

برآورد تابع چگالی طیفی سریهای زمانی ایستا با قدرت تفکیک پذیری (وضوح) بالا^۱

علیرضا نعمت الهی^۲

چکیده

مقاله حاضر به معرفی و کاربردهای روشی قدرتمند در برآورد تابع چگالی طیفی سریهای زمانی ایستا با زمان گسسته به نام روش برآوردیابی با قدرت تفکیک پذیری یا وضوح بالا می‌پردازد. با ارائه یک مثال شبیه‌سازی شده، این روش را با برخی روشهای کلاسیک مقایسه نموده و مزایای آن را بر خواهیم شمرد.

واژه‌های کلیدی: برآورد کپون، دوره‌نگار، تابع چگالی طیفی، سری زمانی ایستا.

۱. مقدمه

سیگنالها با استفاده از تحلیل فرکانسها امکان‌پذیر است و این کار با استفاده از تابع چگالی طیفی انجام می‌پذیرد.

تجزیه و تحلیل‌های سریهای زمانی معمولاً در دو قلمرو مطالعه می‌گردند.

در عمل تنها یک دنباله متناهی از مشاهدات در اختیار داریم و برآورد تابع چگالی طیفی جهت استخراج اطلاعات نهفته در آن همواره از چالشهای فرا روی محققان بوده است. برآورد تابع چگالی طیفی معمولاً به دو روش انجام می‌گیرد. یکی روش ناپارامتری است که در این روش هیچ الگویی از قبل فرض نمی‌شود و با استفاده از توابعی مانند دوره‌نگار^۳ و دوره‌نگار وزنی، تابع چگالی طیفی برآورد می‌گردد. روش دوم که روشی پارامتری است تابع چگالی طیفی از طریق انتخاب یک مدل برآورد می‌گردد. در مورد دو روش فوق تاکنون کتب و مقالات بسیاری نوشته شده است که در این زمینه می‌توان به منابع [۱]، [۲] و [۸] اشاره کرد. یکی از روشهای برآوردیابی که در دهه اخیر بیشتر مورد توجه قرار گرفته است، روش برآوردیابی «با قدرت تفکیک‌پذیری بالا» می‌باشد که می‌توان آن را هم در حالت پارامتری و هم ناپارامتری در نظر گرفت. در این مقاله به معرفی این روش قدرتمند در برآورد تابع چگالی طیفی پرداخته و نقاط قوت آن را نسبت به

۱- تحلیل در قلمرو زمان^۳
۲- تحلیل در قلمرو فرکانس^۴ (بسامد).

تحلیل در قلمرو زمان در بین آماردانان به لحاظ استفاده از توابع شناخته شده میانگین، واریانس، خودکواریانس و خودهمبستگی از محبوبیت ویژه‌ای برخوردار است، در حالی که تحلیل در قلمرو فرکانس در بین مهندسين و فیزیکدانان و کارشناسان علوم زمین به خاطر کاربرد وسیع و گسترده تابع چگالی طیفی در مسائل کاربردی و عملی، از طرفداران بیشتری برخوردار است. این تابع را در مهندسی بیشتر با عنوان تابع چگالی توانی می‌شناسند. به عنوان مثال در مخابرات تجزیه و تحلیل

^۱ High Resolution

^۲ بخش آمار، دانشگاه شیراز

^۳ Time Domain

^۴ Frequency Domain

^۵ Periodogram

$$W_n(j) = W_n(-j) \geq 0 \quad (1)$$

$$\sum_j W_n(j) = 1 \quad (2)$$

$$\sum_j W_n^2(j) \rightarrow 0 \quad \text{وقتی } n \rightarrow \infty \quad (3)$$

یک برآورد در این رابطه به صورت زیر می باشد.

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{|j| \leq \sqrt{n}} W_n(j) I_n\left(\frac{2\pi j}{n}\right)$$

می توان نشان داد که $\hat{f}(\omega)$ به طور مجانبی برای $f(\omega)$ هم ناریب و هم سازگار می باشد [۲]. با وجود این خواص مطلوب، ولی در عمل $\hat{f}(\omega)$ در برخی مواقع بسیار ضعیف عمل می کند که با استفاده از نتایجی که تاکنون به دست آمده، نمی توان علت آن را بیان نمود. به عنوان مثال در مواقعی که تابع چگالی طیفی دارای قله های بزرگ^۷ بوده و تعداد داده ها کم باشد، $\hat{f}(\omega)$ و $\tilde{f}(\omega)$ قادر به تفکیک قله های بزرگ نزدیک به هم نمی باشند، یا به عبارت دیگر قدرت تفکیک پذیری مناسبی ندارند. هرچند این مشکل با انتخاب نمونه های بزرگ تا حد زیادی برطرف می گردد ولی در عمل چنین نمونه های بزرگی در دسترس نیست. برای روشن تر شدن موضوع سری زمانی زیر را در نظر بگیرید [۷].

$$X_t = 0.18 \sin(2\pi \times 10 \cdot t) + \sin(2\pi \times 20 \cdot t) + \sin(2\pi \times 21 \cdot t) + Z(t)$$

که $Z(t)$ یک فرایند نویز (نوفه) سفید^۸ با میانگین صفر و واریانس یک می باشد. تابع چگالی طیفی این سری در شکل (۲-۱ a) رسم شده است. شکل (۲-۱ b) برآورد این تابع با استفاده از تابع دوره نگار برای یک نمونه ۶۴ تایی و شکل (۲-۱ c) همین برآورد برای یک نمونه ۲۰۴۸ تایی می باشد. برآورد این تابع با استفاده از توابع پنجره (در اینجا پنجره های همینگ^۹ و مستطیلی^{۱۰}) در شکل (۲-۱ d) برای یک نمونه ۱۰۰۰ تایی رسم شده است.

^۷ Storg Peaks

^۸ White Noise

^۹ Hamming

^{۱۰} Rectangular

روشهای دیگر برخواهیم شمرد.

۲. برآورد تابع چگالی طیفی سریهای زمانی ایستا (مانا)

فرض کنید $\{X_t, t \in Z\}$ یک سری زمانی با میانگین صفر و گشتاور دوم متناهی باشد، یعنی $E(X_t) = 0$ و $E|X_t|^2 < \infty$ برای همه $t \in Z$ ، به طوری که Z مجموعه اعداد صحیح باشد. تابع خود کوواریانس $\gamma(h) = EX_t X_{t+h}$ به صورت $\sum_{h=-\infty}^{\infty} |\gamma(h)| < \infty$ را در نظر می گیریم. در این صورت تابع چگالی طیفی سری $\{X_t\}$ به صورت زیر تعریف می گردد.

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{h=-\infty}^{\infty} e^{-ih\omega} \gamma(h) \quad ; -\pi \leq \omega \leq \pi$$

شرط $\sum_{h=-\infty}^{\infty} |\gamma(h)| < \infty$ باعث می شود که سری فوق مطلقاً همگرا باشد.

با فرض این که $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ یک دنباله از مشاهدات به اندازه n از $\{X_t\}$ باشند، تابع دوره نگار به صورت زیر تعریف می گردد؛

$$I_n(\omega) = \frac{1}{n} \left| \sum_{t=1}^n X_t e^{-it\omega} \right|^2$$

یک برآورد طبیعی برای تابع چگالی طیفی، $\tilde{f}(\omega) = I_n(\omega)/(2\pi)$ می باشد و می توان نشان داد که $\tilde{f}(\omega)$ به طور مجانبی یک برآورد گر ناریب ولی ناسازگار برای $f(\omega)$ می باشد. به طور شهودی دلیل ناسازگاری $\tilde{f}(\omega)$ را می توان وجود نوسانات شدید در $I_n(\omega)$ دانست. به همین دلیل برای هموار سازی $I_n(\omega)$ و در نتیجه یافتن برآوردهای سازگار، معمولاً از توابعی به نام پنجره (وزن، هسته)^{۱۱} استفاده نموده و میانگین وزنی $I_n(\omega)$ را به عنوان برآورد $f(\omega)$ در نظر می گیرند. توابع پنجره توابعی مانند $W_n(\cdot)$ با خواص زیر (به منظور سازگار ساختن $I_n(\omega)$) می باشند:

^{۱۱} Window (Weight, Kernel)

همان گونه که مشاهده می شود این روشهای کلاسیک برای برآورد طیف (به ویژه وقتی که تعداد مشاهدات کم باشد) از دقت کافی برخوردار نبوده و قادر به تفکیک دو قله قوی موجود از یکدیگر نمی باشند.

(۳-۱)

$$\text{Var}(\hat{X}_n) = \mathbf{a}'_p \mathbf{R}_p \mathbf{a}_p = (\mathbf{a}_p - \mathbf{a}_{MV})' \mathbf{R}_p (\mathbf{a}_p - \mathbf{a}_{MV}) + \mathbf{a}'_{MV} \mathbf{R}_p \mathbf{a}_{MV}$$

بطوریکه

$$\mathbf{a}_{MV} = \frac{\mathbf{R}_p^{-1} \mathbf{L}_p(\omega)}{\mathbf{L}'_p(\omega) \mathbf{R}_p^{-1} \mathbf{L}_p(\omega)}$$

که در آن $\mathbf{L}_p(\omega) = (1, e^{i\omega}, \dots, e^{ip\omega})'$ می باشد. اتحاد (۳-۱) در صورتی برقرار است که $\mathbf{a}'_p \mathbf{L}_p(\omega) = 1$. جمله دوم سمت راست (۳-۱) به \mathbf{a}_p بستگی ندارد و قسمت اول نیز همواره بزرگتر یا مساوی است (چون \mathbf{R}_p یک ماتریس مثبت قطعی است) بنابراین مقدار مینیم با قرار دادن $\mathbf{a}_p = \mathbf{a}_{MV}$ بدست می آید. در نتیجه کمترین مقدار واریانس برابر است با

$$\text{Var}(\hat{X}_n)_{MV} = \frac{1}{\mathbf{L}'_p(\omega) \mathbf{R}_p^{-1} \mathbf{L}_p(\omega)}$$

تذکره ۱: برای یافتن برآوردی که واریانس \hat{X}_n را مینیمم کند می توان از روش لاگرانژ با محدودیت $\mathbf{a}'_p \mathbf{L}_p(\omega) = 1$ نیز استفاده کرد.

تذکره ۲: بردار $\mathbf{L}_p(\omega)$ در علوم مربوط به پردازش سیگنالها در الکترونیک و مخابرات دارای کاربردهای گسترده است و به بردار جهت معروف است. همچنین تبدیل فوریه گسسته برای N داده نیز بر حسب این بردار محاسبه می گردد. محدودیت $\mathbf{a}'_p \mathbf{L}_p(\omega) = 1$ نیز باعث می گردد که برآورد مینیمم وجود داشته باشد و یک محدودیت متداول در تحلیل های مربوط به پردازش سیگنالها می باشد. برای اطلاعات بیشتر در این زمینه می توان به [۵] مراجعه کرد.

تذکره ۳: انتخاب p (مرتبه مدل AR) نیز دارای اهمیت فراوانی است و برای انتخاب آن می توان از روشهای متداول در تحلیل سریهای زمانی مربوط به انتخاب مرتبه مدل (مانند روش Akaike) استفاده کرد.

در صورتی که \hat{X}_n را به عنوان خروجی یک صافی یا فیلتر خطی (بالایه خطی) از بردار $\mathbf{X}_n = (X_{n-1}, \dots, X_{n-p})'$ در نظر بگیریم، آنگاه واریانس \hat{X}_n را می توان به عنوان تابع توان و متناسب با تابع چگالی طیفی فرایند $\{X_n\}$ در نظر گرفت. کپون [۳] با تصحیح این

۳. برآوردهایی با قدرت تفکیک پذیری بالا

برآورد با قدرت تفکیک پذیری بالا برای اولین بار توسط کپون [۳] در حالت یک متغیره مطرح گردید. این برآوردها به برآوردهای با کمترین واریانس نیز معروفند. در این قسمت به اختصار به معرفی این گونه برآوردها می پردازیم.

فرض کنید متغیرهای تصادفی X_0, X_1, \dots, X_{n-1} را برای یافتن برآورد پارامترهای مدل AR(p) در اختیار داشته باشیم. برآورد کننده خطی X_n به صورت زیر خواهد بود.

$$\hat{X}_n = \sum_{k=1}^p a_p(k) X_{n-k} = \mathbf{X}'_n \mathbf{a}_p$$

که در آن

$$\mathbf{X}_n = (X_0, X_1, \dots, X_{n-1})'$$

$$\mathbf{a}_p = (a_p(0), a_p(1), \dots, a_p(p))'$$

به ترتیب بردار مشاهدات و بردار ضرایب باشند. یک روش متداول برای یافتن بردار ضرائب این است که آنها را به گونه ای انتخاب کنیم تا واریانس \hat{X}_n مینیمم شود. واریانس \hat{X}_n عبارت است از

$$\text{Var}(\hat{X}_n) = E \left| \hat{X}_n \right|^2 = \mathbf{a}'_p E(\mathbf{X}_n \mathbf{X}'_n) \mathbf{a}_p = \mathbf{a}'_p \mathbf{R}_p \mathbf{a}_p$$

به طوری که

$$\mathbf{R}_p = E(\mathbf{X}_n \mathbf{X}'_n) = \begin{pmatrix} \gamma(0) & \gamma(1) & \dots & \gamma(p) \\ \gamma(1) & \gamma(0) & \dots & \gamma(p-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma(p) & \gamma(p-1) & \dots & \gamma(0) \end{pmatrix}$$

(ماتریسهایی شبیه ماتریس فوق به ماتریسهای Toeplitz معروفند).

واریانس \hat{X}_n را همواره می توان به صورت زیر نوشت.

برآورد طیف در بسیاری از رشته‌ها از جمله زمین شناسی، فیزیک و غیره دارای کاربردهای گسترده می‌باشد. ولی این کاربردها در مهندسی مخابرات بسیار واضح تر و ملموس تر است. در این قسمت به اختصار به گوشه‌ای از این کاربردها اشاره می‌گردد.

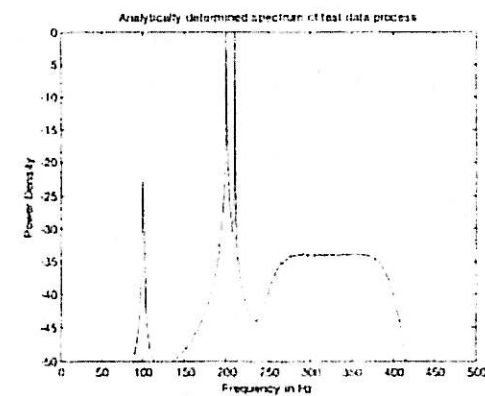
روش MUSIC در پیدا کردن زاویه و جهت سیگنالها و پیدا کردن فرکانس فرستنده‌ها کاربرد دارد. به عنوان مثال در حوزه‌های مرزی (زمینی یا دریایی) کشورها برای یافتن فرستنده‌های جاسوسی دشمن، با فرستادن امواج و محاسبهٔ تابع چگالی طیفی در صورتی که طیف دریافتی فقط از نوفه سفید تشکیل شده باشد، به معنای عدم وجود فرستنده و در صورت وجود قله در طیف، به وجود فرستنده یا فرستنده‌هایی می‌توان پی برد. همچنین ردیابی تلفن‌ها یا فرستنده‌های غیرمجاز در شهرها، تشخیص و ردیابی وجود مین یا حتی نهنگ در اقیانوسها نیز با گرفتن طیف مناسب و تحلیل آنها امکان پذیر می‌باشد. در تمام مثالهای فوق تفکیک قله‌های بزرگ دارای اهمیت بسیار است. برای اطلاعات بیشتر در این زمینه به منابع [۴]، [۵] و [۹] مراجعه شود.

تابع توان و پیشنهاد ضریب تناسب $p/(2\pi)$ ، تابع زیر را که به تابع کپون یا برآورد چگالی طیفی با کمترین واریانس و یا برآورد چگالی طیفی با قدرت تفکیک پذیری بالا معروف است را در نظر می‌گیرد

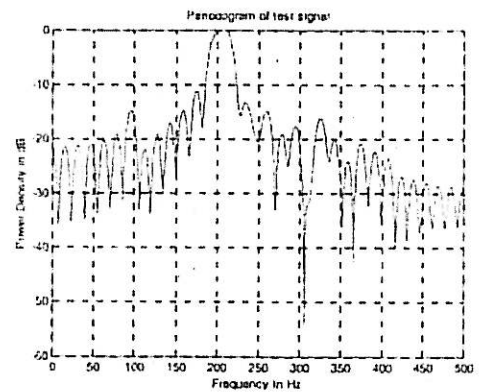
$$f_{cap}(\omega) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{2}{p} \mathbf{L}'_p(\omega) \mathbf{R}_p^{-1} \mathbf{L}_p(\omega) \right]^{-1}$$

در مباحث مهندسی مخصوصاً مهندسی مخابرات روش یا الگوریتم مربوط به محاسبه تابع فوق به الگوریتم MUSIC معروف می‌باشد. لازم به ذکر است که سوپرا رانو و گیر [۱۰] نیز با روشی متفاوت به برآوردی متناسب با برآورد کپون دست یافته‌اند. با به کار بردن الگوریتم MUSIC، برآورد کپون برای سری زمانی در نظر گرفته شده در بخش قبل، در شکل (۲-۲) با همان اندازه نمونه اولیه ۶۴ تایی رسم شده است. همان گونه که ملاحظه می‌شود با همین تعداد کم مشاهدات، طیفی مشابه طیف اولیه به دست آمده است که نه تنها قله‌ها کاملاً تفکیک و شناسایی هستند، بلکه وضعیت نوفه سفید هم بهتر شده است. برای تعمیم روش کپون به حالت چند متغیره منبع [۶] را ببینید.

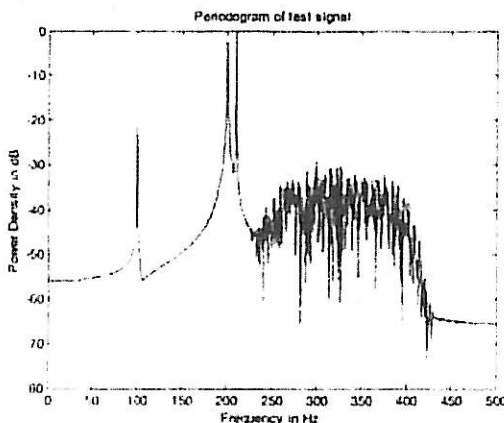
۴. کاربردها



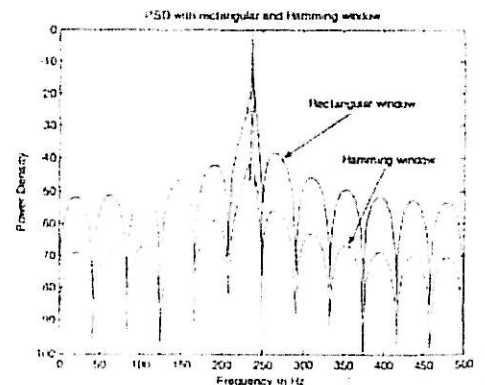
(a)



(b)

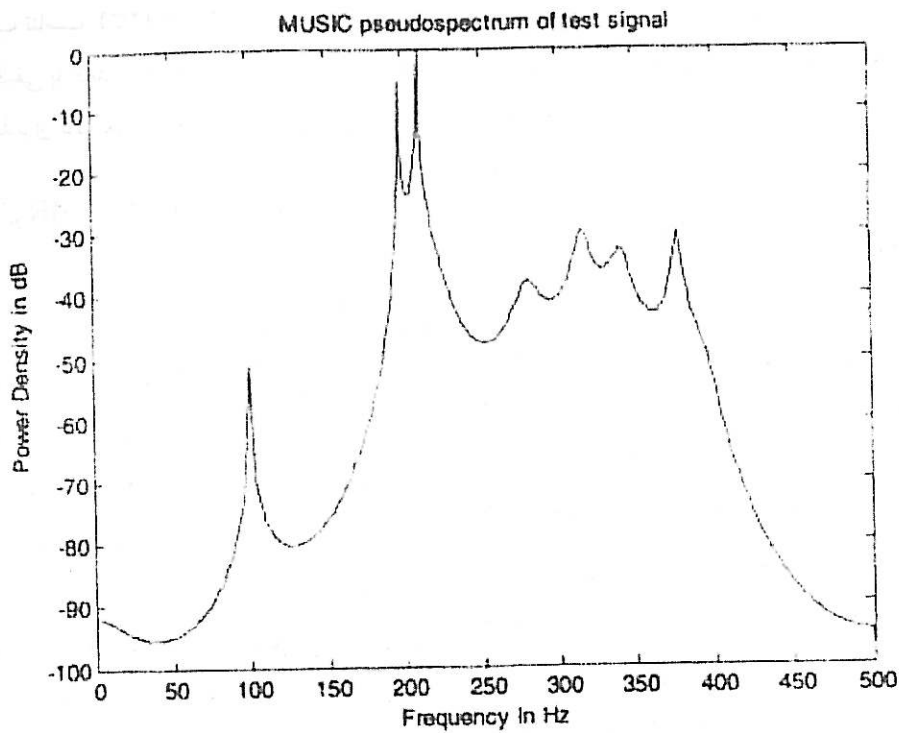


(c)



(d)

شکل (۲-۱)



شکل (۲-۲)

مراجع

- [1] Brillinger, D.R., 1975. *Time Series, Data Analysis and Theory*, Holt, Rinehart and Winston, New York.
- [2] Brockwell, P.J. and Davis, R.A., 1991. *Time Series: Theory and Method*, Springer Verlag, New York.
- [3] Capon, J., 1969. *High Resolution Frequency-Wave Number Spectrum Analysis*, Proc. IEEE, 57, 1408-1418.
- [4] Kay, S. M., 1988. *Modern Spectral Estimation: Theory and Applications*, Prentice-Hall.
- [5] Marple, S.L., 1987. *Digital Spectral Analysis with Applications*, Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.
- [6] Nematollahi, A.R. and Subba Rao, T., 2002. *On the Spectral Estimation of Periodically Correlated (Cyclostationary) Time Series*, Submitted.
- [7] Mewes, H. and Dermühl, M., 2001. *Improvement on High Resolution Spectral Estimation Techniques in Sensor Array Signal Processing*, Unpublished.
- [8] Priestley, M.B., 1981. *Spectral Analysis and Time Series*, London, Academic Press.
- [9] Stoica, P. and Moses, R. L., 1997. *Introduction to Spectral Analysis*, Prentice-Hall.
- [10] Subba Rao, T. and Gabr, M.M., 1989. *The Estimation of Spectrum, Inverse Spectrum and Inverse Autocovariances of a Stationary Time Series*, J. Time Series Anal. 10(2), 183-202.