چند شگفتانه احتمالاً سرگرم کننده

ناصر رضا ارقامی*

موضوع این مقاله ارائهٔ چند مثال از موارد متعددی در مسائل احتمال است که در آنها اغلب جوابی که به طور شهودی برای مسأله ارائه می‌شود با جواب صحیح مسأله که پس از مطالعه، تعمق و محاسبه به دست می‌آید مغایرت دارد.

منظور نگارنده از «شهود» معادل کلمهٔ انگلیسی «intuition» است که در فرهنگ انگلیسی آکسفورد به صورت زیر تعریف شده است:

«توانایی فهمیدن یا پی بردن به چیزی به سرعت و بدون توسل آگاهانه به استدلال، مطالعه یا محاسبه»[1]

همهٔ ما کم و بیش با مواردی مواجه شده‌ایم که به سرعت به جواب مسأله‌ای پی برده‌ایم یا صحت قضیه‌ای برای ما بدیهی بوده است بدون اینکه به سادگی قادر به توجیه این درک مستقیم بوده باشیم. قبلاً معادل بودن دو نامساوی جبری $|x| \le c$ و $-c \le x \le c$ برای دانشجویان بدیهی به نظر می‌رسد ولی کسانی که ریاضی عمومی تدریس کرده‌اند می‌دانند بسیاری از دانشجویان برای اثبات آن دچار مشکل می‌شوند و گاهی برهانی نادرست یا ناقص ارائه می‌کنند.

ارزش شهود در حل مسائل ریاضی غیرقابل انکار است. درک شهودی یک مسأله اگر سریعاً منجر به یافتن جواب آن نشود باعث می‌شود که دست کم راه حل مسأله را بیابیم یا حداقل در جهت درست به حل مسأله اقدام کنیم.

شاید بتوان گفت که درک شهودی نتیجهٔ استنتاجها و محاسبات ناآگاهانهٔ مغز بر مبنای تجربیات گذشته در زمینهٔ مربوط است. امّا باید گفت که اتکای کامل به جوابهای شهودی و اطمینان از صحت آنها، هر چند بدیهی به نظر برسند، کار درستی نیست، زیرا مواردی هست که درک شهودی ما را کاملاً به اشتباه می‌اندازد. مثال مورد علاقهٔ نگارنده که بارها، امتحان شده و گمراه کنندگی خود را به اثبات رسانده است این است که:

با یک محاسبهٔ کوتاه می‌توان نشان داد که اگر به محیط دایره‌ای که محیط آن ۵۰ متر است یک متر اضافه کنیم، به شعاع آن تقریباً ۱۶ سانتیمتر اضافه می‌شود. حال فرض کنید به محیط دایره‌ای به بزرگی دایرهٔ عظیمهٔ کرهٔ زمین (که محیط آن تقریباً ۴۰ هزار کیلومتر است) یک متر اضافه کنیم و مقداری را که به شعاع آن اضافه می‌شود با d نشان دهیم. مقدار d به کدام یک از مقادیر زیر نزدیکتر است؟

□ یک آنگستروم □ یک میکرون □ یک میلیمتر □ یک سانتیمتر

اگر اولین بار است که با این مسأله مواجه می‌شوند، با احتمال قریب به یقین از نادرستی جواب سریع خود شگفت زده خواهید شد.

به عنوان مثالی دیگر، کمتر کسی می‌تواند بدون محاسبه باور کند که سریعترین کامپیوتر موجود برای محاسبهٔ دترمینان یک ماتریس ۲۵ × ۲۵، مستقیماً از تعریف دترمینان، یعنی از فرمول $\sum \pm a_{1j_1}, a_{2j_2}, \ldots, a_{nj_n}$،

*) گروه آمار، دانشگاه فردوسی مشهد

۱) در لغتنامهٔ دهخدا معانی زیر (علاوه بر معانی دیگر) برای کلمهٔ «شهود» ارائه شده است: «حاضر آمدن ـ پیدا شدن ـ دیدن ـ عیان شدن ـ آشکار شدن و (در اصطلاح اهل سلوک) رفع حجاب از روح جسمانی».

(با این فرض که بتواند 10^{12} عمل ضرب یا جمع را در یک ثانیه انجام دهد) به بیش از ۱۲ میلیون سال وقت نیاز دارد.

گمراه‌کنندگی شهود در مسائل احتمال بسیار فراوانتر است، شاید به این دلیل که کسب تجربهٔ عملی در مسائل احتمال مستلزم تکرار و در نتیجه مشکلتر است. یک مثال در این زمینه مسألهٔ معروف و مقدماتی انطباق روزهای تولد لااقل دو نفر در یک جمع n نفری است. در این مسأله سؤال این است که «در یک جمع n نفری که هیچگونه اطلاعی دربارهٔ تاریخ تولد آنها نداریم، n دست کم چه مقدار باید باشد تا احتمال اینکه لااقل دو نفر دارای یک روز تولد باشند بیش از ۵۰٪ باشد؟» جواب غیرمنتظرهٔ این مسأله $n = ۲۳$ است. یعنی در یک جمع ۲۳ نفری بیش از ۵۰٪ احتمال دارد که لااقل دو نفر یک روز تولد داشته باشند. جالبتر اینکه احتمال همین پیشامد در یک جمع ۴۶ نفری تقریباً ۹۵٪ است. (ضمیمه را ملاحظه نمایید.)

مسألهٔ دیگری که جواب آن بر خلاف تصور ماست این است که در یک مبارزهٔ سه نفره که هر یک قرار است دو نفر دیگر را با تیراندازی از بین ببرد، بیشترین احتمال زنده ماندن از آن کسی است که مهارتش در تیراندازی از دو نفر دیگر کمتر است! صورت مسأله به شکل دقیقتر چنین است که سه نفر a، b و c، که در هر بار تیراندازی احتمال اصابت تیرشان به هدف به ترتیب برابر p_1، p_2 و p_3، $(p_1 > p_2 > p_3)$ است، در سه رأس یک مثلث متساوی‌الاضلاع بر یک زمین مسطح قرار دارند و هر یک به نوبت به سوی یکی از دو نفر دیگر (هرکدام که بخواهند) یک تیر رها می‌کنند تا اینکه نهایتاً یک نفر زنده بماند. شخصی که تیراندازی را شروع می‌کند به طور تصادفی به وسیلهٔ داور تعیین می‌گردد. با مفروضات فوق می‌توان نشان داد (ضمیمه را ملاحظه کنید) که احتمال زنده ماندن c از دو نفر دیگر بیشتر است.

گاهی ساده‌ترین مسائل احتمال درک شهودی ما را به مبارزه می‌طلبند. مثلاً فرض کنید در ظرفی سه سکه وجود دارد که هر دو طرف سکه اول شیر و هر دو طرف سکهٔ دوم خط است و سکهٔ سوم معمولی است به این معنی که یک طرف آن شیر و طرف دیگر خط است. یکی از سه سکه را به طور تصادفی برمی‌داریم و آن را (بدون اینکه طرف دیگر سکه را ببینیم) روی میز قرار می‌دهیم و ملاحظه می‌کنیم که طرف قابل رؤیت سکهٔ انتخاب شده شیر است. سؤال این است که «احتمال اینکه طرف دیگر سکه نیز شیر باشد چقدر است؟».

تقریباً همهٔ کسانی که برای اولین بار با این مسأله مواجه می‌شوند چنین استدلال می‌کنند که «با توجه به اینکه طرف قابل رؤیت سکه شیر است، این سکه نمی‌تواند سکهٔ دوم باشد، پس احتمال اینکه طرف دیگر سکه نیز شیر باشد، (یعنی احتمال اینکه سکهٔ اول انتخاب شده باشد) برابر $\frac{1}{2}$ است». امّا واقعیت غیر از این است. در حقیقت احتمال مطلوب برابر $\frac{2}{3}$ است. اگر این جواب به نظر شما درست نمی‌رسد ضمیمه را ملاحظه نمایید.

مسأله‌ای مشابه مسألهٔ بالا که از ظاهر جالب توجه‌تری برخوردار است و در نشریهٔ فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی (شمال ۱۳ سال ۱۳۷۳ ترجمهٔ آقای احمد پزشک) تحت عنوان «مسألهٔ اتومبیل و بزها» آمده است (با کمی دستکاری در صورت مسأله) چنین است:

مجری یک مسابقهٔ تلویزیونی سه کمد (گنجه) در بسته را به شرکت کننده نشان می‌دهد و ضمن اظهار اینکه یکی از دو کمد حاوی جایزه‌ای نفیس است و دو کمد دیگر خالی است، از شرکت کننده می‌خواهد که یک کمد را انتخاب کند و اضافه می‌کند در صورتی که کمد انتخابی وی حاوی جایزه باشد، برندهٔ جایزه خواهد بود. پس از آنکه شرکت کننده انتخاب خود را به اطلاع مجری می‌رساند، مجری (قبل از آنکه کمد انتخاب شده را بگشاید) یکی از دو کمد دیگر را (آن را که حاوی جایزه نیست) می‌گشاید و پوچ بودن آن را به شرکت کننده و حضار نشان می‌دهد و اظهار می‌دارد که شرکت کننده در صورت تمایل می‌تواند انتخاب خود را تغییر داده و کمد ناگشودهٔ دیگر را برگزیند. سؤال این است که «آیا بهتر است شرکت‌کننده انتخاب خود را تغییر دهد یا به انتخاب اولیهٔ خود وفادار باقی بماند؟»

جواب سریع و مبتنی بر درک شهودی که معمولاً به این مسأله داده می‌شود این است که «فرقی نمی‌کند، چون با خارج شدن یکی ازکمدها از صحنهٔ بازی، احتمال اینکه هر یک از دوکمد دیگر حاوی جایزه باشد مساوی و برابر $\frac{1}{2}$ است». اما چنین نیست! در واقع به طور متوسط کمد انتخاب اوّلیه با احتمال $\frac{1}{3}$ و کمد دیگر با احتمال $\frac{2}{3}$ حاوی جایزه است. دو نوع استدلال برای اثبات این مطلب در ضمیمه آمده است.

ضمیمه: توضیحات

مسألهٔ انطباق روزهای تولد. با فرض اینکه روز تولد هیچ یک از افراد گروه n نفری ۳۰ام اسفند نباشد، احتمال اینکه هیچ دو نفر از n نفر روز تولد مشترک نداشته باشند برابر است با

$$p(n) = N(N-1)\times\ldots\times(N-n+1)/N^n = N!/[(N-n)!N^n]$$

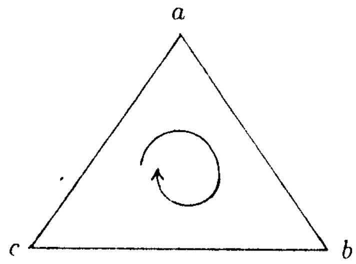
که در آن $N = ۳۶۵$. با استفاده از تقریب استرلینگ $(K! = \sqrt{2K\pi}K^k e^{-k})$ می‌توان نوشت

$$p(n) \approx (N-n+\frac{1}{2})[\ln N - \ln(N-n)] - n$$

که با مقدارگذاری داریم:

$$1 - p(46) \approx 0{,}95 \quad , \quad 1 - p(23) \approx 0{,}51$$

مسألهٔ مبارزه سه نفره. سه نفر a، b و c را مطابق شکل در نظر بگیرید و فرض کنید که نوبت تیراندازی در جهت حرکت عقربه‌های ساعت می‌چرخد. سه پیشامد A، B و C را به ترتیب زنده‌ماندن a، b و c تعریف می‌کنیم.



سه پیشامدهای شروع تیراندازی به وسیله a، b و c را به ترتیب با S_a، S_b و S_c نشان می‌دهیم. بدیهی است که

$$P(A) = \frac{1}{3}P(A|S_a) + \frac{1}{3}P(A|S_b) + \frac{1}{3}P(A|S_c)$$

با توجه به این نکتهٔ بدیهی که مادام که هر سه تیرانداز زنده‌اند، نوبت تیراندازی به هر کدام که می‌رسد، برای افزایش احتمال زنده ماندن خود باید به سمت تیرانداز ماهرتر تیراندازی کند، روابط برگشتی زیر را می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} P(A|S_a) &= p_1[\bar{p}_3 p_1 + \bar{p}_3(\bar{p}_1\bar{p}_3)p_1 + \dots] + \bar{p}_1 P(A|S_b) \\ &\quad p_1^2\bar{p}_3/(1 - \bar{p}_2\bar{p}_3) + \bar{p}_1 P(A|S_b), \\ P(A|S_b) &= \bar{p}_2 P(A|S_b), \\ P(A|S_c) &= \bar{p}_3 P(A|S_a) \end{aligned}$$

از سه معادله سه مجهولی فوق خواهیم داشت

$$P(A|S_a) = p_1^2\bar{p}_3/[q(1 - \bar{p}_1\bar{p}_3)]$$
$$P(A|S_b) = p_1^2\bar{p}_2\bar{p}_3^2/[q(1 - \bar{p}_1\bar{p}_3)]$$
$$P(A|S_c) = p_1^2\bar{p}_3^2/[q(1 - \bar{p}_1\bar{p}_3)]$$

که در آنها $\bar{p}_i = 1 - p_i$، $i = 1, 2, 3$ و $q = 1 - \bar{p}_1\bar{p}_2\bar{p}_3$. در نتیجه داریم

$$P(A) = \frac{1}{3}p_1^2\bar{p}_3(1 + \bar{p}_3 + \bar{p}_2\bar{p}_3)/[q(1 - \bar{p}_1\bar{p}_3)]$$

به طور مشابه احتمال زنده ماندن b و c به ترتیب زیر

$$\begin{aligned} P(B) &= \frac{1}{3}p_2[p_3(1 + \bar{p}_1)/(1 - \bar{p}_2\bar{p}_3) \\ &\quad + \frac{1}{q}(1 + \bar{p}_2 + \bar{p}_1\bar{p}_3)(p_3 + \bar{p}_1 p_2 \bar{p}_3^2)/(1 - \bar{p}_2\bar{p}_3)] \\ P(C) &= \frac{1}{3}p_3\Big\{(p_2 + \bar{p}_2 p_3 + \bar{p}_2 p_3)/(1 - \bar{p}_2\bar{p}_3) \\ &\quad + \frac{1}{q}(1 + \bar{p}_3 + \bar{p}_2\bar{p}_3) \\ &\quad [(p_1/(1 - \bar{p}_1\bar{p}_3) + \bar{p}_1(p_2 + \bar{p}_2 p_3)/(1 - \bar{p}_2\bar{p}_3)]\Big\} \end{aligned}$$

به دست می‌آید.

حال اگر برای مثال $p_1 = 0{,}8$ ،$p_2 = 0{,}5$ ،$p_3 = 1$ باشد داریم

$$P(A) = 0{,}267, \qquad P(B) = 0{,}326, \qquad P(C) = 0{,}437$$

که مؤید ادعاست.

ظرف حاوی سه سکه. فضای نمونهٔ آزمایش تصادفی مربوط دارای شش برآمد متمایز هم احتمال به صورت

$$\Omega = \{H_1, H_2, T_1, T_2, H', T'\}$$

است که حروف H و T به ترتیب نشان دهندهٔ شیر و خط هستند و حروف دارای پریم نشان دهندهٔ دو روی سکه سوم‌اند. احتمال مطلوب عبارت است از $P(B|A)$ که $A = \{H_1, H_2, H'\}$ و $B = \{H_1, H_2\}$. بدیهی است که

$$P(B|A) = P(A\cap B)/P(A) = P(B)/P(A) = \frac{2}{6}/\frac{3}{6} = \frac{2}{3}$$

مسألهٔ مسابقهٔ تلویزیونی. به نظر نگارنده کاملاً بدیهی است که شرکت کننده باید انتخاب خود را عوض کند، چون احتمال اینکه جایزه در کمد انتخابی وی باشد برابر $\frac{1}{3}$ و احتمال اینکه جایزه در یکی از دو کمد دیگر باشد برابر $\frac{2}{3}$ است!

امّا برای متقاعد کردن خوانندگان دیر باورتر سه کمد را با a، b و c نامگذاری می‌کنیم که a کمدی است که شرکت کننده انتخاب نموده است. فرض کنید A، B و C به ترتیب پیشامدهای جایزه‌دار بودن کمدهای a، b و c باشند. بدیهی است که $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{3}$. حال فرض کنید که مجری کمد b را می‌گشاید و نشان می‌دهد که فاقد جایزه است. می‌خواهیم، در پرتو اطلاعی که مجری با گشودن کمد b در اختیار ما قرار می‌دهد، احتمال شرطی جایزه‌دار بودن کمد c را حساب کنیم. این احتمال را با $P(C|H_b)$ نشان می‌دهیم که در آن «مجری کمد b را می‌گشاید» $= H_b$. در صورتی که مجری کمد c را باز کند، احتمال مطلوب $P(B|H_c)$ است که «مجری کمد c را می‌گشاید» $= H_c$.

بدیهی است که $P(H_b|C) = P(H_c|B) = 1$. فرض کنید $P(H_b|A) = p$ و $P(H_c|A) = q = 1 - p$ که $0 \le p \le 1$ و مقادیر p و q می‌تواند بر شرکت کننده معلوم یا مجهول باشد. می‌توان نوشت

$$P(H_b) = P(H_b|A)P(A) + P(H_b|C)P(C) = \frac{1}{3}p + \frac{1}{3}$$
$$P(H_c) = P(H_c|A)P(A) + P(H_c|B)P(B) = \frac{1}{3}q + \frac{1}{3}$$

پس

$$P(A|H_b) = P(H_b|A)P(A)/P(H_b) = p/(1 + p)$$
$$P(C|H_b) = P(H_b|C)P(C)/P(H_b) = 1/(1 + p)$$

به طور مشابه $P(A|H_c) = q/(1+q)$ و $P(B|H_c) = 1/(1+q)$ به دست می‌آیند، که اگر $p,q < 1$ داریم

$$P(A|H_b) < P(C|H_b)$$

و

$$P(A|H_c) < P(B|H_c)$$

یعنی در هر دو صورت بهتر است شرکت کنند، انتخاب خود را عوض کند.

حال اگر شرکت کننده از استراتژی مجری در بازکردن جعبه‌ها (یعنی از احتمالات p و q) بی‌اطلاع باشد، باید متوسط احتمالات فوق را مقایسه کرد.

چون

$$\frac{p}{1+p} \times (\frac{1}{3}p + \frac{1}{3}) + \frac{q}{1+q}(\frac{1}{3}q + \frac{1}{3}) = \frac{1}{3}$$

و

$$\frac{1}{1+p} \times (\frac{1}{3}p + \frac{1}{3}) + \frac{1}{1+q}(\frac{1}{3}q + \frac{1}{3}) = \frac{2}{3}$$

می‌توان گفت که اگر شرکت کننده انتخاب خود را تغییر ندهد به طور متوسط با احتمال $\frac{1}{3}$ و اگر انتخاب خود را تغییر دهد به طور متوسط با احتمال $\frac{2}{3}$ جایزه را خواهد برد.

آماره‌های بسنده

جیمی سه‌ویج (Jimmie Savage) و من (پل هالموس) در نوشتن مقاله‌ای همکاری کردیم که در محافل آماری اشتهار بسیار یافت. این همکاری با پرسشی اتفاقی از طرف جیمی دربارهٔ احتمالهای شرطی آغاز شد. در آن روزها من دل درگرو نظریهٔ اندازه (و نیز کتاب نظریهٔ اندازه که در حال نوشتنش بودم) داشتم، و نظریهٔ اندازه تنها راهی است که ظرافتهای احتمالهای شرطی را می‌توان به کمک آن روشن و دقیق کرد. جیمی به من آماره‌های بسنده را یاد داد و من به او قضیهٔ رادون ـ نیکودیم را آموختم؛ رابطهٔ این دو موضوع، چیزی بود که منجر به نوشتن مقالهٔ مشترکمان شد.

ترجمه از کتاب I want to be a mathematician اثر پل هالموس.

ترجمهٔ م. ق. و. ا