شده‌اند. این نمونه‌ها عبارتند از:

3.6847 0.4411 3.2591 0.2064 0.8243 1.94267
0.2281 0.8848 1.6586 1.5525 0.4979 0.0795
1.0578 1.2764 1.0354

داریم

$$A = ۱۵ \ , \quad B = ۲/۹۱۳۴ \ , \quad C = ۱۲/۴۶۷۰$$

$$\hat{\sigma} = \frac{B + \sqrt{B^{۲} + ۴AC}}{۲A} = ۱/۰۱۳۹$$

۲.۵ شبیه سازی

به منظور مقایسه روش تقریبی MLE با روش گشتاوری یک مطالعه شبیه سازی ارائه می‌شود. به روش مونت کارلو، نمونه‌های به اندازه n $(n = ۳, ۵, ۷, ۱۰)$ از توزیع نیمه لجستیک استاندارد تولید شده‌اند. برای هر کدام از این نمونه‌ها، برآوردهای MLE تقریبی و گشتاوری σ بدست آمده است. جدول ۱ معدل MSE برآوردها را بر اساس ۱۰۰۰۰ بار شبیه سازی نشان می‌دهد.

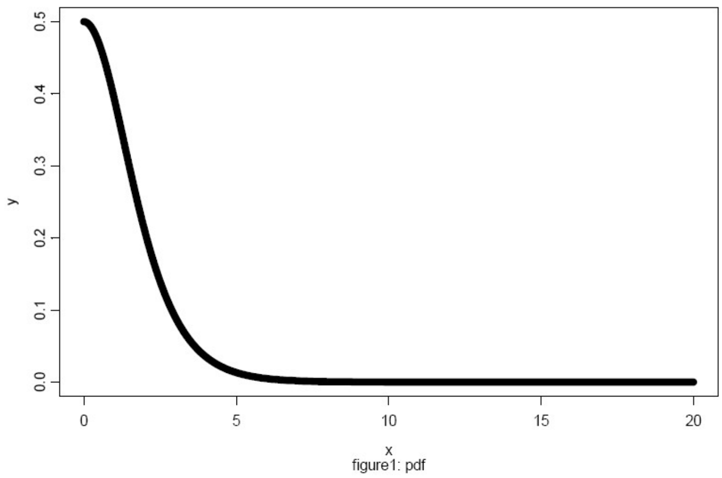
جدول ۱: MSE برآوردها

n	۳	۵	۷	۱۰
$MSE(\tilde{\sigma})$	۰/۳۰۷۵	۰/۱۹۷۱	۰/۱۴۹۰	۰/۱۱۱۴
$MSE(\hat{\sigma})$	۰/۲۴۹۰	۰/۱۷۴۴	۰/۱۳۲۷	۰/۱۰۰۶

از جدول ۱، مشاهده می‌کنیم که روش تقریبی MLE در مقایسه با روش گشتاوری کاراتر می‌باشد. از این‌رو برآورد MLE تقریبی که برای σ ارائه شده است، می‌تواند مقدار اولیه خوبی برای حل تکراری معادله درستنمایی (۱) به روش‌های آنالیز عددی باشد. همچنین مشاهده می‌شود که با افزایش اندازه نمونه، مقادیر MSE کاهش پیدا می‌کند.

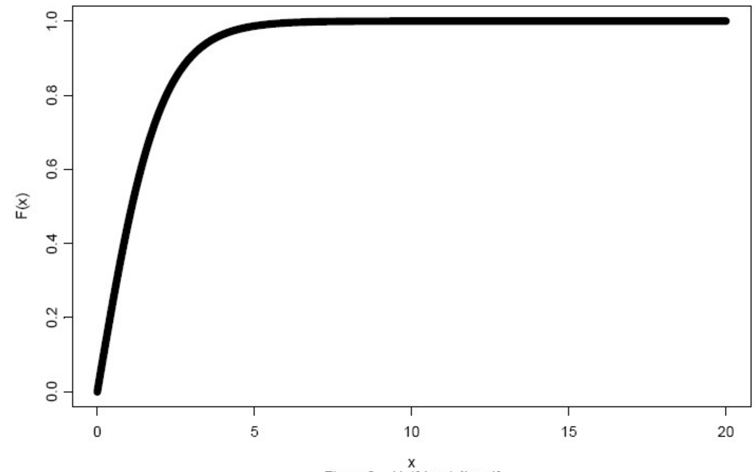
برای انجام شبیه سازی و محاسبه مقادیر جدول ۱، از بسته آماری SPLUS استفاده شده است که برنامه مربوطه در زیر آمده است:

```
simul4-function(n) { # This program obtain MSE
the moment and approximate of sigma # based on
```

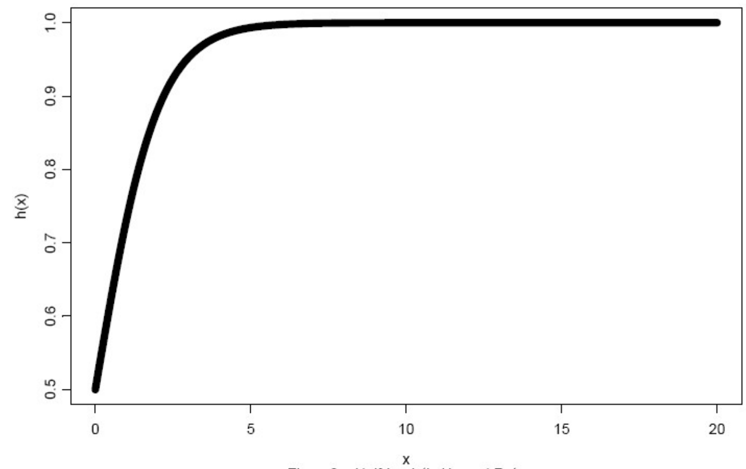


شکل ۱: تابع چگالی نیمه لجستیک

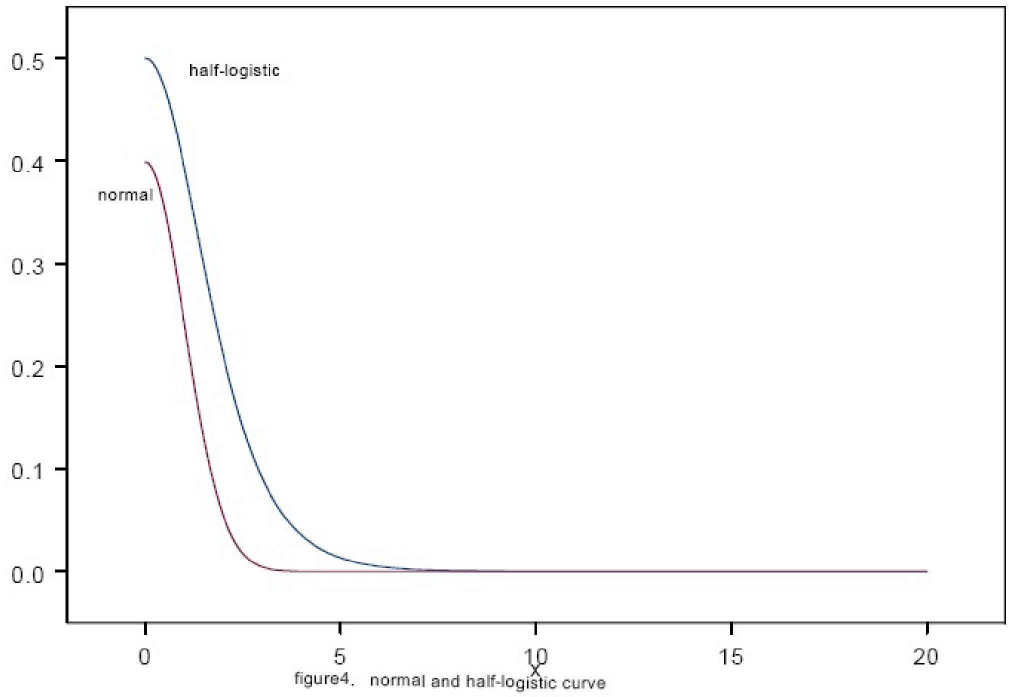
```
10000 simulated random samples in the standard
# # half logistic dist.
m_matrix(0,10000,1)
gm_matrix(0,10000,1)
sigma_matrix(0,10000,1)
gsigma_matrix(0,10000,1)
for(i in 1:10000) {
u_runif(n)
x_log((1+u)/(1-u))
A_n
B_((3/5)-((8/25)*(log(4))))*sum(x)
C<-(8/25)*sum((x2))
sigma[i] < -(B + sqrt((B2)+(4*A*C)))/(2*A)
m[i]_(sigma[i]-1)2
gsigma[i]_sqrt((mean((x2))-((mean(x))2))/((3.14
2)/3-((log(4)) 2)))
gm[i]_(gsigma[i]-1) 2
}
ms_mean(m)
gms_mean(gm)
t_list(ms=ms,gms=gms)
}
```



شکل ۲: تابع توزیع تجمعی نیمه لجستیک



شکل ۳: نمودار تابع خطر $h(x)$



شکل ۴: تابع چگالی نرمال استاندارد و نیمه لجستیک استاندارد

مراجع

[1] Balakrishnan, N and Nevzorov, V. B. ,1993, *A Primer on Statistical Distributions*, John Wiley & Sons, New York.

[2] Balakrishnan, N ,1992, *Handbook of the logistic distribution*, Marcel Dekker, New York.

[3] Balakrishnan, N and Cohen ,1991, *Order Statistics and Inference: Estimation Methods*, Academic Press, San Diego.

[4] Balakrishnan, N , Wong, K. H. T. ,1991, Approximate MLE's for the location and scale parameters of the half logistic distribution with Type-II right censoring, *IEEE Trans. On Reliab.* 40, 140-145.

[5] Tiku, M. L., Tan, W. Y., Balakrishnan, N. ,1986, *Robust Inference*, Marcel Dekker, New York.