تعمیم‌های لم بورل-کانتلی

محسن خسروی[۱]، مریم خواجه حسنی[۲]

تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۵/۱۱
تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۶/۲۶

چکیده:

در نظریهٔ احتمال لم بورل-کانتلی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است؛ در این مقاله ابتدا صورت کلّی لم بورل-کانتلی را بیان می‌شود. قسمت اول این لم فرض همگرایی و قسمت دوم فرض واگرایی و استقلال را شامل می‌شود. در ادامه به تعمیم‌های مربوط به قسمت‌های اول و دوم این لم پرداخت می‌شود. دراغلب تعمیم‌های قسمت دوم، شرط استقلال، استقلال جفتی، تضعیف و حذف شرط استقلال مورد بررسی قرار گرفته است.

واژه‌های کلیدی: استقلال، استقلال جفتی، همگرایی.

۱ مقدمه

فرض کنید $\{A_n; n \geq ۱\}$ یک دنباله از پیشامدها در فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ باشد. لم بورل-کانتلی تحت شرایطی احتمال رخداد تعداد نامتناهی از A_nها را محاسبه می‌کند و در مباحث مربوط به همگرایی تقریباً مطمئن کاربردهای فراوانی دارد. این لم شامل دو بخش است. در بخش اول این لم از فرض همگرایی $\sum_{n=۱}^{\infty} P(A_n)$ و در بخش دوم از فرض واگرایی این سری استفاده می‌شود. این دو قسمت که به لم‌های اول و دوم بورل-کانتلی معروف شده‌اند. لم اول حالت خاصی از همگرایی یکنوا از نظریه اندازه است که برای سری‌های نامنفی به کار برده می‌شود و به دلیل دلخواه بودن پیشامدها به‌طور گسترده‌ای قابل استفاده است. یک شرط محدود کننده در قسمت دوم لم بورل-کانتلی شرط استقلال است که همواره سعی شده است این شرط ضعیف‌تر شود. ضعیف‌تر شدن شرط استقلال میدان کاربرد این لم را وسیع‌تر می‌کند.

۲ لم بورل-کانتلی

فرض کنید $\{A_n; n \geq ۱\}$ یک دنباله از پیشامدها در فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ باشد.

الف) اگر $\sum_{n=۱}^{\infty} P(A_n) < \infty$، آن‌گاه

$$P(A_n \ .i.o) = ۰,$$

که در آن

$$[A_n \ .i.o] = \limsup A_n = \bigcap_{n=۱}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

$=$وقوع تعداد نامتناهی از A_nها

ب) اگر $\{A_n; n \geq ۱\}$ یک دنباله از پیشامدهای مستقل باشد و داشته باشیم

$$\sum_{n=۱}^{\infty} P(A_n) = \infty, \qquad (۱)$$

آن‌گاه

$$P(A_n \ .i.o) = ۱.$$

[۱] عضو هیئت علمی گروه آمار، دانشگاه شهید باهنر کرمان، کرمان
[۲] دانش‌آموختهٔ کارشناسی ارشد آمار، دانشگاه شهید باهنر کرمان، کرمان

همانگونه که مشاهده می‌شود در قسمت دوم لم مذکور، پیشامدهای دنبالهٔ $\{A_n; n \geq ۱\}$ باید مستقل باشند. در ادامه ابتدا تعمیم‌های لم اول و سپس تعمیم‌های لم دوم بررسی می‌شود.

۳ تعمیم‌های لم اول بورل-کانتلی

۱.۳ تعمیم بارندورف-نیلسن

قضیهٔ ۱.۳. [۲] اگر $\{A_n; n \geq ۱\}$ دنباله‌ای از پیشامدهای دلخواه باشد که

$$P(A_n) \longrightarrow ۰ \; as \quad n \longrightarrow \infty,$$

و

$$\sum_{n=۱}^{\infty} P(A_n \bigcap A^c_{n+۱}) < \infty, \qquad (۲)$$

آن‌گاه

$$P(A_n \; i.o.) = ۰. \qquad (۳)$$

اثبات.

$$\begin{aligned} P(A_n \, i.o.) \leq & P(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k) = P(A_n) + P(A_{n+۱} \bigcap A^c_n) \\ & + P(A_{n+۲} \bigcap A^c_{n+۱} \bigcap A^c_n) + \ldots \\ \leq & P(A_n) + \sum_{k=n}^{\infty} P(A^c_k \bigcap A_{k+۱}). \end{aligned}$$

با توجه به (۲) خواهیم داشت:

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=n}^{\infty} P(A^c_k \bigcap A_{k+۱}) = ۰,$$

اینک با توجه به فرض $P(A_n) \longrightarrow ۰$، داریم:

$$P(A_n \; i.o.) = ۰. \qquad (۴)$$

□

لم ۲.۳. فرض کنید $\{A_n; n \geq ۱\}$ یک دنبالهٔ دلخواه از پیشامدها و $\{\nu_n; n \geq ۱\}$ دنباله‌ای از اعداد صحیح مثبت باشد به‌طوری که

$$P(A_n) \longrightarrow ۰ \; as \quad n \longrightarrow \infty,$$

و

$$\sum_{n=۱}^{\infty} P(A_n \bigcap A^c_{n+v_n}) < \infty, \qquad (۵)$$

در این صورت خواهیم داشت:

$$P(A_n \; i.o.) = ۰. \qquad (۶)$$

۲.۳ تعمیم اول استپانوف

این قضیه تعمیمی از قضیهٔ (۱.۳) است [۱۹].

قضیهٔ ۳.۳. اگر $\{A_n; n \geq ۱\}$ دنباله‌ای از پیشامدها باشد که $P(A_n) \longrightarrow ۰$، و به‌ازای هر $m \geq ۰$ عبارت زیر برقرار باشد:

$$\sum_{n=۱}^{\infty} P(A^c_n A^c_{n+۱} \ldots A^c_{n+m-۱} A_{n+m}) < \infty, \qquad (۷)$$

آن‌گاه

$$P(A_n \; i.o.) = ۰. \qquad (۸)$$

شرط (۷) وقتی که $m \geq ۰$ است از شرط (۲) در قضیه ۱.۳ ضعیف‌تر است.

تذکر ۴.۳. این قضیه نشان می‌دهد که به‌ازای هر دنباله‌ای مانند $\{A_n; n \geq ۱\}$ از پیشامدها،

$$P(A_n \; i.o.) = \alpha \in [۰, ۱],$$

اگر و تنها اگر

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \sum_{k=۰}^{\infty} P(A^c_n \ldots A^c_{n+k-۱} A_{n+k}) = \alpha. \qquad (۹)$$

۳.۳ تعمیم دوم استپانوف

قضیهٔ ۵.۳. فرض کنید $\{A_n; n \geq ۱\}$ دنباله‌ای از پیشامدها باشد به‌طوری که $P(A_n) \longrightarrow ۰$،

$$\sum_{n=۱}^{\infty} P(A_n) = \infty,$$
$$\sum_{n=۱}^{\infty} P(A_n \bigcap A_{n+۱}) = \infty$$

و

$$\sum_{n=1}^{\infty}[P(A_n)-P(A_n\bigcap A_{n+1})]<\infty, \qquad (10)$$

آن‌گاه خواهیم داشت:

$$P(A_n i.o.)=0.$$

کاربرد قضیهٔ فوق را می‌توان در قضیهٔ زیر مشاهده کرد [۲۰].

قضیهٔ ۶.۳. فرض کنید $\{X_n;n\geq 1\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل باشد به‌طوری‌که $X_n\xrightarrow{P}\mu$ که μ مقداری ثابت است. همچنین فرض کنید به‌ازای هر $\varepsilon>0$

$$\sum_{n=1}^{\infty}P(X_n\notin[\mu-\varepsilon,\mu+\varepsilon])=\infty,$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}P(X_n\notin[\mu-\varepsilon,\mu+\varepsilon]\ ,\ X_{n+1}\notin[\mu-\varepsilon,\mu+\varepsilon])=\infty$$

و

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[P(X_n\notin[\mu-\varepsilon,\mu+\varepsilon])-\right.$$
$$\left.P(X_n\notin[\mu-\varepsilon,\mu+\varepsilon]\ ,\ X_{n+1}\notin[\mu-\varepsilon,\mu+\varepsilon])\right]<\infty \qquad (11)$$

در این صورت

$$X_n\xrightarrow{a.s}\mu.$$

گزارهٔ ۷.۳. فرض کنید $\{A_n;n\geq 1\}$ یک دنبالهٔ نزولی از پیشامدها باشد به‌طوری‌که $P(A_n)\longrightarrow 0$، آن‌گاه

$$P(A_n\ i.o.)=0.$$

نتیجه ۸.۳. فرض کنید $\{X_n;n\geq 1\}$ یک دنبالهٔ مرتب از متغیرهای تصادفی باشد به‌طوری‌که $X_n\xrightarrow{P}\mu$ که μ ثابت است، آن‌گاه

$$X_n\xrightarrow{a.s}\mu.$$

۴.۳ تعمیم استپانوف

نتیجه ۹.۳. این تعمیم از تذکر ۴.۳ به‌دست‌آمده است [۲۱].

فرض کنید به‌ازای هر $k\geq 1$ داشته باشیم:

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{P(A_n^c\bigcap\dots A_{n+k}^c\bigcap A_{n+k+1})}{P(A_n^c\bigcap\dots A_{n+k-1}^c\bigcap A_{n+k})}\leq q\in[0,1), \quad (12)$$

آن‌گاه برای مقادیر به اندازه کافی بزرگ n و ε کوچک داریم

$$\sum_{k=0}^{\infty}P(A_n^c\bigcap\dots A_{n+k-1}^c\bigcap A_{n+k})$$
$$\leq P(A_n)+P(A_n^c\bigcap A_{n+1})\frac{q+\varepsilon}{1-q-\varepsilon}. \qquad (13)$$

قضیهٔ ۱۰.۳. اگر $\{A_n;n\geq 1\}$ دنباله‌ای از پیشامدها باشد به‌طوری‌که $P(A_n)\longrightarrow 0$ و رابطهٔ (۱۲) برای $k\geq 1$ برقرار باشد، آن‌گاه

$$P(A_n\ .i.o)=0.$$

۵.۳ تعمیم مارتینکاینن-پتروف

قضیهٔ ۱۱.۳. فرض کنید $0\leq\alpha\leq 1$. موارد زیر معادل‌اند:

الف) $P(A_n\ i.o.)\geq\alpha$،

ب) به‌ازای هر پیشامد$B\in\mathcal{F}$ که $P(B)>1-\alpha$، داریم $\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n\bigcap B)=\infty$،

ج) به‌ازای هر پیشامد $B\in\mathcal{F}$ با $P(B)>1-\alpha$، دنبالهٔ $\{P(A_n\bigcap B)\}$ شامل تعداد نامتناهی از اعداد مثبت است.

نتیجه ۱۲.۳. فرض کنید $0<\alpha\leq 1$. موارد زیر معادل‌اند:

د) $P(A_n\ i.o.)=\alpha$،

ه) (ب) برقرار است و به‌ازای هر $\varepsilon>0$ پیشامدی مانند $B\in\mathcal{F}$ با شرط $P(B)>1-\alpha-\varepsilon$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n\bigcap B)<\infty,$$

و) (ج) برقرار است و به‌ازای هر $\varepsilon>0$ پیشامدی مانند $B\in\mathcal{F}$ با شرط $P(B)>1-\alpha-\varepsilon$ وجود دارد به‌طوری‌که برای nهای به اندازه کافی بزرگ، $P(A_n\bigcap B)=0$ [۱۳].

۴ تعمیم‌های لم دوم بورل-کانتلی

۱.۴ قانون ۱ - ۰ [۳]

با ترکیب کردن دو لم بورل-کانتلی می‌توان نتیجه گرفت که اگر پیشامدهای A_n مستقل باشند، آن‌گاه $P(A_n\ i.o.)$ بر حسب

[۳] Zero-One Law

این‌که $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ همگرا یا واگرا باشد، مقدار ۰ یا ۱ را اختیار می‌کند. در ادامه به تعمیم‌های لم دوم پرداخته می‌شود.

قضیهٔ ۱.۴. اگر $\{A_n; n \geq 1\}$ دنباله‌ای از پیشامدهای مستقل باشد، آن‌گاه

$$P(A_n i.o.) = \begin{cases} 0 & if \quad \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty, \\ 1 & if \quad \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty. \end{cases} \tag{۱۴}$$

نتیجه ۲.۴. اگر $\{X_n; n \geq 1\}$ متغیرهای تصادفی مستقل باشند، آن‌گاه به‌ازای هر $\varepsilon > 0$

$$X_n \xrightarrow{a.s} 0 \; as \quad n \longrightarrow \infty \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| > \varepsilon) < \infty. \tag{۱۵}$$

اگر پیشامدهای دنبالهٔ $\{A_n; n \geq 1\}$ مستقل نباشند، چنانچه بتوان زیردنباله‌ای مانند $\{A_{n_k}; k \geq 1\}$ از دنبالهٔ فوق یافت که مستقل باشند، آن‌گاه ثابت $P(A_n \; i.o.) = 1$ ساده خواهد بود. در این رابطه قضیه زیر را داریم.

قضیهٔ ۳.۴. فرض کنید $\{A_n; n \geq 1\}$ دنباله‌ای از پیشامدهای دلخواه باشد. اگر زیر دنباله‌ای مانند $\{n_k; k \geq 1\}$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که عناصر $\{A_{n_k}; k \geq 1\}$ پیشامدهایی مستقل باشند و

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_{n_k}) = \infty, \tag{۱۶}$$

آن‌گاه

$$P(A_n \; i.o.) = 1. \tag{۱۷}$$

قضیهٔ ۴.۴. فرض کنید $\{A_n; n \geq 1\}$ دنباله‌ای از پیشامدهای دو به دو مستقل باشد یعنی به‌ازای هر $i \neq j$ داشته باشیم

$$P(A_i A_j) = P(A_i) P(A_j), \tag{۱۸}$$

و در شرط (۱) صدق کند، آن‌گاه

$$P(A_n \; i.o.) = 1. \tag{۱۹}$$

اثبات. در ابتدا تابع نشانگر زیر را در نظر می‌گیریم؛

$$I_n = \begin{cases} 1 & if \quad A_n \\ 0 & \quad o.w. \end{cases} \tag{۲۰}$$

آن‌گاه

$$E(I_n) = P(A_n), \quad Var(I_n) = P(A_n)(1 - P(A_n))$$

با توجه به فرض استقلال جفتی (دو به دو پیشامدها) داریم:

$$E(I_i I_j) = E(I_i) E(I_j) \quad \forall \, i \neq j.$$

در نتیجه قضیه به‌صورت زیر ظاهر می‌شود؛

$$\sum_{n=1}^{\infty} E(I_n) = \infty \Longrightarrow P(\sum_{n=1}^{\infty} I_n = \infty) = 1.$$

اینک با توجه به نامساوی چبیشف خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} & P\Big(\Big|\sum_{k=1}^{n}(I_k - E(I_k))\Big| > \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} P(A_k)\Big) \\ & \leq \frac{var(\sum_{k=1}^{n} I_k)}{\big(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} P(A_k)\big)^2} \\ & = 4\frac{\big[\sum_{k=1}^{n} P(A_k) - \sum_{k=1}^{n}(P(A_k))^2\big]}{\big(\sum_{k=1}^{n} P(A_k)\big)^2} \\ & = 4\Big[\frac{1}{\sum_{k=1}^{n} P(A_k)} - \frac{\sum_{k=1}^{n}(P(A_k))^2}{\big(\sum_{k=1}^{n} P(A_k)\big)^2}\Big] \\ & \leq \frac{4}{\sum_{k=1}^{n} P(A_k)} \longrightarrow 0, \quad n \longrightarrow \infty \end{aligned}$$

بنا بر این

$$\lim_{n\to\infty} P\big(\sum_{k=1}^{n} I_k > \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} E(I_k)\big) = 1.$$

و در نهایت طبق قضیه پیوستگی خواهیم داشت:

$$P\big(\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} I_k > \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} E(I_k)\big) = P\big(\sum_{k=1}^{\infty} I_k = \infty\big) = 1.$$

□

قضیهٔ ۵.۴. اگر $\{A_n; n \geq 1\}$ دنباله‌ای از پیشامدهای دو به دو مستقل باشد، آن‌گاه

$$P(A_n i.o.) = \begin{cases} 0 & if \quad \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty, \\ 1 & if \quad \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty \end{cases} \tag{۲۱}$$

قضیه فوق نتیجه‌ای از قضیه (۴.۴) است که شرط استقلال ۱.۴ به شرط استقلال جفتی تضعیف شده است[۱۱].

۲.۴ تعمیم ارداس و رنی

در سال ۱۹۵۹ ارداس و رنی در لم دوم بورل-کانتلی با جایگزین نمودن شرط استقلال با شرط استقلال جفتی و یک شرط حدی این لم را به شکل قضیه زیر بیان و ثابت نمودند [۹].

قضیهٔ ۶.۴. اگر $\{A_n; n \geq ۱\}$ یک دنباله از پیشامدهای دو به دو مستقل باشد که در (۱) صدق کند و

$$\liminf_{n\longrightarrow\infty} \frac{\sum_{i,k=۱}^{n} P(A_iA_k)}{\left[\sum_{k=۱}^{n} P(A_k)\right]^۲} = ۱, \qquad (۲۲)$$

آن‌گاه

$$P(A_n\ .i.o) = ۱. \qquad (۲۳)$$

برای ثابت از لم زیر استفاده می‌شود.

لم ۷.۴. اگر $\{A_n; n \geq ۱\}$ یک دنباله از پیشامدهایی باشد که دو بدو مستقل باشند، آن‌گاه به‌ازای هر عدد طبیعی n داریم:

$$\sum_{i,k=۱}^{n} P(A_i \bigcap A_k) = [\sum_{k=۱}^{n} P(A_k)]^۲ + \sum_{k=۱}^{n} P(A_k)[۱ - P(A_k)]. \qquad (۲۴)$$

اثبات. اگر دنبالهٔ $\{a_k\}$ از توابع نشانگر را به‌صورت زیر تعریف شود

$$a_k = \begin{cases} ۱ & if \quad A_k \\ ۰ & o.w. \end{cases}$$

می دانیم:

$$E(a_k) = P(A_k), \quad E(a_ka_l) = P(A_kA_l),$$

اگر $\eta_n = \sum_{k=۱}^{n} a_k$ در نظر گرفته شود، آن‌گاه

$$\begin{aligned}\sum_{k=۱}^{n}\sum_{l=۱}^{n} P(A_kA_l) &= \sum_{k=۱}^{n}\sum_{l=۱}^{n} E(a_ka_l) \\ &= E(\sum_{k=۱}^{n} a_k \sum_{l=۱}^{n} a_l) \\ &= E(\eta_n^۲) \\ \Longrightarrow \frac{\sum_{k=۱}^{n}\sum_{l=۱}^{n} P(A_kA_l)}{(\sum_{k=۱}^{n} P(A_k))^۲} &= \frac{E(\eta_n^۲)}{(E(\eta_n))^۲}. \end{aligned} \qquad (۲۵)$$

از طرفی

$$E(\eta_n^۲) = var(\eta_n) + (E(\eta_n))^۲.$$

اینک با توجه به روابط (۲۲) ،(۲۴) و (۲۵)؛

$$\begin{aligned} ۱ &= \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{E(\eta_n^۲)}{(E(\eta_n))^۲} = \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{var(\eta_n) + (E(\eta_n))^۲}{(E(\eta_n))^۲} \\ &= \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{var(\eta_n)}{(E(\eta_n))^۲} + ۱ \\ \Longrightarrow & \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{var(\eta_n)}{(E(\eta_n))^۲} = ۰. \end{aligned} \qquad (۲۶)$$

با توجه به (۲۶) و نامساوی چبیشف خواهیم داشت:

$$P(A_n\ .i.o) = ۱.$$

□

نتیجه ۸.۴ (۱۰). اگر به‌ازای هر $i \neq j$ ، $P(A_iA_j) \leq P(A_i)P(A_j)$ و شرط (۱) برقرار باشد، آن‌گاه با احتمال ۱ تعداد نامتناهی از پیشامدهای A_n به‌طور همزمان رخ می‌دهند.

۳.۴ تعمیم رنی-لامپرتی

قضیهٔ ۹.۴. اگر دنبالهٔ $\{A_n; n \geq ۱\}$ از پیشامدها در (۱) صدق کند و

$$\liminf \frac{\sum_{i,j=۱}^{n} P(A_iA_j)}{\left[\sum_{j=۱}^{n} P(A_j)\right]^۲} = L \geq ۱, \qquad (۲۷)$$

آن‌گاه

$$P(A_n\ i.o.) \geq \frac{۱}{L}. \qquad (۲۸)$$

۴.۴ تعمیم یان

[۷] با استفاده از نامساوی چانگ و ارداس ثابت جدید و ساده‌تری برای تعمیم رنی-لامپرتی ارائه شده است. در حقیقت بیان دیگری از قضیهٔ ۹.۴ است [۲۲].

قضیهٔ ۱۰.۴. فرض کنید $\{A_n; n \geq ۱\}$ دنباله‌ای از پیشامدها باشد به‌طوری‌که در شرط (۱) صدق کند. آن‌گاه

$$\begin{aligned} P(A_n i.o.) &\geq \limsup_{n\longrightarrow\infty} \frac{\left[\sum_{j=۱}^{n} P(A_j)\right]^۲}{\sum_{i,j=۱}^{n} P(A_iA_j)} \\ &= \limsup_{n\longrightarrow\infty} \frac{\sum_{۱\leq i<j\leq n} P(A_i)P(A_j)}{\sum_{۱\leq i<j\leq n} P(A_iA_j)}. \end{aligned} \qquad (۲۹)$$

به ویژه، اگر پیشامدهای دنبالهٔ $\{A_n; n \geq ۱\}$ دو به دو مستقل یا همبستگی منفی داشته باشند

$$P(A_iA_j) \leq P(A_i)P(A_j), \forall i \neq j$$

آن‌گاه

$$P(A_n\ i.o) = ۱.$$

۵.۴ تعمیم لامپرتی

قضیهٔ ۱۱.۴. اگر دنبالهٔ $\{A_n; n \geq ۱\}$ در (۱) صدق کند و برای همهٔ مقادیر $i, j > N$ و ثابت‌های N و $C < \infty$ داشته باشیم [۱۲]

$$P(A_iA_j) \leq CP(A_i)P(A_j), \quad (۳۰)$$

آن‌گاه خواهیم داشت

$$P(A_n\ i.o) > ۰. \quad (۳۱)$$

اثبات. برای اثبات $P(A_n\ i.o) > ۰$ باید نشان دهیم وقتی $k \longrightarrow \infty$، $P(\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n)$ از صفر کراندار است بدین مفهوم که اگر $k \longrightarrow \infty$، آن‌گاه $m > ۰$ وجود دارد به‌طوری‌که $P(\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n) > m$. برای این منظور فرض کنید I زیر بازهٔ بسته‌ای از $(۰, \frac{۲}{c})$ باشد. توجه داشته باشید به‌ازای هر $x \in I$، $x - \frac{۱}{۲}cx^۲$ از صفر کراندار است اینک با توجه به (۱) می‌توان $n_۲ > n_۱ > k$ را طوری انتخاب کرد که

$$\sum_{n=n_۱}^{n_۲} P(A_n) = x \in I,$$

این عمل همواره امکان‌پذیر است مگر این‌که $P(A_n) \not\longrightarrow ۰$ که در این‌صورت رابطهٔ (۳۱) واضح است. اینک طبق نا مساوی بونفرونی خواهیم داشت:

$$P(\bigcup_{n=n_۱}^{n_۲} A_n) \geq \sum_{n=n_۱}^{n_۲} P(A_n) - \sum_{n_۱ \leq n < m \geq n_۲} P(A_nA_m)$$
$$\Longrightarrow P(\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n) \geq P(\bigcup_{n=n_۱}^{n_۲} A_n) \geq \sum_{n=n_۱}^{n_۲} P(A_n) - \frac{۱}{۲}c \sum_{n,m=n_۱\ n\neq m}^{n_۲} P(A_n)P(A_m)$$
$$\geq x - \frac{۱}{۲}c \sum_{n,m=n_۱}^{n_۲} P(A_n)P(A_m) = x - \frac{۱}{۲}cx^۲.$$

با توجه به این‌که $x - \frac{۱}{۲}cx^۲$ از صفر کراندار است،

$$P(A_n\ i.o) > ۰.$$

□

۶.۴ تعمیم ارتگا-شبر

قضیهٔ ۱۲.۴. اگر دنبالهٔ $\{A_n; n \geq ۱\}$ در (۱) صدق کند و

$$\liminf_{n \longrightarrow \infty} \frac{\sum_{۱\leq i<j\leq n}[P(A_iA_j) - P(A_i)P(A_j)]}{\left[\sum_{k=۱}^{n} P(A_k)\right]^۲} \leq ۰. \quad (۳۲)$$

آن‌گاه

$$P(A_n\ i.o) = ۱. \quad (۳۳)$$

اثبات. فرض کنید $N_n = \sum_{i=۱}^{n} I_{A_i}$ که در آن

$$I_{A_i} = \begin{cases} ۱ & if \quad A_i \\ ۰ & \quad o.w. \end{cases}$$

و

$$E(N_n) = \sum_{i=۱}^{n} P(A_i) = \infty,$$

با استفاده از نامساوی چبیشف داریم؛

$$P\{|N_n - E(N_n)| > \frac{۱}{۲}E(N_n)\} \leq \frac{۴Var(N_n)}{(E(N_n))^۲},$$

با توجه به فرض (۳۲) و غیرنزولی بودن N_n و نامساوی زیر

$$Var(N_n) \leq \sum_{i=۱}^{n} P(A_i) + ۲\sum_{i=۱}^{n}\left[P(A_i \bigcap A_j) - P(A_i)P(A_j)\right]$$

از طرفی در ثابت قضیه ۶.۴ داشتیم؛

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{۴Var(N_n)}{(E(N_n))^۲} = ۰,$$

بنا بر این

$$P(A_n\ i.o) = ۱. \quad (۳۴)$$

□

۷.۴ تعمیم‌های پتروف

پتروف در سال ۲۰۰۲ تعمیمی از لم دوم بورل-کانتلی را مطرح کرد و سپس در سال ۲۰۰۴ این تعمیم را به‌صورت کلی‌تری در قالب یک قضیه ارائه نمود. در ادامه به این تعمیم‌ها پرداخته می‌شود [۱۶، ۱۷].

قضیهٔ ۱۳.۴. اگر دنبالهٔ $\{A_n; n \geq 1\}$ در (۱) صدق کند و برای همهٔ مقادیر $i, j > N, (i \neq j)$ و ثابت‌های N و $H \geq 1$ داشته باشیم

$$P(A_iA_j) \leq HP(A_i)P(A_j), \tag{۳۵}$$

آن‌گاه

$$P(A_n\ i.o) \geq \frac{1}{H}. \tag{۳۶}$$

قضیهٔ ۱۴.۴. فرض کنید $\{A_n; n \geq 1\}$ دنباله‌ای از پیشامدها باشد که در (۱) صدق می‌کند و به‌ازای هر i, j به اندازه کافی بزرگ و $i \neq j$ داشته باشیم:

$$P(A_iA_j) \leq P(A_i)P(A_j), \tag{۳۷}$$

آن‌گاه

$$P(A_n\ i.o) = 1. \tag{۳۸}$$

قضیهٔ ۱۵.۴. فرض کنید $\{A_n; n \geq 1\}$ یک دنباله از پیشامدها باشد که در (۱) صدق کند و برای ثابت دلخواه و حقیقی H ، α_H را به‌صورت زیر تعریف کنیم:

$$\alpha_H = \liminf_{n \longrightarrow \infty} \frac{\sum_{1 \leq i < j \leq n}[P(A_iA_j) - HP(A_i)P(A_j)]}{\left[\sum_{k=1}^{n} P(A_j)\right]^2}, \tag{۳۹}$$

آن‌گاه

$$P(A_n\ i.o) \geq \frac{1}{H + 2\alpha_H}. \tag{۴۰}$$

با استفاده از لم زیر قضیه فوق را ثابت می‌کنیم.

لم ۱۶.۴. به‌ازای هر $m \geq 1$ صحیح قرار دهید

$$\beta_H^{(m)} = \liminf_{n \longrightarrow \infty} \frac{\sum_{m \leq i < j \leq n}[P(A_iA_j) - HP(A_i)P(A_j)]}{\left[\sum_{k=m}^{n} P(A_j)\right]^2},$$

اینک اگر شرط (۱) برقرار باشد، آن‌گاه به‌ازای هر H ثابت و حقیقی و هر عدد صحیح و ثابت مثبت m، $\alpha_H = \beta_H^{(m)}$.

در ادامه به ثابت قضیه ۱۵.۶ پرداخته می‌شود.

اثبات. اثبات این قضیه بر اساس نامساوی چانگ-ارداس بنا نهاده شده است. طبق نامساوی، اگر $\{A_n; n \geq 1\}$ پیشامدهای دلخواهی باشند آن‌گاه

$$P\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) \;\geq\; \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} P(A_k)\right)^2}{\sum_{i,k=1}^{n} P(A_k \bigcap A_i)}. \tag{۴۱}$$

اینک فرض کنید $\{A_n; n \geq 1\}$ دنباله‌ای از پیشامدها باشد که در (۱) صدق کند و H ثابت حقیقی باشد؛ اگر $m < n$ آن‌گاه با توجه به نامساوی چانگ-ارداس

$$P\Big(\bigcup_{k=m}^{n} A_k\Big) \;\geq\; \frac{\left(\sum_{k=m}^{n} P(A_k)\right)^2}{\sum_{i,k=m}^{n} P(A_k \bigcap A_i)}, \tag{۴۲}$$

از طرفی

$$\begin{aligned}\sum_{i,k=m}^{n} P(A_kA_i) &= \sum_{k=m}^{n} P(A_k) + 2\sum_{m \leq i < k \leq n} P(A_kA_i)\\ &= \sum_{k=m}^{n} P(A_k) + T_1 + T_2.\end{aligned} \tag{۴۳}$$

که در آن

$$\begin{aligned}T_1 &= 2\sum_{m \leq i < k \leq n}(P(A_iA_k) - HP(A_i)P(A_k)),\\ T_2 &= 2H\sum_{m \leq i < k \leq n} P(A_i)P(A_k).\end{aligned} \tag{۴۴}$$

واضح است که

$$\begin{aligned}2\sum_{m \leq i < k \leq n} P(A_i)P(A_k) =& \Big(\sum_{k=m}^{n} P(A_k)\Big)^2\\ &- \sum_{k=m}^{n}(P(A_k))^2.\end{aligned} \tag{۴۵}$$

و

$$\sum_{k=m}^{n}(P(A_k))^2 \leq \sum_{k=m}^{n} P(A_k).$$

با توجه به نامساوی فوق و رابطهٔ (۱)، به‌ازای هر m ثابت، اگر $n \longrightarrow \infty$ آن‌گاه

$$\frac{\sum_{k=m}^{n}(P(A_k))^2}{\left(\sum_{k=m}^{n} P(A_k)\right)^2} \leq \Big(\sum_{k=m}^{n} P(A_k)\Big)^{-1} \longrightarrow 0, \tag{۴۶}$$

با به‌کارگیری (۴۴) و(۴۵) داریم:

$$\begin{aligned}&\frac{T_۲}{\left(\sum_{k=m}^n P(A_k)\right)^۲}\\&=\frac{H\left[\left(\sum_{k=m}^n P(A_k)\right)^۲-\sum_{k=m}^n (P(A_k))^۲\right]}{\left(\sum_{k=m}^n P(A_k)\right)^۲}\\&=H\left[۱-\frac{\sum_{k=m}^n (P(A_k))^۲}{\left(\sum_{k=m}^n P(A_k)\right)^۲}\right]\\&\Longrightarrow \lim_{n\longrightarrow\infty} H\left[۱-\frac{\sum_{k=m}^n (P(A_k))^۲}{\left(\sum_{k=m}^n P(A_k)\right)^۲}\right]=H. \qquad (۴۷)\end{aligned}$$

تساوی اخیر از رابطهٔ (۴۶) نتیجه شده است. با توجه به (۴۲) و (۴۳) داریم؛

$$\begin{aligned}P(\bigcup_{k=m}^n A_k)\geq&\left(\frac{\sum_{i,k=m}^n P(A_kA_i)}{\left(\sum_{k=m}^n P(A_k)\right)^۲}\right)^{-۱}\\=&\left(\frac{\sum_{k=m}^n P(A_k)+T_۱+T_۲}{\left(\sum_{k=m}^n P(A_k)\right)^۲}\right)^{-۱}\\=&\Bigg(\Big(\sum_{k=m}^n P(A_k)\Big)^{-۱}+T_۱\Big(\sum_{k=m}^n P(A_k)\Big)^{-۲}\\&+T_۲\Big(\sum_{k=m}^n P(A_k)\Big)^{-۲}\Bigg)^{-۱}.\end{aligned}$$

اینک باتوجه (۴۷) به‌ازای هر m ثابت، اگر $n\longrightarrow\infty$، آن‌گاه

$$P(\bigcup_{k=m}^\infty A_k)\geq\left(H+\liminf_{n\longrightarrow\infty} T_۱\Big(\sum_{k=m}^n P(A_k)\Big)^{-۲}\right)^{-۱}.$$

در نتیجه طبق لم (۱۶.۴) خواهیم داشت:

$$P(\bigcup_{k=m}^\infty A_k)\geq\big(H+۲\alpha_H\big)^{-۱},$$

اگر قرار دهیم $B_m=\bigcup_{k=m}^\infty A_k$، آن‌گاه

$$P(B_m)\geq\big(H+۲\alpha_H\big)^{-۱}.$$

از آن‌جاکه $\{B_n\}$ نزولی است، طبق قضیه پیوستگی

$$\lim_{m\to\infty}P(B_m)=P(\bigcap_{m=۱}^\infty B_m)=P(A_n\ i.o),$$

بنا بر این

$$P(A_n\ i.o)\geq\big(H+۲\alpha_H\big)^{-۱}.$$

و قضیه ثابت می‌شود. □

تذکر ۱۷.۴. برای ثابت دلخواه و حقیقی H تحت شرط (۱) داریم؛

$$H+۲\alpha_H\geq ۱.$$

نتیجه ۱۸.۴. ۱. اگر $H=۰$ باشد، آن‌گاه تحت شرط (۱)

$$P(A_n\ i.o)\geq\frac{۱}{۲\alpha_۰}.$$

که نتیجه‌ای از [۱۰] می‌باشد.

۲. اگر $H=۱$ باشد تحت شرط(۱)

$$P(A_n\ i.o)\geq\frac{۱}{۱+۲\alpha_۱},$$

و اگر شرایط (۱) و (۳۲) برقرار باشند، آن‌گاه

$$P(A_n\ i.o)=۱.$$

که نتیجه‌ای از ارتگا و شبر (۱۹۸۳) است. با توجه به این‌که برای $H=۱$، $H+۲\alpha_H\geq ۱$ و $\gamma=۱+۲\alpha_۱\geq ۱$. بنا بر این تحت شرط (۱)، $\alpha_۱\geq ۰$.

۳. اگر شرایط (۱) و (۳۵) برای همهٔ مقادیر $i,k>N$ که $i\neq k$ و ثابت‌هایی مانند $H\geq ۱$ و N برقرار باشند، آن‌گاه $\alpha_H\leq ۰$ و در نتیجه

$$H+۲\alpha_H\leq H\Longrightarrow\frac{۱}{H}\leq\frac{۱}{H+۲\alpha_H},$$

بلافاصله از رابطهٔ (۴۰) نتیجه می‌شود

$$P(A_n\ i.o)\geq\frac{۱}{H}.$$

که همان تعمیم [۱۶] است.

۸.۴ ارتباط تعمیم رنی- لامپرتی با تعمیم پتروف (۱۵.۴) توسط یان

قضیهٔ ۱۹.۴. تعمیم رنی-لامپرتی همان تعمیم پتروف است [۲۲]. به‌عبارت دیگر

$$L=H+۲\alpha_H=\liminf_{n\longrightarrow\infty}\frac{\sum_{i,j=۱}^n P(A_iA_j)}{\left[\sum_{j=۱}^n P(A_j)\right]^۲}.$$

اثبات. با توجه به برابری‌های زیر

$$2\sum_{1\le i<j\le n} P(A_iA_j) = 2\sum_{i,j=1}^{n} P(A_iA_j) - \sum_{j=1}^{n} P(A_j),$$

$$2\sum_{1\le i<j\le n} P(A_i)P(A_j) = \Big(\sum_{j=1}^{n} P(A_j)\Big)^2 - \sum_{j=1}^{n} \big(P(A_j)\big)^2.$$

داریم،

$$\begin{aligned} 2\alpha_H =& \liminf_{n\longrightarrow\infty} \Big\{ \Big(\sum_{i,j=1}^{n} P(A_iA_j)\Big) \big(\sum_{j=1}^{n} P(A_j)\big)^{-2} \\ & - \big(\sum_{j=1}^{n} P(A_j)\big)^{-1} - H \\ & + H\Big(\sum_{j=1}^{n}\big(P(A_j)\big)^2\Big)\big(\sum_{j=1}^{n} P(A_j)\big)^{-2}\Big\} \\ \Longrightarrow & H + 2\alpha_H = \liminf_{n\longrightarrow\infty} \frac{\sum_{i,j=1}^{n} P(A_iA_j)}{\big[\sum_{j=1}^{n} P(A_j)\big]^2}. \end{aligned}$$

$\square$

۹.۴ تعمیم آمجیبیچ

قضیهٔ ۲۰.۴. اگر $\{A_n; n\ge 1\}$ دنباله‌ای از پیشامدها باشد به‌طوری‌که در شرط (۱) صدق کند و برای همهٔ مقادیر

$$i_p > i_{p-1} > \ldots > i_1 > L$$

، که L و $C\ge 1$ ثابت هستند، داشته باشیم

$$P\Big(\bigcap_{j=1}^{p} A_{i_j}\Big) \le C\prod_{j=1}^{p} P(A_{i_j}), \qquad (۴۸)$$

آن‌گاه

$$P(A_n\ i.o) \ge \frac{1}{C^{\frac{1}{p-1}}}. \qquad (۴۹)$$

قضیهٔ ۲۱.۴. فرض کنید $\{A_n; n\ge 1\}$ دنباله‌ای از پیشامدها باشد به‌طوری‌که در شرط (۱) صدق کند و $p\ge 2$ عدد صحیح دلخواهی باشد. اگر I_{A_i} تابع نشانگر پیشامد A_i،

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} I_{A_k}, \qquad E(S_n) = \textstyle\sum_{k=1}^{n} P(A_k),$$

و

$$\alpha = \liminf_{n\longrightarrow\infty} \frac{\sum_{1\le i_1\le i_2\ldots\le i_p\le n} P(\bigcap_{j=1}^{p} A_{i_j})}{(E(S_n))^p}, \qquad (۵۰)$$

آن‌گاه

$$P(A_n\ i.o) \ge \frac{1}{(p!\alpha)^{\frac{1}{p-1}}}. \qquad (۵۱)$$

قضیهٔ ۲۲.۴. اگر $\{A_n; n\ge 1\}$ دنباله‌ای از پیشامدها باشد به‌طوری‌که در شرط (۱) صدق کند و $p\ge 2$ عدد صحیح دلخواهی باشد، آن‌گاه

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{1}{(E(S_n))^p} \sum_{1\le i_1\le i_2\ldots\le i_p\le n} \prod_{j=1}^{p} P(A_{i_j}) = \frac{1}{p!}, \qquad (۵۲)$$

و

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{1}{E(S_n)^p} \sum_{1\le i_1\le i_2\ldots\le i_p\le n} P\Big(\bigcap_{j=1}^{p} A_{i_j}\Big) = \frac{1}{p!}. \qquad (۵۳)$$

۱۰.۴ تعمیم چاندرا

قضیهٔ ۲۳.۴ (۶). فرض کنید دنبالهٔ $\{A_n; n\ge 1\}$ در رابطهٔ (۱) صدق کند و

$$L = \liminf_{n\longrightarrow\infty} \frac{\sum_{1\le i<j\le n}[P(A_iA_j) - a_{ij}]}{\big[\sum_{j=1}^{n} P(A_j)\big]^2}, \qquad (۵۴)$$

به‌طوری‌که به‌ازای $1\le i<j$، $C_1\ge 0, C_2\ge 0$ و ثابت C_3،

$$\begin{aligned} a_{ij} =& P(A_{j-i})\big[C_1P(A_i) + C_2P(A_j)\big] \\ & + C_3P(A_i)P(A_j), \end{aligned} \qquad (۵۵)$$

اگر L متناهی باشد (L ممکن است به C_1، C_2 و C_3 بستگی داشته باشد) و

$$C + 2L \ge 1,$$

آن‌گاه

$$P(A_n\ i.o) \ge \frac{1}{C+2L}, \qquad (۵۶)$$

که در آن $C = C_3 + 2(C_1 + C_2)$.

برای اثبات این قضیه به لم زیر نیاز داریم.

لم ۲۴.۴. اگر شرط (۱) برقرار باشد و

$$B_m = \liminf_{n\longrightarrow\infty} \frac{\sum_{m\le i<j\le n}[P(A_iA_j) - a_{ij}]}{\big[\sum_{j=m}^{n} P(A_j)\big]^2} \qquad m\ge 1, (۵۷)$$

آن‌گاه

$$B_1 = B_m, \qquad \forall m\ge 1. \qquad (۵۸)$$

در ادامه به اثبات قضیه پرداخته می‌شود.

اثبات. فرض کنید $m \geq ۱$ عدد صحیح و $N \geq m$ باشد به‌طوری‌که $\sum_{j=m}^{n} P(A_j) > ۰$.
با استفاده از نا مساوی چانگ-اردلس (۴۲) و با توجه به این‌که

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=m}^{n} P(A_i \bigcap A_j) =& S_{m,n} + T_۱ + T_۲ \\
S_{m,n} =& \sum_{j=m}^{n} P(A_j) \\
T_۱ =& ۲ \sum_{m \leq i < j \leq n} [P(A_i A_j) - a_{ij}] \\
T_۲ =& ۲ \sum_{m \leq i < j \leq n} a_{ij} \\
T_۲ \leq& ۲ \left(\frac{C_۳}{۲} + C_۱ + C_۲ \right) S_{m,n}^۲ \\
&+ \left(C_۱ + C_۲ \right) S_{۱,m} S_{m,n} \\
&- C_۳ \sum_{j=m}^{n} (P(A_j))^۲.
\end{aligned}$$

خواهیم داشت

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{T_۲}{S_{m,n}^۲} \leq C,$$

که در آن $C = C_۳ + ۲(C_۱ + C_۲)$؛ بنا بر این با توجه به شرط (۱)

$$\begin{aligned}
P(\bigcup_{j=m}^{\infty} A_j) &\geq (\liminf \frac{T_۱}{S_{m,n}^۲} + \limsup \frac{T_۲}{S_{m,n}^۲})^{-۱} \\
&\geq (۲L + C)^{-۱} \qquad \text{(طبق لم (۲۴.۴))}
\end{aligned}$$

واضح است که اگر $C_۱ = C_۲ = ۰$، همان تعمیم پتروف حاصل می‌شود. □

با به‌کارگیری اثبات فوق نتیجهٔ کلّی‌تر زیر به دست می‌آید.

قضیهٔ ۲۵.۴. فرض کنید $\{A_n ; n \geq ۱\}$ دنبالهٔ دلخواهی از پیشامدها باشد که در شرط (۱) صدق می‌کند،

$$L = \liminf_{n \longrightarrow \infty} \frac{\sum_{۱ \leq i < j \leq n} [P(A_i A_j) - a_{ij}]}{\left[\sum_{j=۱}^{n} P(A_j) \right]^۲}, \qquad (۵۹)$$

$$\sum_{۱ \leq i < m \leq j \leq n} |a_{ij}| = o\left(\Big(\sum_{m \leq j \leq n} P(A_j) \Big)^۲ \right) \quad \forall m \geq ۱, \qquad (۶۰)$$

و

$$\liminf_{n \to \infty} \limsup_{n \to \infty} \frac{\sum_{m \leq i < j \leq n} a_{ij}}{\left(\sum_{m \leq j \leq n} P(A_j) \right)^۲} \leq d.$$

اگر L و d متناهی باشند، آن‌گاه

$$\begin{aligned}
P(A_n \; i.o) &\geq (۲d + ۲L)^{-۱}. \\
d + L &\geq \frac{۱}{۲}
\end{aligned}$$

۱۱.۴ تعمیم چانگ و اردلس

قضیهٔ ۲۶.۴. فرض کنید $\{A_n ; n \geq ۱\}$ دنبالهٔ دلخواهی از پیشامدها باشد که در شرایط زیر صدق کند [۷]،

الف)

$$\sum P(A_k) = \infty,$$

ب) به‌ازای هر جفت n, h صحیح مثبت که $n \geq h$، $C(h)$ و $H(n,h) > h$ وجود دارد به‌طوری‌که به‌ازای هر داریم:

$$P(A_k | A_h^c \dots A_n^c) > C P(A_k) \quad \forall k \geq H(n,h) \qquad (۶۱)$$

ج) دو مقدار مطلقاً اثبات $C_۱$ و $C_۲$ با ویژگی‌های زیر وجود دارد:

متناظر با هر A_i، مجموعه‌ای از پیشامدهای $A_{i_۱}, \dots, A_{i_s}$ از $\{A_k\}$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$\sum_{j=۱}^{s} P(A_i \bigcap A_{i_j}) < C_۱ P(A_i), \qquad (۶۲)$$

و اگر $k > i$ ولی A_k یکی از A_{i_j}ها ($۱ \leq j \leq s$) نباشد، آن‌گاه

$$P(A_i \bigcap A_k) < C_۲ P(A_i) P(A_k), \qquad (۶۳)$$

تحت شرایط فوق

$$P(A_n \; i.o.) = ۱. \qquad (۶۴)$$

با استفاده از لم زیر می‌توان قضیهٔ فوق را به راحتی ثابت نمود.

لم ۲۷.۴. فرض کنید $\{A_n; n \geq ۱\}$ دنبالهٔ دلخواهی از پیشامدها و $P(\bigcup_{k=۱}^{n} A_k) > ۰$ باشد داریم:

$$۲\sum_{۱\leq i<k\geq n} P(A_i \bigcap A_k) \geq \Big[P\big(\bigcup_{k=۱}^{n} A_k\big)\Big]^{-۱}\Big(\sum_{k=۱}^{n} P(A_k)\Big)^{۲} - \sum_{k=۱}^{n} P(A_k). \qquad (۶۵)$$

۱۲.۴ تعمیم شوستر

قضیهٔ ۲۸.۴. الف) اگر به‌ازای هر مجموعه $A \in \mathcal{F}$[۱۸] که $\sum_{k=۱}^{\infty} P(A \bigcap A_k) = \infty,$ و $P(A) > ۰$ آن‌گاه

$$P(A_k\ i.o) = ۱. \qquad (۶۶)$$

ب) اگر $A \in \mathcal{F}$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که

$$\sum_{k=۱}^{\infty} P(A \bigcap A_k) < \infty,$$

آن‌گاه داریم:

$$P(A_k\ i.o) \leq ۱ - P(A). \qquad (۶۷)$$

قضیهٔ ۲۹.۴. شرط لازم و کافی برای این‌که فقط تعداد متناهی از پیشامدهای A_k با احتمال یک رخ دهد این است که به‌ازای هر $\varepsilon > ۰$ مجموعهٔ اندازه پذیر D_ε وجود داشته باشد به‌طوری‌که

الف) $P(D_\varepsilon) > ۱ - \varepsilon$،

ب) $\sum_{k=۱}^{\infty} P(D_\varepsilon \bigcap A_k) < \infty$.

نتیجه ۳۰.۴. الف) اگر مجموعه‌ای مانند $A \in \mathcal{F}$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $\sum_{k=۱}^{\infty} P(A \bigcap A_k)$ همگرا باشد، آن‌گاه فقط تعداد متناهی A_k با احتمالی ناکمتر از $P(A)$ اتفاق می‌افتد.

ب) با ترکیب نتایج قضایای (۲۸.۴) و (۲۹.۴) تساوی زیر برقرار است؛

$$P(A_k\ i.o) = ۱ - \sup\{P(A) : A \in \mathcal{F}, \sum_{k=۱}^{\infty} P(A \bigcap A_k) < \infty\}.$$

۱۳.۴ تعمیم براس

قضیهٔ ۳۱.۴. $P(A_n\ i.o.) = ۱$ اگر و تنها اگر یک دنباله اکیداً صعودی از اعداد طبیعی مانند $\{t_k; k \geq ۱\}$ وجود داشته باشد [۴] به‌طوری‌که،

$$\sum_k P(A_{t_k} | A^c_{t_{k-۱}}) = \infty.$$

۱۴.۴ تعمیم فنگ- لی-شن

قضیهٔ ۳۲.۴. فرض کنید عبارت زیر برقرار باشد:

$$\lim_{m\longrightarrow\infty} \sum_{n=۱}^{m} w_n P(A_n) = \infty, \qquad (۶۸)$$

که w_n وزن حقیقی است (که می‌تواند منفی هم باشد) [۸]، آن‌گاه

$$P(\limsup A_n) \geq \limsup_{n\longrightarrow\infty} \frac{(\sum_{k=۱}^{n} w_k P(A_k))^{۲}}{\sum_{i=۱}^{n}\sum_{j=۱}^{n} w_i w_j P(A_i \bigcap A_j)}. \qquad (۶۹)$$

با انتخاب $w_n = \frac{۱}{P(A_n)}$ در قضیهٔ فوق نتیجهٔ زیر به دست می‌آید؛

نتیجه ۳۳.۴. فرض کنید $P(A_n) > ۰$ به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$ برقرار باشد، آن‌گاه عبارت زیر برقرار می‌شود:

$$P(\limsup A_n) \geq \limsup_{n\longrightarrow\infty} \frac{n^{۲}}{\sum_{i=۱}^{n}\sum_{j=۱}^{n} \frac{P(A_i \bigcap A_j)}{P(A_i)P(A_j)}}. \qquad (۷۰)$$

با استفاده از دو لم زیر می‌توان قضیه فوق را ثابت کرد.

لم ۳۴.۴. فرض کنید شرط (۶۸) برقرار باشد و $w_n \in \mathbb{R}$ آن‌گاه

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=۱}^{n}\sum_{j=۱}^{n} P(A_i \bigcap A_j)}{\sum_{i=۲}^{n}\sum_{j=۲}^{n} P(A_i \bigcap A_j)} = ۱. \qquad (۷۱)$$

گزارهٔ ۳۵.۴. فرض کنید شرط (۶۸) برقرار باشد، $w_n \in \mathbb{R}$ و $s \in \mathbb{N}$، آن‌گاه خواهیم داشت:

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{(\sum_{k=۱}^{n} w_k P(A_k))^{۲}}{\sum_{i=۱}^{n}\sum_{j=۱}^{n} w_i w_j P(A_i \bigcap A_j)} = \limsup_{n\to\infty} \frac{(\sum_{k=s}^{n} w_k P(A_k))^{۲}}{\sum_{i=s}^{n}\sum_{j=s}^{n} w_i w_j P(A_i \bigcap A_j)}. \qquad (۷۲)$$

۱۵.۴ تعمیم زای

قضیهٔ ۳۶.۴. فرض کنید $\{A_n; n \geq ۱\}$ دنباله‌ای از پیشامدها باشد که در شرط (۱) صدق کند [۲۳]، I_{A_i} تابع نشانگر پیشامد A_i باشد، $T_n = \frac{S_n I_{(S_n > ۰)}}{E(S_n)}$ و $S_n = \sum_{i=۱}^{n} I_{Ai}$. آن‌گاه

$$\sup_{p>۰, p\neq ۱} \quad \limsup_{n\longrightarrow\infty}(E(T_n^p))^{\frac{۱}{۱-p}} \leq P(\limsup A_n) \leq \inf_{p<۰} \liminf (E(T_n^p))^{\frac{۱}{۱-p}}. \qquad (۷۳)$$

تذکر ۳۷.۴. برای $p = ۲$، داریم:

$$\sup_{p>۰, p\neq ۱} \quad \limsup_{n\to\infty} \quad (E(T_n^p))^{\frac{۱}{۱-p}} \geq \limsup_{n\longrightarrow\infty}(E(T_n^۲))^{-۱} = \limsup_{n\longrightarrow\infty} \frac{(\sum_{i=۱}^{n} P(A_i))^۲}{\sum_{i,k=۱}^{n} P(A_i \bigcap A_k)} = \frac{۱}{۲\alpha_۰}.$$

که نشان می‌دهد قضیهٔ پتروف (۱۵.۴) حالت خاصی از قضیه فوق است. چندین تعمیم دیگر مانند تعمیم [۹، ۱۰، ۱۲، ۱۵، ۱۶، ۱۷] حالت‌های خاصی از این تعمیم می‌باشند.

۵ نتیجه‌گیری

لم بورل-کانتلی تحت شرایطی، احتمال رخداد تعداد نامتناهی از یک دنباله از پیشامدها را در یک فضای احتمال محاسبه می‌کند. با تعمیم‌های بیان شدهٔ لم اول و دوم بورل-کانتلی، شرایط محاسبهٔ احتمال رخداد تعداد نامتناهی از این پیشامدها ساده‌تر شده است. این تعمیم‌ها در لم اول با تضعیف شرط همگرایی و در لم دوم با تضعیف شرط استقلال به‌دست‌آمده‌اند.

مراجع

[1] Amghibech, S. (2006). On the Borel-Cantelli lemma and moments, *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, **47**(**4**), 669-680.

[2] Barndorff-Nielsen, O. (1962). On the rate of growth of the partial maxima of a sequence of independent identically distributed random variables, *Mathematical Scandinavica*, **9**(**2**), 383-394.

[3] Balakrishnan, N., and Stepanov, A. (2010). Generalization of the Borel-Cantelli Lemma, *The Mathematical Scientist*, **35**, 61–62.

[4] Bruss, T. (1980), A counterpart of the Borel-Cantelli lemma,*Journal of Application probability*, **17**(**4**). 1094-1101

[5] Chandra, T. K. (2012). *The Borel-Cantelli lemma*, SpringerBriefs in Statistics, India

[6] Chandra, T. K. (2008). The Borel- Cantelli under dependence canditions, *Statistics and Probability Letters*, **78**, 390–395

[7] Chung, K. L. and Erdo, S. P. (1951). On the application of the Borel–Cantelli lemma. *Transactions of the American Mathematical Society*, **72**, 179–186.

[8] Feng ,C., Li, L. and Shen, J. (2009). On the Borel–Cantelli lemma and its generalization, *Comptes Rendus Academie Society Paris Series*, 1313–1316.

[9] Erdos, P. and Renyi, A. (1959). On Cantor's series with convergent $\sum \frac{1}{q_n}$, *Annales Universitatis Scientiarum Budapestinensis Sectio Mathematical*, **2**, 93–109.

[10] Kochen, S. P. and Stone, C. J. (1964). A note on the Borel–Cantelli lemma, *Illinois Journal of Mathematics*, **8**, 248–251.

[11] Gut, A. (2012). *Probability: A Graduate Course* (Vol. 75). Springer Science and Business Media, 96-114.

[12] Lamperti, J. (1963). Wiener's tests and Markov chains, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **6**, 58–66.

[13] Martikainen, A. I. and Petrov, V. V. (1990). On the Borel–Cantelli lemma, *Journal of Mathematical Science*, **63**, 540–544.

[14] Nash, S. W. (1954). An extension of the Borel-Cantelli lemma, *AMS*, **25**, 165–167

[15] Ortega, J. and Wschebor, M. (1983). On the sequence of partial maxima of some random sequences, *Stochastic Procession Applications*, **16**, 85–98.

[16] Petrov, V. V. (2002). A note on the Borel–Cantelli lemma, *Statistics Probability and Letters*, **58**, 283–286.

[17] Petrov, V. V. (2004). A generalization of the Borel-Cantelli Lemma, *Statistics Probability and Letters*, **67**(**3**), 233–239.

[18] Shuster, J. (1970). On the Borel-Cantelli problem, *Canadian Mathematical Bulletin*, **13**(**2**), 273-275.

[19] Stepanov, A. (2006). Generaliztion of the Borel-Cantelli lemma, *arxive Mathematical Statistics*

[20] Stepanov, A. (2011). On the Borel-Cantelli lemma,*arXiv:1110.2577v2 [math.PR].*

[21] Stepanov, A. (2012). On Strong Convergence for Maxima, *arXiv:1206.4799v1 [math.PR].*

[22] Yan, J. (2006). A simple proof of two generalized Borel–Cantelli lemmas, In memoriam Paul-André Meyer: Seminar on Probability Theory XXXIX, *in: Lecture Notes in Mathematics*, **1874**, 77–79.

[23] Xie, Y. (2008). A bilateral inequality on the Borel–Cantelli Lemma, *Statistics and Probability Letters*, **78**, 2052–2057