

مروری بر توزیع اسلش و توزیع‌های وابسته

عاطفه کارمی^۱

تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۸/۲

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۶/۲۶

چکیده:

نقش اصلی در نمودارهای زنگوله‌ای شکل را توزیع نرمال بازی می‌کند، اما محققان همیشه علاقه‌مند به ساختن توزیع‌های مشابه توزیع نرمال هستند. بدین منظور توزیع‌های انعطاف‌پذیری را به‌عنوان جایگزین توزیع نرمال معرفی کرده‌اند. در این مقاله به معرفی برخی از این توزیع‌ها پرداخته می‌شود. نخست به معرفی توزیع اسلش که خانواده‌ای از توزیع‌های آمیخته‌مقیاس نرمال است پرداخته می‌شود، این توزیع دارای دم سنگین تری نسبت به توزیع نرمال است و همین ویژگی باعث می‌شود که توزیع اسلش به‌عنوان جایگزین مناسبی برای توزیع نرمال شناخته شود. پس از آن توزیع اسلش چوله را معرفی می‌شود. در ادامه توزیع جدید اسلش تغییر یافته را معرفی و سپس توزیع اسلش تغییر یافته چوله بیان می‌شود. برخی از ویژگی‌های این توزیع‌ها مانند نمایش تصادفی، تابع چگالی، گشتاورها نیز بررسی شده‌اند. برای تشریح بیشتر مطالب یک مثال ارائه می‌شود.

واژه‌های کلیدی: توزیع اسلش، توزیع اسلش تغییر یافته، دم سنگین.

۱ مقدمه

تغییر یافته چوله پرداخته و برخی از ویژگی‌های این توزیع‌ها بیان می‌شود. در سال‌های اخیر محققان زیادی توزیع اسلش را مورد بررسی قرار داده‌اند. [۳] تعمیمی از توزیع اسلش را با استفاده از توزیع توان آمیخته مقیاس معرفی کرد؛ [۱] تعمیمی از توزیع اسلش چندمتغیره را بیان و بررسی کرده‌اند، [۴] خانواده‌ای از توزیع اسلش را به وسیله ساختارهای بیضوی معرفی کرده‌اند. [۵] تعمیمی از توزیع اسلش که دارای دم سنگین تری بود را با عنوان توزیع اسلش تغییر یافته بیان کرده و پس از آن، بر اساس تعریفی که آزالینی برای توزیع نرمال چوله ارائه کرده است [۲]، توزیع اسلش تغییر یافته چوله را معرفی کردند. در بخش ۲ به معرفی توزیع اسلش و توزیع اسلش چوله پرداخته و تابع چگالی و برخی از ویژگی‌های آن بیان می‌شود. در بخش ۳ توزیع اسلش تغییر یافته را معرفی کرده و ویژگی‌های آن، مانند نمایش تصادفی، تابع چگالی احتمال و گشتاورهای این توزیع مورد بررسی قرار می‌گیرد. در ادامه به برآوردیابی پارامترهای توزیع اسلش تغییر یافته با کمک روش گشتاوری و

در مدل‌سازی داده‌هایی که متقارن هستند معمولاً از توزیع گوسی یا نرمال استفاده می‌شود. توزیع نرمال به‌عنوان مرجع در مدل‌سازی داده‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرد. بدیهی است در تحلیل و بررسی داده‌های واقعی فرض نرمال بودن همیشه برقرار نیست. برای بررسی داده‌های واقعی از توزیع‌های انعطاف‌پذیری به‌عنوان جایگزین توزیع نرمال استفاده می‌شود به‌عنوان مثال می‌توان به توزیع اسلش اشاره کرد که در چند دهه اخیر از سوی محققان و پژوهشگران زیادی مورد توجه قرار گرفته است. یکی از ویژگی‌های توزیع اسلش، متقارن بودن آن است و از این لحاظ مشابه توزیع نرمال عمل می‌کند، با این تفاوت که این توزیع دم سنگین تری نسبت به توزیع نرمال استاندارد دارد، بر اساس این ویژگی، توزیع اسلش بیشتر به توزیع t شباهت دارد. توزیع اسلش نخستین بار در [۸] معرفی شد و [۷] به بررسی ویژگی‌های این توزیع پرداخته‌اند. در این مقاله به معرفی توزیع اسلش و تعمیمی از آن با عنوان توزیع اسلش تغییر یافته و توزیع اسلش

^۱ دانش‌آموخته کارشناسی ارشد آمار، دانشگاه شیراز، ایران

برای $q = 1$ به صورت زیر است:

$$f_{SL}(x, 1) = \begin{cases} \frac{(\phi(0) - \phi(x))}{x^2}, & x \neq 0 \\ \frac{\phi(0)}{2}, & x = 0 \end{cases}$$

قضیه ۲.۲. اگر $X \sim SL(0, 1, q)$ ، آن گاه:

$$E(X) = 0, \quad q > 1$$

$$Var(X) = \frac{q}{q-2}, \quad q > 2$$

همچنین برای $q > 4$ و با توجه به رابطه $3 - \frac{E(X - \mu)^4}{\sigma^4}$ ، ضریب

کشیدگی برای توزیع اسلش استاندارد به صورت زیر است:

$$\beta_2 = 3 \left(\frac{(q-2)^2}{q(q-4)} - 1 \right)$$

که مقدار به دست آمده بزرگ‌تر از صفر است و این موضوع نشان‌دهنده این است که تابع چگالی توزیع اسلش، نسبت به توزیع نرمال کشیده‌تر است.

۲.۲ توزیع اسلش چوله

در ادامه به معرفی توزیع اسلش چوله و بیان برخی از ویژگی‌های آن پرداخته می‌شود.

تعریف ۳.۲. متغیر تصادفی X دارای توزیع اسلش چوله

$$X \sim SSL(\mu, \sigma, q, \alpha)$$

است، هرگاه نمایش تصادفی X به صورت زیر باشد:

$$X \stackrel{d}{=} \frac{Z_\alpha}{U^{\frac{1}{q}}},$$

که در آن متغیرهای تصادفی

$$Z_\alpha \sim SN(0, 1, \alpha), \quad U \sim U(0, 1)$$

مستقل‌اند. با توجه به نمایش تصادفی توزیع اسلش، تابع چگالی این توزیع به صورت زیر است:

$$f_{SSL}(x; \mu, \sigma, q, \alpha) = q \int_0^1 u^q f_{SN}(xu; x\mu, \sigma^2, \alpha) du,$$

به قسمی که در آن $x, \alpha \in \mathbb{R}, q > 0$ و $f_{SN}(xu; x\mu, \sigma^2, \alpha)$ تابع چگالی توزیع نرمال چوله است. (با توجه به این که $f_{SN}(x; \mu, \sigma^2, \alpha) = 2\phi(x, \mu, \sigma^2)\Phi(\alpha\frac{x-\mu}{\sigma})$ است.)

روش ماکسیمم درست‌نمایی پرداخته می‌شود. در بخش ۴ توزیع اسلش تغییر یافته چوله را معرفی کرده و ویژگی‌های این توزیع بیان می‌شود و در آخر، پارامترهای این توزیع با استفاده از روش گشتاوری و روش ماکسیمم درست‌نمایی برآورد می‌شود. در بخش ۵ با استفاده از داده‌های واقعی به مقایسه توزیع نرمال، توزیع اسلش و توزیع اسلش تغییر یافته پرداخته می‌شود. همچنین توزیع اسلش چوله و اسلش چوله تغییر یافته را با کمک دست‌های دیگر از داده‌ها مقایسه می‌شود. در پایان به نتیجه‌گیری پرداخته می‌شود.

۲ معرفی توزیع اسلش و توزیع اسلش

چوله

۱.۲ توزیع اسلش

تعریف ۱.۲. متغیر تصادفی X دارای توزیع اسلش استاندارد $X \sim SL(0, 1, q)$ با پارامتر دم $q > 0$ است، هرگاه

$$X \stackrel{d}{=} \frac{Z}{U^{\frac{1}{q}}}$$

که در آن متغیرهای تصادفی $Z \sim N(0, 1)$ و $U \sim U(0, 1)$ مستقل‌اند. زمانی که $q \rightarrow \infty$ توزیع اسلش به سمت توزیع نرمال استاندارد میل خواهد کرد. با توجه به نتایج به دست آمده در [۹]، متغیر تصادفی اسلش استاندارد دارای تابع چگالی احتمال به صورت زیر است:

$$f_{SL}(xu) = q \int_0^1 u^q \phi(xu) du$$

اگر $X \sim SL(0, 1, q)$ باشد، آن گاه تابع توزیع آن به صورت زیر است:

$$F_{SL}(xu) = q \int_0^1 u^{q-1} \Phi(xu) du$$

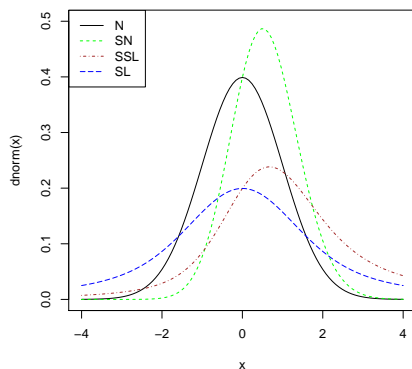
که در آن $\Phi(\cdot)$ تابع توزیع نرمال استاندارد است. همچنین $F_{SL}(0, q) = \frac{1}{q}$ است، که این رابطه به دلیل تقارن توزیع اسلش برقرار است. صورت صریح تابع چگالی احتمال توزیع اسلش

که در آن متغیرهای تصادفی $Z \sim N(0, 1)$ و $V \sim Exp(2)$ مستقل اند. دلیل جایگزین کردن توزیع نمایی به جای توزیع یکنواخت این است که در توزیع نمایی وزن بیشتری از احتمال روی دمها قرار دارد، بنا بر این توزیع نمایی با پارامتر ۲ یا بزرگتر از ۲ برای ساخت یک توزیع با دمهای سنگین مناسبتر از توزیع یکنواخت خواهد بود. دلیل انتخاب پارامتر ۲، سادگی برای محاسبات است. همچنین اگر Y دارای توزیع اسلش باشد، آن گاه نمایش تصادفی Y به صورت زیر است:

$$Y \stackrel{d}{=} \sigma \frac{Z}{V^{\frac{1}{q}}} + \mu,$$

بنا بر این تابع چگالی احتمال Y به صورت زیر خواهد بود:

$$f_{MSL}(y; \mu, \sigma, q) = \frac{2q}{\sqrt{2\pi}\sigma^{\frac{1}{q}}} \int_0^{\infty} v^q e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu}{\sigma^{\frac{1}{q}}}\right)^2 v^{\frac{1}{q}+2v^q}} dv. \quad (1)$$



شکل ۱. منحنی چگالی نرمال، نرمال چوله، اسلش و اسلش چوله

با توجه به رابطه (۱)، اگر $q = 1$ باشد، آن گاه تابع چگالی احتمال توزیع اسلش تغییر یافته به صورت زیر به دست می آید:

$$f_{MSL}(y; \mu, \sigma', 1) = \begin{cases} \frac{2\sigma'}{(y-\mu)^2} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{2\sigma' e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma'^2}}}{y-\mu} \Phi\left(-\frac{y-\mu}{\sigma'}\right) \right) & y < \mu \\ \frac{1}{(\lambda\sigma')^{\frac{1}{\lambda}}} & y = \mu \\ \frac{2\sigma'}{(y-\mu)^2} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} - \frac{2\sigma' e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma'^2}}}{y-\mu} \Phi\left(-\frac{y-\mu}{\sigma'}\right) \right) & y > \mu \end{cases}$$

که در آن $\Phi(\cdot)$ ، تابع توزیع تجمعی نرمال استاندارد است.

قضیه ۴.۲. امید ریاضی، واریانس، ضریب چولگی و ضریب کشیدگی توزیع اسلش چوله به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} E(x) &= \frac{q}{q-1} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \delta, \quad q > 1 \\ Var(x) &= \frac{q}{q-2} - \left(\frac{q}{q-1}\right)^2 \frac{2}{\pi} \sigma, \quad q > 2 \\ \beta_1(X) &= \frac{\frac{4\sqrt{2}\delta^2 q^2}{\pi^{\frac{3}{2}}(q-1)^2} + \frac{\sqrt{2}q(3\delta - \delta^2)}{\sqrt{\pi}(q-3)}}{\left(\frac{q}{q-2} - \frac{2\delta^2 q^2}{\pi(q-1)^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \\ &\quad - \frac{\frac{3\sqrt{2}\delta q^2}{\sqrt{\pi}(q-1)(q-2)}}{\left(\frac{q}{q-2} - \frac{2\delta^2 q^2}{\pi(q-1)^2}\right)^{\frac{3}{2}}}, \quad q > 3 \\ \beta_2(X) &= \frac{\frac{3q}{q-4} + \frac{12\delta^2 q^2}{\pi^2(q-1)^2} - \frac{12\delta^2 q^2}{\pi(q-1)^2(q-2)}}{\left(\frac{q}{q-2} - \frac{2\delta^2 q^2}{\pi(q-1)^2}\right)^2} \\ &\quad - \frac{\frac{\lambda\delta q^2(3\delta - \delta^2)}{\pi(q-1)(q-3)}}{\left(\frac{q}{q-2} - \frac{2\delta^2 q^2}{\pi(q-1)^2}\right)^2} - 3, \quad q > 4 \end{aligned}$$

که در آن $\delta = \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}$ است.

نمودار (۱) چولگی و رفتار دم توزیع های نرمال استاندارد $N(0, 1)$ ، نرمال چوله $SN(0, 1, 1)$ ، اسلش چوله $SSL(0, 1, 1, 1)$ و اسلش استاندارد $SL(0, 1, 1)$ را نشان می دهد. در این نمودار همان طور که مشاهده می شود تابع چگالی توزیع نرمال چوله و اسلش چوله، دارای چولگی مثبت هستند با این تفاوت که توزیع اسلش چوله دارای دم سنگین تری نسبت به توزیع نرمال چوله است، در مورد چگالی احتمال توزیع اسلش و نرمال نیز می توان همین نتیجه را گرفت که توزیع اسلش دارای دم سنگین تری نسبت به توزیع نرمال است.

۳ توزیع اسلش تغییر یافته

تعریف ۱.۳. متغیر تصادفی X دارای توزیع اسلش تغییر یافته

$X \sim MSL(0, 1, q)$ است هر گاه X به صورت زیر باشد

$$X \stackrel{d}{=} \frac{Z}{V^{\frac{1}{q}}},$$

بنا بر این اگر $Y \sim MSL(\mu, \sigma, q)$ باشد، آن‌گاه:

$$E(Y) = \mu,$$

$$Var(Y) = \sigma^2 \frac{\Gamma(\frac{q-2}{q})}{\Gamma^2(\frac{q-2}{q})}, \quad q > 2$$

$$\beta_2 = \frac{\Gamma(\frac{q-4}{q})}{\Gamma^2(\frac{q-2}{q})}, \quad q > 4$$

در نمودار (۲) تابع چگالی توزیع اسلش و اسلش تغییر یافته را برای مقادیر مختلف q رسم شده است. با توجه به نمودار می‌توان نتیجه گرفت که توزیع اسلش تغییر یافته نسبت به توزیع اسلش دارای دم سنگین‌تری است.

۱.۳ برآورد گشتاوری توزیع اسلش تغییر یافته

نمونه تصادفی Y_1, \dots, Y_n از توزیع $MSL(\mu, \sigma, q)$ را در نظر بگیرید، با توجه به قضیه ۵.۳ برآورد گشتاوری برای $\theta = (\mu, \sigma, q)$ ، که در آن $q > 0$ است، به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\hat{\mu}_M = \bar{Y},$$

$$\hat{\sigma}_M = \frac{\frac{1}{\sqrt{2} \hat{q}_M S}}{\sqrt{\Gamma(\frac{\hat{q}_M - 2}{\hat{q}_M})}},$$

$$b_2 = \frac{\Gamma(\frac{\hat{q}_M - 4}{\hat{q}_M})}{\Gamma^2(\frac{\hat{q}_M - 2}{\hat{q}_M})}$$

که در آن \bar{Y} ، S و b_2 به ترتیب میانگین، انحراف معیار و ضریب کشیدگی نمونه‌ای است.

در ادامه به بیان چند ویژگی توزیع اسلش تغییر یافته پرداخته می‌شود.

نتیجه ۲.۳. اگر $Y \sim MSL(\mu, \sigma, q)$ باشد، آن‌گاه $\lim_{q \rightarrow \infty} f_{MSL}(y; \mu, \sigma, q) = \frac{1}{\sigma} \phi\left(\frac{y - \mu}{\sigma}\right)$

نتیجه ۳.۳. اگر $Y|V = v \sim N(\mu, v^{-\frac{1}{q}} \sigma^2)$ که در آن $V \sim Exp(2)$ است، آن‌گاه $Y \sim MSL(\mu, \sigma, q)$

نتیجه ۴.۳. اگر $Y \sim MSL(0, 1, 2)$ ، آن‌گاه $T = \frac{Y}{\sqrt{2}}$ دارای توزیع t با ۲ درجه آزادی است.

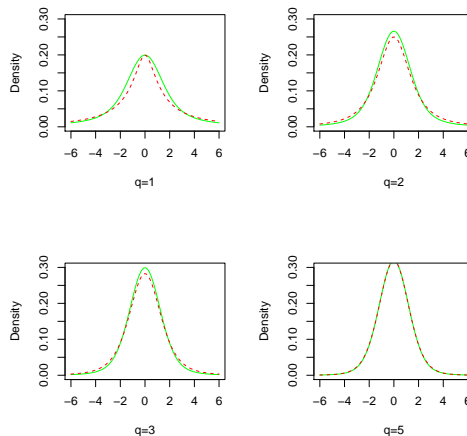
در قضیه ۵.۳ گشتاورهای توزیع اسلش تغییر یافته را محاسبه می‌شود و سپس امید ریاضی، واریانس و ضریب کشیدگی برای این توزیع را به دست آورده می‌شود.

قضیه ۵.۳. اگر $X \sim MSL(\mu, \sigma, q)$ و $X \sim MSL(0, 1, q)$ آن‌گاه برای $r = 1, 2, \dots$ و $q > 2r$ داریم:

$$\mu_{2r} = E(X^{2r}) = \frac{(2r)!}{2^r r!} \frac{\Gamma(\frac{q-2r}{q})}{\Gamma(\frac{q-2}{q})},$$

$$\mu_{2r-1} = E(X^{2r-1}) = 0,$$

$$E(Y^r) = \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} \sigma^k \mu^{r-k} \mu_k$$



شکل ۲. مقایسه توزیع اسلش و توزیع اسلش تغییر یافته برای مقادیر مختلف q

تعریف ۱.۴. متغیر تصادفی Y دارای توزیع اسلش چوله تغییر یافته با پارامترهای μ, σ, q و α و $Y \sim (\circ, 1, q, \alpha)$ است، اگر Y به صورت زیر باشد:

$$Y \stackrel{d}{=} \frac{Z_\alpha}{V^{\frac{1}{q}}}$$

که در آن متغیر تصادفی $Z_\alpha \sim SN(\circ, 1, \alpha)$ توزیع نرمال چوله معرفی شده توسط آزالینی است) و $V \sim Exp(2)$ مستقل از هم هستند. بنا بر این تابع چگالی توزیع اسلش تغییر یافته چوله به صورت زیر به دست می آید:

$$f_{MSSL}(y; \circ, 1, q, \alpha) = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{v^q} e^{(-\frac{1}{2})y^2 v^{\frac{2}{q}} - 2v} \times \Phi(\alpha y v^{\frac{1}{q}}) dv$$

که در آن $\Phi(\cdot)$ ، تابع توزیع تجمعی توزیع نرمال استاندارد است. همچنین اگر $Z \sim (\circ, 1, q, \alpha)$ باشد، آن گاه با در نظر گرفتن تبدیل خطی $Y = \mu + \sigma Z$ ، تابع چگالی احتمال خانواده مکان-مقیاس توزیع اسلش تغییر یافته به صورت زیر است:

$$f_{MSSL}(y; \mu, \sigma, q, \alpha) = \frac{2}{\sigma} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{v^q} e^{(-\frac{1}{2})[(\frac{y-\mu}{\sigma})^2 v^{\frac{2}{q}}] - 2v} \times \Phi(\alpha(\frac{y-\mu}{\sigma})v^{\frac{1}{q}}) dv.$$

نتیجه ۲.۴. اگر $Y \sim (\mu, \sigma, q, \alpha)$ و $\alpha = \circ$ و $q \rightarrow \infty$ ، آن گاه $Y \sim N(\mu, \sigma)$ است.

نتیجه ۳.۴. اگر $Y|V = v \sim SN(\mu, v^{-\frac{2}{q}}\sigma^2, \alpha)$ که در آن $V \sim Exp(2)$ است، آن گاه $Y \sim MSSL(\mu, \sigma, q, \alpha)$.

نتیجه ۴.۴. اگر $Y \sim MSSL(\circ, 1, 2, \alpha)$ ، آن گاه

$$f(y|\alpha) = \frac{1}{2(1 + \frac{y^2}{4})^2} F_T(\alpha y | \circ, \frac{y^2 + 4}{4}, 3)$$

خواهد بود. که $F_T(x; \mu, \sigma, q)$ نشان دهنده تابع توزیع تجمعی توزیع t با q درجه آزادی است.

۲.۳ برآورد ماکسیم درست‌نمایی توزیع اسلش تغییر یافته

نمونه تصادفی Y_1, \dots, Y_n از توزیع $Y \sim MSSL(\mu, \sigma, q)$ را در نظر بگیرید، تابع لگاریتم درست‌نمایی برای این توزیع به صورت زیر است:

$$L(\mu, \sigma, q) = n \log(2) + n \log(q) - \frac{n}{2} \log(2\pi) - n \log(\sigma) + \sum_{i=1}^n \log G(y_i),$$

که در آن

$$G(y_i) = G(y_i; \mu, \sigma, q) = \int_0^\infty v^q e^{(-\frac{1}{2})[\frac{(y-\mu)^2}{\sigma^2} v^{\frac{2}{q}}] - 2v} dv.$$

با مشتق‌گیری از تابع $L(\mu, \sigma, q)$ دستگاه معادلات نرمال به صورت زیر به دست می آید:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{G_1(y_i)}{G(y_i)} &= \circ, \\ \sum_{i=1}^n \frac{G_2(y_i)}{G(y_i)} &= \frac{n}{\sigma}, \\ \sum_{i=1}^n \frac{G_3(y_i)}{G(y_i)} &= -\frac{n}{q} \end{aligned}$$

که در آن $G_1(y_i) = (\partial/\partial\mu)G(y_i)$ ، $G_2(y_i) = (\partial/\partial\sigma)G(y_i)$ و $G_3(y_i) = (\partial/\partial q)G(y_i)$ است که به ترتیب برابرند با عبارت زیر است:

$$G_1(y_i) = \frac{1}{\sigma^2} \int_0^\infty v^{q+2} (y_i - \mu) e^{(-\frac{1}{2})[\frac{(y-\mu)^2}{\sigma^2} v^{\frac{2}{q}}] - 2v} dv, \quad (2)$$

$$G_2(y_i) = \frac{1}{\sigma^2} \int_0^\infty v^{q+2} (y_i - \mu)^2 e^{(-\frac{1}{2})[\frac{(y-\mu)^2}{\sigma^2} v^{\frac{2}{q}}] - 2v} dv, \quad (3)$$

$$G_3(y_i) = q \int_0^\infty (1 - 2v^q) \log(v) e^{(-\frac{1}{2})[\frac{(y-\mu)^2}{\sigma^2} v^{\frac{2}{q}}] - 2v} dv. \quad (4)$$

برای به دست آوردن برآوردگرهای ماکسیم درست‌نمایی پارامترها باید معادلات (۲) تا (۴) را از روش‌های عددی مانند روش دوربین-واتسن حل کرد.

۴ توزیع اسلش تغییر یافته چوله

در این بخش توزیع جدیدی با عنوان توزیع اسلش تغییر یافته چوله معرفی می‌کنیم و در ادامه برخی از ویژگی‌های آن را بررسی می‌شود [۶].

۱.۴ برآورد گشتاوری

اگر $Y \sim (\mu, \sigma, q, \alpha)$ بنا بر این برآورد گشتاوری برای μ, σ, α و به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\bar{Y} = \mu + \frac{\sigma\delta}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{q-1}{q}\right) + \frac{1}{q} \Gamma\left(\frac{q-1}{q}\right) \right],$$

$$S^2 = \frac{1}{q} \sigma^2 \left[\Gamma\left(\frac{q-2}{q}\right) - \frac{2\delta^2}{\pi} \Gamma^2\left(\frac{q-1}{q}\right) \right],$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^n Y_i^3 = \sum_{j=0}^3 \binom{3}{j} \sigma^j \mu^{3-j} \mu_j,$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^n Y_i^4 = \sum_{j=0}^4 \binom{4}{j} \sigma^j \mu^{4-j} \mu_j$$

که در آن \bar{Y} و S به ترتیب میانگین و واریانس نمونه‌ای است.

۲.۴ برآورد ماکسیمم درست‌نمایی (MLE)

نمونه تصادفی Y_1, \dots, Y_n را از توزیع $MSSL(\mu, \sigma, q, \alpha)$ در نظر بگیرید، تابع لگاریتم درست‌نمایی به صورت زیر به دست می‌آید

$$L(\mu, \sigma, q, \alpha) = n \log(\alpha) + n \log(\sigma) + \sum_{i=1}^n \log G(y_i),$$

که در آن

$$G(y_i) = G(y_i; \mu, \sigma, q, \alpha) = \int_0^\infty \frac{1}{t^q} e^{(-\frac{1}{t}) \left[\frac{(y-\mu)^2}{\sigma^2} v^2 + \alpha v^q \right]} dv.$$

بنا بر این دستگاه معادلات نرمال به صورت زیر است:

قضیه ۵.۴. اگر $X \sim (\alpha, 1, q, \alpha)$ و $Y \sim (\mu, \sigma, q, \alpha)$ آن‌گاه برای $r = 1, 2, \dots$ و $q > r$ گشتاورهای توزیع اسلش تغییر یافته چوله به صورت زیر است:

$$\mu_r = E(X^r) = \Gamma\left(\frac{q-r}{q}\right) E(Z_{\alpha^r}),$$

$$E(Y^r) = \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} \sigma^j \mu^{r-j} \mu_j,$$

بنا بر این اگر $Y \sim (\mu, \sigma, q, \alpha)$ باشد، آن‌گاه امید ریاضی، واریانس، ضریب چولگی و ضریب کشیدگی توزیع اسلش چوله تغییر یافته به صورت زیر به دست می‌آید:

$$E(Y) = \mu + \frac{\sigma\delta}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{q-1}{q}\right) + \frac{1}{q} \Gamma\left(\frac{q-1}{q}\right) \right], \quad q > 1$$

$$Var(Y) = \sigma^2 \frac{1}{q} \left[\Gamma\left(\frac{q-2}{q}\right) - \frac{2\delta^2}{\pi} \Gamma^2\left(\frac{q-1}{q}\right) \right], \quad q > 2$$

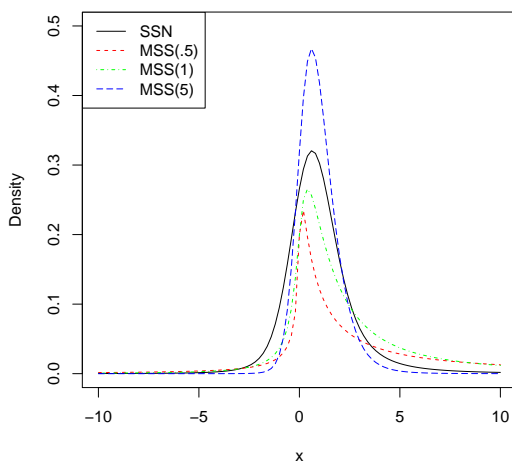
$$\beta_1 = \frac{\pi \Gamma\left(\frac{q-3}{q}\right) (\alpha - \delta^2) - 3\pi \Gamma\left(\frac{q-2}{q}\right) \Gamma\left(\frac{q-1}{q}\right)}{[\pi \Gamma\left(\frac{q-2}{q}\right) - 2\delta^2 \Gamma^2\left(\frac{q-1}{q}\right)]^{\frac{3}{2}}}$$

$$+ \frac{4\delta^2 \Gamma^2\left(\frac{q-1}{q}\right)}{[\pi \Gamma\left(\frac{q-2}{q}\right) - 2\delta^2 \Gamma^2\left(\frac{q-1}{q}\right)]^{\frac{3}{2}}} \delta \sqrt{\pi}, \quad q > 3$$

$$\beta_2 = \frac{3\pi^2 \Gamma\left(\frac{q-4}{q}\right) - 8\pi \Gamma\left(\frac{q-1}{q}\right) \Gamma\left(\frac{q-3}{q}\right) (\alpha - \delta^2)}{[\pi \Gamma\left(\frac{q-2}{q}\right) - 2\delta^2 \Gamma^2\left(\frac{q-1}{q}\right)]^2}$$

$$+ \frac{12\pi \Gamma^2\left(\frac{q-1}{q}\right) \Gamma\left(\frac{q-2}{q}\right) \delta^2 - 12\pi \Gamma^4\left(\frac{q-1}{q}\right) \delta^4}{[\pi \Gamma\left(\frac{q-2}{q}\right) - 2\delta^2 \Gamma^2\left(\frac{q-1}{q}\right)]^2}$$

که در آن $\delta = \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}$ است.



شکل ۳. تابع چگالی توزیع‌های اسلش چوله با $\alpha = 2$ (خط تیره)، $MSSL(\alpha, 1, 1, 2)$ ، $MSSL(\alpha, 1, 5, 2)$ و $MSSL(\alpha, 1, 5, 2)$.

توصیفی برای این داده‌ها در جدول ۱ به دست آمده است. و پس از آن برآورد MLE برای پارامترهای مدل اسلش و اسلش تغییر یافته محاسبه می‌شود. همچنین با استفاده از معیار اطلاع آکائیکه (AIC) نشان داده می‌شود که توزیع اسلش تغییر یافته نسبت به توزیع اسلش برای داده‌های آلبومین، مناسب‌تر است. مقادیر MLE و معیار اطلاع آکائیکه در جدول ۲ نشان داده شده است.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{G_1(y_i)}{G(y_i)} &= 0, \\ \sum_{i=1}^n \frac{G_T(y_i)}{G(y_i)} &= \frac{n}{\sigma}, \\ \sum_{i=1}^n \frac{G_T(y_i)}{G(y_i)} &= -\frac{n}{q}, \\ \sum_{i=1}^n \frac{G_T(y_i)}{G(y_i)} &= 0, \end{aligned}$$

که در آن $G_T(y_i) = (\partial/\partial\sigma)G(y_i)$, $G_1(y_i) = (\partial/\partial\mu)G(y_i)$ و $G_T(y_i) = (\partial/\partial q)G(y_i)$ است. که

۲.۵ مقایسه توزیع اسلش چوله و اسلش چوله

تغییر یافته با استفاده از داده‌های واقعی

در این بخش به محاسبه MLE مربوط به پارامترهای دو توزیع اسلش چوله و اسلش چوله تغییر یافته برای داده‌های واقعی پرداخته می‌شود. این داده‌ها از رژیم غذایی بتا-کاروتن مصرف شده توسط ۳۱۵ بیمار بر حسب میکروگرم در روز، به دست آمده است. ۲ آماره‌های توصیفی برای این داده‌ها در جدول ۳ نمایش داده شده است، (b_1 ضریب چولگی نمونه‌ای است). همچنین در جدول ۴ مقادیر MLE برای پارامترهای دو مدل MSSL و SSL نشان داده شده است. در ادامه معیار اطلاع آکائیکه برای هر دو توزیع به دست آورده می‌شود. با مقایسه معیار اطلاع آکائیکه، می‌توان نتیجه گرفت که توزیع اسلش چوله تغییر یافته برای داده‌ها مناسب‌تر از توزیع اسلش چوله است.

$$G_1(y_i) = \frac{1}{\sigma} \int_0^{\infty} g(t) dt \quad (5)$$

$$G_T(y_i) = \frac{y_i - \mu}{\sigma^2} \int_0^{\infty} g(t) dt \quad (6)$$

$$\begin{aligned} G_T(y_i) &= \frac{y_i - \mu}{\sigma q^2} \int_0^{\infty} \log(t) g(t) dt - \frac{1}{q^2} \int_0^{\infty} \log(t) t^q e^{-\tau t} \\ &\times \phi\left(\frac{y_i - \mu}{\sigma} t^q\right) \Phi\left(\alpha \frac{y_i - \mu}{\sigma} t^q\right) dt. \end{aligned} \quad (7)$$

$$G_T(y_i) = \frac{y_i - \mu}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} t^q e^{-\tau t} \phi\left(\frac{y_i - \mu}{\sigma} t^q \sqrt{1 + \alpha^2}\right) dt \quad (8)$$

است. که در آن

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{t^q} e^{-\tau t} \phi\left(\frac{y_i - \mu}{\sigma} t^q\right) \left[\frac{y_i - \mu}{\sigma} t^q \Phi\left(\frac{y_i - \mu}{\sigma} t^q\right) \right] - \alpha \phi\left(\frac{y_i - \mu}{\sigma} t^q\right) dt$$

است. برای به دست آوردن برآوردگرهای ماکسیم درست‌نمایی پارامترها باید معادلات (۵) تا (۸) را از روش‌های عددی مانند روش نیوتن-رافسون حل کرد.

۶ نتیجه‌گیری

در این مقاله توزیع اسلش و اسلش چوله را معرفی کرده و برخی از ویژگی‌های آنها بیان می‌شود. پس از آن توزیع اسلش تغییر یافته و توزیع اسلش تغییر یافته چوله که دم سنگین‌تری نسبت به توزیع اسلش و اسلش چوله دارند را بیان کرده و به بررسی ویژگی‌های آن پرداخته و پارامترهای این دو توزیع با کمک روش گشتاوری و روش ماکسیم درست‌نمایی برآورد شد. سپس با بیان دو مثال نشان داده می‌شود که برای برخی داده‌ها که دارای دم سنگینی هستند توزیع‌های اسلش و اسلش چوله مناسب‌تر است.

۵ مثال

۱.۵ مقایسه توزیع اسلش و اسلش تغییر یافته با

استفاده از داده‌های واقعی

در این مثال از داده‌هایی که از عملکرد کبد و آزمایش صفرا (PBC) بر روی ۴۱۸ نفر، بین سال‌های ۱۹۷۴ تا ۱۹۸۴ در کلینیک مایو به دست آمده است؛ استفاده شده است. این داده‌ها از فایل pbc در بسته survival در نرم‌افزار R فراخوانی شده است. در این‌جا داده‌های آلبومین مورد بررسی قرار می‌گیرد. آماره‌های

جدول ۱. آماره‌های توصیفی برای داده‌های آلبومین

n	\bar{X}	S	b_2
۴۱۸	۳.۴۹۷	۰.۴۲۵	۳.۵۴۶

جدول ۲. معیار اطلاع آکائیکه، برآورد ماکسیمم درست‌نمایی و مقدار انحراف استاندارد (مقادیر داخل پرانتز) برای پارامترهای توزیع اسلش و اسلش تغییر یافته

نام توزیع	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$	\hat{q}	AIC
توزیع اسلش	۳.۵۰۸(۰.۰۲۱)	۰.۳۳۹(۰.۰۳۰)	۵.۴۳۶(۱.۹۲۵)	۴۷۲.۲۵۶
توزیع اسلش تغییر یافته	۳.۵۰۹(۰.۰۲۱)	۰.۳۳۲(۰.۰۳۱)	۶.۳۵۶(۲.۱۳۲)	۴۶۶.۷۲۹

جدول ۳. آماره‌های توصیفی برای داده‌های بتا-کاروتن

n	\bar{X}	S	b_1	b_2
۳۱۵	۲۰۹۶.۷۸۷	۱۴۷۴.۹۶۴	۱.۶۳۶	۶.۵۷۵

جدول ۴. برآورد ماکسیمم درست‌نمایی برای پارامترهای توزیع اسلش چوله و اسلش چوله تغییر یافته

توزیع	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$	\hat{q}	$\hat{\alpha}$	AIC
توزیع اسلش چوله	۴۰۲.۷۷۹	۱۵۵۴.۹۶۲	۳.۶۴۶	۱۳.۹۶۴	۵۳۴۶.۰۳۰
توزیع اسلش تغییر یافته چوله	۴۰۸.۷۳۹	۱۵۰۳.۰۵۳	۴.۲۸۵	۱۳.۵۲۰	۵۳۴۰.۳۲۰

مراجع

- [1] Arslan, O. and Genc, A. I. (2009). A generalization of the multivariate slash distribution, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **139(3)**, 1164–1170.
- [2] Azzalini, A. (1985). A class of distributions which includes the normal ones, *Scandinavian Journal of Statistical*, **12**, 171–178.
- [3] Genc, A. I. (2007). A generalization of the univariate slash by a scale-mixture exponential power distribution, *Communications in Statistical Simulation and Computation*, **36(5)**, 937–947.
- [4] Gomez, H. W., Quintana, F. A. and Torres, J. (2007). A new family of slash-distributions with elliptical contours, *Statistical Probability*, **77**, 717-725.
- [5] Reyes, J., Gómez, H. W. and Bolfarine, H. (2013). Modified slash distribution, *Statistics*, **47(5)**, 929–941.
- [6] Reyes, J., Gómez, H. W. and Vidal L. (2016). Modified skew-slash distribution, *Communications in Statistics-Theory and Methods Statistics*, **45(4)**, 1070-1080.
- [7] Tukey, J. W. and Mosteller, F. (1977). *Data Analysis and Regression*, Addison-Wesley, Reading, MA.
- [8] Tukey, J. W., Rogers, W.H. (1972). Understanding some long-tailed symmetrical distributions, *Statistical Neerlandica*, **26**, 211–226.
- [9] Wang, J. and Genton, M. G. (2006). The multivariate skew-slash distribution, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **136**, 209–220.