

یک راه حل کلی برای به دست آوردن کوتاهترین فاصله اطمینان در یک خانواده از توزیعها

فضل اله لک^۱ علیرضا نعمت الهی^۲

چکیده

برای به دست آوردن کوتاهترین فاصله اطمینان پارامترهای مجهول توزیعی که تکیه گاه آنها به پارامتر مجهول بستگی دارد، روشهایی در کتابهای کلاسیک آمار ریاضی و برخی مقالات ارائه شده است. در این مقاله یک راه حل مناسب کلی برای یافتن کوتاهترین فاصله اطمینان برای پارامترهای مجهول یک خانواده از توزیعها با تکیه گاه وابسته به پارامتر مجهول ارائه می شود.

مقدمه

مبحث فاصله اطمینان یا برآورد فاصله ای، یکی از مهمترین مباحث آماری است که کاربردهای گسترده ای در سایر علوم دارد. در این مبحث معمولاً یافتن کوتاهترین فاصله به نحوی که پارامتر مجهول را با ضریب اطمینان داده شده در برداشته باشد، مورد علاقه می باشد. چنین فاصله اطمینانی را کوتاهترین فاصله اطمینان می نامند. برای به دست آوردن کوتاهترین فاصله اطمینان روشهایی در کتابهای کلاسیک آمار ریاضی نظیر [۱ و ۳] و برخی مقالات نظیر [۲] وجود دارد. در منبع [۶] مثالهای متعدد و فراوانی از توزیعهای مختلف به همراه روشهایی برای یافتن کوتاهترین فاصله اطمینان برای پارامترهای مجهول ارائه شده است. در این مقاله سعی شده است با جمع بندی روشهای ارائه شده از این منبع و منابع دیگر، کوتاهترین فاصله اطمینان برای یک خانواده از توزیعهایی که تکیه گاه آنها به پارامترهای مجهول بستگی دارد، در قالب دو قضیه بیان شود.

فرض کنید $X_1, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی از یک توزیع با چگالی زیر باشد:

$$f(x|\theta) = \frac{g(x)}{h(\theta)}; a(\theta) < x < b(\theta)$$

وقتی که a یک تابع نزولی و h و b توابعی صعودی از θ باشند. آنگاه کوتاهترین فاصله اطمینان برای $h(\theta)$ با ضریب $(1-\alpha)$ عبارت است از:

$$\left[h(\hat{\theta}), h(\hat{\theta})a^{\frac{-1}{n}} \right]$$

که در آن

$$\hat{\theta} = \max(a^{-1}(Y_1), b^{-1}(Y_n))$$

و

$$Y_1 = \min(X_1, \dots, X_n), Y_n = \max(X_1, \dots, X_n)$$

^۱ بخش آمار و ریاضی، دانشگاه خلیج فارس

^۲ بخش آمار، دانشگاه شیراز

اثبات:

$$= \frac{n}{(h(\theta))^n} (h'(y))(h(y))^{n-1}; y < \theta.$$

ابتدا توجه کنید که

$$\left\{ \begin{matrix} a(\theta) < Y_1 \\ b(\theta) > Y_n \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} \theta > a^{-1}(Y_1) \\ \theta > b^{-1}(Y_n) \end{matrix} \right\}$$

بنابراین

$$\theta > \max(a^{-1}(Y_1), b^{-1}(Y_n))$$

با استفاده از قضیه فاکتورگیری می توان به راحتی نشان داد که

$$\hat{\theta} = \max(a^{-1}(Y_1), b^{-1}(Y_n))$$

یک آماره بسنده برای θ است. توجه کنید که $\hat{\theta}$ برآورد ML (درست‌نمایی ماکزیمم) برای θ نیز می باشد. تابع توزیع و تابع چگالی $\hat{\theta}$ به راحتی به صورت زیر به دست می آید:

$$F_{\hat{\theta}}(y) = p[\max(a^{-1}(Y_1), b^{-1}(Y_n)) \leq y]$$

$$= P[a^{-1}(Y_1) \leq y, b^{-1}(Y_n) \leq y]$$

$$= P[Y_1 \geq a(y), Y_n \leq b(y)]$$

$$= P[X_1 \geq a(y), X_1 \leq b(y); \forall i = 1, \dots, n]$$

$$= [P(a(y) \leq X_i \leq b(y))]^n$$

$$= \left[\int_{a(y)}^{b(y)} f(x_i | \theta) dx_i \right]^n = \left[\int_{a(y)}^{b(y)} \frac{g(x_i)}{h(\theta)} dx_i \right]^n$$

$$= \left(\frac{1}{h(\theta)} \right)^n \left[\int_{a(y)}^{b(y)} g(x_i) dx_i \right]^n$$

$$= \frac{1}{(h(\theta))^n} (h(y))^n.$$

بنابراین

$$F_{\hat{\theta}}(y) = \left(\frac{h(y)}{h(\theta)} \right)^n, y < \theta$$

و در نتیجه

$$f_{\hat{\theta}}(y) = \frac{d}{dy} \left(\frac{h(y)}{h(\theta)} \right)^n$$

حال ثابت می کنیم که $Q = h(\hat{\theta})/h(\theta)$ دارای توزیع بتا با پارامترهای n و 1 است. ابتدا توجه کنید که اگر $w = h(\hat{\theta})$ ، آنگاه $\hat{\theta} = h^{-1}(w)$

$$f_w(w) = f_{\hat{\theta}}(h^{-1}(w)) \left| \frac{d(\hat{\theta})}{dw} \right|$$

$$= \frac{n}{(h(\theta))^n} [h'(h^{-1}(w))] [h(h^{-1}(w))]^{n-1} \left| \frac{dh^{-1}(w)}{dw} \right|$$

$$= \frac{n}{(h(\theta))^n} h'(h^{-1}(w)) w^{n-1} \frac{1}{h(h^{-1}(w))}$$

$$= \frac{nw^{n-1}}{(h(\theta))^n}$$

(h تابعی صعودی است). حال توجه کنید که $Q = W/h(\theta)$

$$f_Q(q) = f_w(qh(\theta)) \cdot h(\theta)$$

$$= \frac{nq^{n-1} (h(\theta))^{n-1}}{(h(\theta))^n} \cdot h(\theta); 0 < q < 1$$

$$= nq^{n-1}; 0 < q < 1$$

بنابراین Q دارای توزیع بتا با پارامتر n و 1 و یک تابع محوری است. حال باید a و b را طوری پیدا کنیم که

$$p(a < Q < b) = 1 - \alpha$$

در نتیجه

$$\int_a^b nq^{n-1} dq = 1 - \alpha \Rightarrow$$

$$b^n - a^n = 1 - \alpha$$

اگر $0 < a < b < 1$ باشد، آنگاه

$$p \left[a < \frac{h(\hat{\theta})}{h(\theta)} < b \right] =$$

مثال ۲:

فرض کنید $X_1, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی از تابع چگالی زیر باشد:

$$f(x|\theta) = \frac{1}{2\theta} I_{[-\theta, \theta]}(x)$$

در این حالت با استفاده از قضیه ۱ داریم:

$$b(\theta) = \theta, a(\theta) = -\theta, h(\theta) = 2\theta, g(x) = 1$$

می توان نشان داد که $\hat{\theta} = \max(-Y_1, Y_n)$ برآورد ML و $\hat{\theta}/\theta$ دارای توزیع بتا با پارامترهای n و ۱ است. پس با توجه به رابطه زیر

$$p\left(2\theta \in (2\hat{\theta}, 2\hat{\theta}\alpha^{\frac{1}{n}})\right) = p\left(\theta \in (\hat{\theta}, \hat{\theta}\alpha^{\frac{1}{n}})\right)$$

کوتاهترین فاصله اطمینان برای θ عبارت است از:

$$\left(\hat{\theta}, \hat{\theta}\alpha^{\frac{1}{n}}\right)$$

مثال ۳:

فرض کنید $X_1, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی از تابع چگالی زیر باشد:

$$f(x|\theta) = \frac{2x}{\theta^2} I_{(0, \theta]}(x)$$

با استفاده از قضیه ۱ داریم:

$$b(\theta) = \theta, a(\theta) = 0, h(\theta) = \theta^2, g(x) = 2x$$

و $\hat{\theta} = Y_n$ یک آماره بسنده و برآورد ML برای θ می باشد. در نتیجه کوتاهترین فاصله اطمینان $(1-\alpha) \cdot 100$ درصدی برای θ^2 به صورت زیر است:

$$\left(Y_n^2, Y_n^2\alpha^{\frac{1}{n}}\right)$$

مثال ۴:

فرض کنید $X_1, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی از تابع چگالی زیر باشد:

$$f(x|\theta) = \frac{\theta}{(\theta-1)x^2} I_{(1, \theta)}(x)$$

بنا به قضیه ۱ در این مسئله

$$p\left[\frac{h(\hat{\theta})}{b} < h(\theta) < \frac{h(\hat{\theta})}{a}\right] = 1-\alpha.$$

پس طول فاصله اطمینان برابر مقدار زیر می باشد:

$$L = h(\hat{\theta})\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)$$

حال باید این طول را با توجه به محدودیت

$$b^n - a^n = 1 - \alpha$$

مینیم کنیم. به آسانی می توان نشان داد که

$$a = \alpha^{\frac{1}{n}}, b = 1$$

حال با جایگذاری این مقادیر در رابطه بالا داریم:

$$p\left[h(\hat{\theta}) < h(\theta) < h(\hat{\theta})\alpha^{\frac{1}{n}}\right] = 1 - \alpha$$

لذا حکم ثابت است. به مثالهای زیر توجه کنید.

مثال ۱:

فرض کنید $X_1, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی از تابع چگالی زیر

باشد:

$$f(x|\theta) = \frac{1}{\theta} I_{(0, \theta]}(x)$$

کوتاهترین فاصله اطمینان برای θ را به دست آورید.

حل:

با استفاده از قضیه ۱ داریم:

$$a(\theta) = 0, b(\theta) = \theta, h(\theta) = \theta, g(x) = 1$$

و

$$\hat{\theta} = Y_n$$

بنابراین فاصله

$$\left(Y_n, Y_n\alpha^{\frac{1}{n}}\right)$$

کوتاهترین فاصله اطمینان $(1-\alpha) \cdot 100$ درصدی برای θ است.

که در آن a یک تابع صعودی و h و b توابعی نزولی از θ باشند. آنگاه کوتاهترین فاصله اطمینان برای $h(\theta)$ با ضریب $(1-\alpha)$ عبارت است از:

$$\left[h(\hat{\theta}), h(\hat{\theta})\alpha^{\frac{-1}{n}} \right]$$

که در آن

$$\hat{\theta} = \min(a^{-1}(Y_1), b^{-1}(Y_n))$$

و

$$Y_1 = \min(X_1, \dots, X_n), Y_n = \max(X_1, \dots, X_n)$$

اثبات:

در اینجا نیز مانند اثبات قضیه ۱، $\hat{\theta} = \min(a^{-1}(Y_1), b^{-1}(Y_n))$ آماره بسنده و برآورد ML برای θ است که تابع توزیع به صورت زیر به دست می آید:

$$\begin{aligned} F_{\hat{\theta}}(y) &= 1 - [p(a(y) \leq X_i \leq b(y))]^n \\ &= 1 - \frac{1}{(h(\theta))^n} (h(y))^n; y > \theta \end{aligned}$$

در نتیجه

$$f_{\hat{\theta}}(y) = -\frac{n}{(h(\theta))^n} (h'(y))(h(y))^{n-1}; y > \theta$$

فرض کنید $w = h(\hat{\theta})$. در این صورت:

$$\begin{aligned} f_w(w) &= f_{\hat{\theta}}(h^{-1}(w)) \left| \frac{d(\hat{\theta})}{dw} \right| \\ &= -\frac{n}{(h(\theta))^n} [h'(h^{-1}(w))] [h(h^{-1}(w))]^{n-1} \left| \frac{dh^{-1}(w)}{dw} \right| \\ &= -\frac{n}{(h(\theta))^n} h'(h^{-1}(w)) w^{n-1} \left(-\frac{1}{h(h^{-1}(w))} \right) \\ &= \frac{nw^{n-1}}{(h(\theta))^n} \end{aligned}$$

اگر $Q = h(\hat{\theta})/h(\theta)$ آنگاه

$$f_Q(q) = \frac{nq^{n-1}(h(\theta))^{n-1}}{(h(\theta))^n} \cdot h(\theta); 0 < q < 1$$

$$h(\theta) = \frac{1-\theta}{\theta}, g(x) = \frac{1}{x^2}$$

به سادگی نشان داده می شود که h تابعی صعودی از θ است و $b(\theta) = \theta$ و $\hat{\theta} = Y_n$ برآورد ML و آماره بسنده برای θ می باشد. بنابراین کوتاهترین فاصله اطمینان برای $h(\theta)$ به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} p\left(\frac{Y_n-1}{y_n} < \frac{\theta-1}{\theta} < \frac{Y_n-1}{Y_n} \alpha^{\frac{-1}{n}}\right) \\ &= p\left(\frac{1-Y_n}{Y_n} \alpha^{\frac{-1}{n}} < \frac{1}{\theta} - 1 < \frac{1-Y_n}{Y_n}\right) \\ &= p\left(\frac{1-Y_n}{Y_n} \alpha^{\frac{-1}{n}} + 1 < \frac{1}{\theta} < \frac{1-Y_n}{Y_n} + 1\right) \\ &= p\left(\frac{(1-Y_n)\alpha^{\frac{-1}{n}} + Y_n}{Y_n} < \frac{1}{\theta} < \frac{1}{Y_n}\right) \\ &= p\left(Y_n < \theta < \frac{Y_n}{(1-Y_n)\alpha^{\frac{-1}{n}} + Y_n}\right) \\ &= 1-\alpha \end{aligned}$$

پس کوتاهترین فاصله اطمینان $(1-\alpha) \cdot 100$ درصدی برای θ به صورت زیر است:

$$\left[Y_n, \frac{Y_n}{(1-Y_n)\alpha^{\frac{-1}{n}} + Y_n} \right]$$

قضیه ۱ را می توان درحالتی که $a(\theta)$ یک تابع صعودی و b و h توابعی نزولی از θ باشند، نیز اثبات کرد.

قضیه ۲

فرض کنید $X_1, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از تابع چگالی زیر باشد:

$$f(x|\theta) = \frac{g(x)}{h(\theta)}; a(\theta) < x < b(\theta)$$

مثال ۵ را می توان به حالت کلی زیر تعمیم داد.

$$= nq^{n-1}; 0 < q < 1$$

مثال ۶: مشابه حالت قبل کوتاهترین فاصله اطمینان $(1-\alpha) \cdot 100$ درصدی

برای $h(\theta)$ به صورت زیر می باشد: فرض کنید $X_1, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی از تابع چگالی زیر باشد:

$$f(x|\theta) = \frac{k\theta^k}{x^{k+1}}; \theta < x, \theta > 0, k > 0$$

$$\left(h(\hat{\theta}), h(\hat{\theta}) \cdot \alpha^{\frac{1}{n}} \right)$$

طبق قضیه داریم:

به مثال زیر در این زمینه توجه کنید.

مثال ۵:

$$\hat{\theta} = Y_1, a(\theta) = \theta, h(\theta) = \frac{1}{\theta^k}, g(x) = \frac{k}{x^{k+1}}$$

پس کوتاهترین فاصله اطمینان $(1-\alpha) \cdot 100$ درصدی

فرض کنید $X_1, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از تابع چگالی زیر باشد:

$$h(\theta) = \frac{1}{\theta^k} \text{ به صورت زیر به دست می آید:}$$

$$f(x|\theta) = \frac{\theta}{x^2} I_{(\theta, \infty)}(x)$$

طبق قضیه ۲ داریم:

$$P\left(\frac{1}{Y_1^k} < \frac{1}{\theta^k} < \frac{1}{Y_1^k} \alpha^{\frac{1}{n}}\right) = 1 - \alpha$$

در نتیجه

$$\hat{\theta} = Y_1, a(\theta) = \theta, h(\theta) = \frac{1}{\theta}, g(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$P\left(Y_1^k \alpha^{\frac{1}{n}} < \theta^k < Y_1^k\right) = 1 - \alpha$$

پس کوتاهترین فاصله اطمینان $(1-\alpha) \cdot 100$ درصدی برای $h(\theta) = \frac{1}{\theta}$ به صورت زیر است:

$$P\left(Y_1^k \alpha^{\frac{1}{kn}} < \theta < Y_1\right) = 1 - \alpha$$

بنابراین کوتاهترین فاصله اطمینان $(1-\alpha) \cdot 100$ درصدی برای θ عبارت است از:

$$\left(Y_1 \alpha^{\frac{1}{kn}}, Y_1 \right)$$

$$P\left(\frac{1}{Y_1} < \frac{1}{\theta} < \frac{1}{Y_1} \alpha^{\frac{1}{n}}\right) = 1 - \alpha$$

$$\Rightarrow P\left(Y_1 \alpha^{\frac{1}{n}} < \theta < Y_1\right) = 1 - \alpha$$

بنابراین کوتاهترین فاصله اطمینان $(1-\alpha) \cdot 100$ درصدی برای θ عبارت است از:

$$\left(Y_1 \alpha^{\frac{1}{n}}, Y_1 \right)$$

مراجع

[۱] پارسیان، احمد، ۱۳۷۸، مبانی آمار ریاضی، انتشارات دانشگاه صنعتی اصفهان.

[2] Kosmas K. Ferentions, 1990, *Shortest Confidence Intervals for Families of Distributions Involving Truncation Parameters*, The America Statistician, vol. 44, No. 2.

[3] Rohatgi, V.K., 1984, *Statistical Inference*, John Wiley and Sons, New York.