یک خانواده از توزیع‌های دو متغیره وابسته

محمد امینی دهک[۱]

چکیده

وابستگی مربع منفی[۲] (NQD)، که اولین بار در سال ۱۹۶۶ توسط لهمن[۳] مطرح شد، در سالهای اخیر مورد توجه بسیاری از آماردانان بوده است. مقالات متعددی که در این زمینه منتشر می‌شود گواه بر این ادعاست. در این مقاله، یک خانواده از توزیعهای دو متغیرهٔ پیوسته که دارای خاصیت NQD هستند را معرفی می‌نماییم. در ادامه، ضمن ارائهٔ مثالهای متنوع، خانوادهٔ توزیعهای FGM[۴] را تعمیم می‌دهیم.

واژه‌های کلیدی: وابستگی مربع منفی، خانواده FGM، تعمیم خانواده FGM.

۱. مقدمه

عموما در تحلیلهای آماری فرض استقلال متغیرهای تصادفی را در نظر می گیریم. این فرض در عمل همواره برقرار نیست. به عنوان مثال، در توزیع نرمال چند متغیره وقتی $\rho(X_i, X_j) \leq ۰$ برای هر $i \neq j$ فرض استقلال برقرار نیست. در نظریهٔ قابلیت اعتماد نیز طول عمر مؤلفه‌ها مستقل نیستند. بنابراین توجه به متغیرهای تصادفی وابسته، بررسی خواص آنها و معرفی توزیعهایی که دارای این خاصیت هستند؛ جالب و با اهمیت است. تعریف زیر توسط لهمن (۱۹٦٦) ارائه شد.

تعریف ۱.۱: متغیرهای تصادفی X و Y بطور منفی وابستهٔ مربعی (NQD) هستند، اگر نامساوی زیربرای هر دو عدد حقیقی x و y برقرار باشد.

$$F(x,y) \leq F_X(x)F_Y(y) \qquad (۱)$$

و هرگاه $F(x,y) \geq F_X(x)F_Y(y)$ برای هر دو مقدار x و y برقرار باشد آنگاه X و Y بطور مثبت وابسته‌اند[۵] (PQD).

در زمینهٔ وابستگی مثبت تحقیقات بیشتری انجام شده است. حال آن که در زمینهٔ وابستگی منفی کارهای انجام نشدهٔ بسیاری وجود دارد. فارلی- گامبل- مارگن‌استرن، (FGM) یک خانواده مهم از توزیعهای توأم را معرفی نمودند، که بعدا ابراهیمی و قوش (۱۹۸۱) ثابت کردند که این خانواده در حالت خاص دارای NQD خاصیت است.

در این مقاله، خانواده‌ای از توزیعهای دو متغیرهٔ پیوسته را که دارای خاصیت NQD هستند، معرفی می‌نماییم. علاوه بر این، خانوادهٔ توزیعهای FGM را تعمیم داده و مثالهای متنوعی را ارائه می‌نماییم.

۲. NQD و شرایط برقراری آن

فرض کنید X و Y دارای توزیع توأم پیوسته $F(x,y)$ و توزیعهای

---

[۱] گروه ریاضی، دانشگاه سیستان و بلوچستان

[۲] Negatively Quadratic Dependence

[۳] Lehmann

[۴] Farli – Gambel - Morgensterm

[۵] Positively Quadratic Dependence

حاشیه‌ای پیوسته $F_Y(y), F_X(x)$ باشند. خانوادهٔ توزیعهای دو متغیرهٔ $F(x,y)$ که دارای خاصیت NQD هستند را به صورت زیر معرفی می‌نماییم.

$$G=\{F(x,y)\,;\,F(x,y)=F_X(x).F_Y(y)+Q(x,y)\}$$
$$\forall x,y\in\Re$$

که در آن $Q(x,y)$ در شرایط زیر صدق می‌کند.

الف- $Q(x,y)\le 0 \qquad \forall x,y\in\Re$

ب- $Q(x,+\infty)=0 \quad ,Q(+\infty,y)=0$

$Q(-\infty,y)=0 \quad ,Q(x,-\infty)=0 \quad \forall x,y\in\Re$

ج- $\dfrac{\partial^2 Q(x,y)}{\partial x\partial y}+f_X(x).f_Y(y)\ge 0 \quad ,\forall x,y\in\Re$

مثال ۱: توزیع دو متغیرهٔ FGM را در نظر بگیرید.

$$F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)+\rho F_X(x)F_Y(y)\times \overline{F}_X(x)\overline{F}_Y(y)$$

که در آن $\overline{F}=1-F$ ، $-1\le\rho\le 1$.

ابراهیمی و قوش[6] (۱۹۸۱) ثابت کردند که اگر $-1\le\rho\le 0$ آنگاه $F(x,y)$ دارای خاصیت NQD است. بنابراین خانوادهٔ توزیعهای FGM برای $-1\le\rho\le 0$ یک خانوادهٔ کلی از توزیعهای دو متغیره با خاصیت NQD را معرفی می‌نماید.

در نتیجه خانوادهٔ توزیعهای FGM، زیرخانواده‌ای از G است. در مثال زیر چند عضو از این خانواده را معرفی می‌نماییم.

مثال ۲ : الف- فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی نمایی با پارامترهای λ_1,λ_2 باشند. خانوادهٔ توزیعهای FGM عبارت است از

$$F(x,y)=(1-e^{-\lambda_1 x})(1-e^{-\lambda_2 y})+$$
$$\rho e^{-\lambda_1 x-\lambda_2 y}(1-e^{-\lambda_1 x})(1-e^{-\lambda_2 y})$$

هرگاه $x,y\ge 0,\ \lambda_1,\lambda_2>0,\ -1\le\rho\le 1$.
اگر $-1\le\rho\le 0$ آنگاه تابع

$$Q(x,y)=\rho e^{-\lambda_1 x-\lambda_2 y}(1-e^{-\lambda_1 x})(1-e^{-\lambda_2 y})$$

در شرایط الف، ب و ج صدق می‌کند، لذا $F(x,y)$ دارای خاصیت NQD است.

ب- فرض کنید $X\sim Beta(\theta_1,1)$ و $Y\sim Beta(\theta_2,1)$ هرگاه $-1\le\rho\le 0,\ \theta_1,\theta_2\ge 1$ آنگاه

$$F(x,y)=x^{\theta_1}y^{\theta_2}+Q(x,y)$$

یک توزیع دو متغیره با خاصیت NQD است.

ج- فرض کنید X و Y دارای توزیع وایبل با پارامترهای $\alpha=1,\beta=2$ باشند. هرگاه $-1\le\rho\le 0$ و

$$Q(x,y)=\rho e^{-x^2-y^2}(1-e^{-x^2})(1-e^{-y^2})$$

آنگاه $F(x,y)=(1-e^{-x^2})(1-e^{-y^2})+Q(x,y)$ یک توزیع دو متغیره با خاصیت NQD است.

۳. تعمیم توزیع دو متغیرهٔ FGM

در این بخش توزیع دو متغیره FGM را برای چند خانواده خاص تعمیم می‌دهیم و در نتیجه اعضایی از G را معرفی خواهیم نمود. فرض کنید $X\sim U(0,1)$ و $Y\sim U(0,1)$ ، اگر $-1\le\rho\le 0$ آنگاه

$$F(x,y)=xy+\rho xy(1-x)(1-y), \qquad 0\le x,y\le 1$$

یک عضو از خانوادهٔ توزیعهای FGM است. در قضایای ۱و۲ این توزیع را تعمیم داده و اعضایی جدید از خانوادهٔ G را بدست می‌آوریم.

قضیهٔ ۱: فرض کنید $X\sim U(0,1)$ و $Y\sim U(0,1)$ و $Q(x,y)=\rho xy(1-x)^{\alpha}(1-y)^{\alpha}$ هرگاه $\alpha\ge 1$، $-1\le\rho\le 0$ ، آنگاه $F(x,y)=xy+Q(x,y)$ یک عضو از خانوادهٔ G است.

اثبات: برای اثبات، کافی است نشان دهیم $Q(x,y)$ در شرایط الف، ب و ج صدق می‌کند. شرایط الف و ب بدیهی است، لذا شرط ج را بررسی می‌نماییم.

[6] Ebrahimi – Ghosh

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = \rho y(1-y)^{\alpha}.h(x),$$

$$h(x) = (1-x)^{\alpha-1}(1-(\alpha+1)x)$$

تابع $h(x)$ در $x=0$ دارای ماکزیمم مقدار و در $x = \frac{2}{\alpha+1}$ دارای کمترین مقدار است. لذا داریم

$$\frac{\partial^2 Q(x,y)}{\partial x \partial y} = \rho\, h(x)h(y) \geq \rho h^2(0) \geq -1$$

در نتیجه

$$\frac{\partial^2 Q(x,y)}{\partial x \partial y} + f_X(x).f_Y(y) = \frac{\partial^2 Q(x,y)}{\partial x \partial y} + 1 \geq 0$$

بنابراین حکم برقرار است.

قضیهٔ ۲: فرض کنید $X \sim Beta(\theta_1, 1)$ و $Y \sim Beta(\theta_2, 1)$، $\alpha \geq 1$، $-1 \leq \rho \leq 0$، اگر

$$Q(x,y) = \rho\, x^{\theta_1} y^{\theta_2}(1-x^{\theta_1})^{\alpha}(1-y^{\theta_2})^{\alpha}$$

آنگاه $F(x,y) = x^{\theta_1}y^{\theta_2} + Q(x,y)$ عضو G است.

اثبات: تابع $Q(x,y)$ در شرایط الف و ب صدق می‌کند کافیست شرط ج را بررسی کنیم، داریم،

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = \rho y^{\theta_2}(1-y^{\theta_2})^{a}\theta_1 x^{\theta_1 -1}h(x)$$

که در آن

$$h(x) = (1-x^{\theta_1})^{\alpha-1}(1-(\alpha+1)x^{\theta_1})$$

تابع $h(x)$ دارای ماکزیمم مقدار در $x=0$ و دارای مینیمم مقدار در $x = \left(\frac{2}{\alpha+1}\right)^{\frac{1}{\theta_1}}$ است، لذا داریم،

$$\frac{\partial^2 Q(x,y)}{\partial x \partial y} = \rho\theta_1\theta_2 x^{\theta_1-1}y^{\theta_2-1}h(x)h(y) \geq$$

$$\rho\theta_1\theta_2 x^{\theta_1-1}y^{\theta_2-1}h^2(0) \geq -\theta_1\theta_2 x^{\theta_1-1}y^{\theta_2-1}$$

بنابراین

$$\frac{\partial^2 Q(x,y)}{\partial x \partial y} + f_X(x)f_Y(y) \geq 0$$

در نتیجه

$$F(x,y) = x^{\theta_1}y^{\theta_2} + Q(x,y)$$

برای هر $\alpha \geq 1$ عضو G است.

قضیهٔ ۳: در قضیهٔ ۱ فرض کنید

$Q(x,y) = \rho x^{\beta} y^{\beta}(1-x)^{\alpha}(1-y)^{\alpha}$، $-1 \leq \rho \leq 0$ و $\alpha \geq 1$ و $\beta \geq 1$ باشد، تابع دو متغیرهٔ $F(x,y) = xy + Q(x,y)$ عضو G است.

اثبات: برای اثبات کافی است $Q(x,y)$ در شرط (ج) صدق کند. داریم،

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = \rho y^{\beta}(1-y)^{\alpha}h(x)$$

هرگاه

$$h(x) = x^{\beta-1}(1-x)^{\alpha-1}[\beta - (\alpha+\beta)x]$$

تابع $h(x)$ در بازه $[0,1]$ دارای یک مقدار ماکزیمم نامنفی کمتر از یک و یک مقدار مینیمم منفی بیشتر از ۱- است. لذا داریم،

$$\frac{\partial^2 Q(x,y)}{\partial x \partial y} = \rho h(x)h(y) \geq \rho \geq -1$$

در نتیجه

$$\frac{\partial^2 Q(x,y)}{\partial x \partial y} + f_X(x)f_Y(y) \geq 0$$

بنابراین $F(x,y)$ عضو G است.

نتیجهٔ ۱: هرگاه $X \sim U(0,1)$ و $Y \sim U(0,1)$ و $\alpha \geq 1$ و $\beta \geq 1$ و $-1 \leq \rho \leq 0$،

$$F(x,y) = xy + \rho x^{\beta}y^{\beta}(1-x)^{\alpha}(1-y)^{\alpha}$$

آنگاه

$$\rho(X,Y) = 12\rho[Beta(\beta+1,\alpha+1)]^2$$
$$Cov(X,Y) = \rho[Beta(\beta+1,\alpha+1)]^2$$

نتیجهٔ ۲: هرگاه $X \sim Beta(\theta_1,1)$، $Y \sim Beta(\theta_2,1)$ و $\alpha \geq 1$، $-1 \leq \rho \leq 0$،

$$F(x,y) = x^{\theta_1}y^{\theta_2} + \rho\, x^{\theta_1}y^{\theta_2}(1-x^{\theta_1})^{\alpha}(1-y^{\theta_2})^{\alpha}$$

آنگاه

$$Cov(X,Y) = \rho Beta(\frac{1}{\theta_1}+1,\alpha)Beta(\frac{1}{\theta_2}+1,\alpha)\times$$
$$\left[1+\frac{(a+1)^2}{[1+(1+a)\theta_1][1+(1+a)\theta_2]}-(\alpha+1)\times \frac{\theta_1[1+(1+\alpha)\theta_2]+\theta_2}{[1+(1+\alpha)\theta_1][1+(1+\alpha)\theta_2]}\right]\leq 0 \Leftrightarrow \rho\leq 0$$

و

$$\rho(X,Y) = \rho Beta(\frac{1}{\theta_1}+1,\alpha)Beta(\frac{1}{\theta_2}+1,\alpha)\times$$
$$\frac{\sqrt{\theta_1\theta_2}(1+\theta_1)(1+\theta_2)}{\sqrt{(2+\theta_1)(2+\theta_2)}}\times$$
$$\left[1+\frac{(1+\alpha)^2}{[1+(1+\alpha)\theta_1][1+(1+\alpha)\theta_2]}-(1+\alpha)\frac{\theta_1[1+(1+\alpha)\theta_2]+\theta_2}{[1+(1+\alpha)\theta_1][1+(1+\alpha)\theta_2]}\right]$$

علاوه بر اعضای معرفی شده، با استفاده از توزیعهای دیگر می‌توان اعضای بیشتری از G را معرفی نمود.

مراجع

[1] Ebrahimi, N. and Ghosh, M., 1981. *Multivariate Negatively dependence*, Communications in Statistics Theory and Methods, A10(4), pp.307-337.

[2] Lai, C.D. and Xie, M., 2000. *A New Family of Positive Quadrant Dependent Bivariate Distribution,* Statistics and Probability Letters, 46, pp.359-364.

[3] Lehmann, E., 1966. *Some Concepts of dependence,* Annals of Mathematical Statistics, 73, pp.1137-1153.

آمار، روزی به اندازهٔ خواندن و نوشتن از ضروریات یک ملت پویا خواهد بود.