تعیین اندازهٔ نمونهٔ بیزی با استفاده از تابع سود نمایی مندرج به‌روش عددی

مسعود قاسمی بهجانی،[1] حسن زارعی[2]

تاریخ دریافت: ۱۳۹۵/۱۱/۱۶
تاریخ پذیرش: ۱۳۹۶/۱/۳۰

چکیده:

در این مقاله با پیشنهاد یک تابع سود و به دست آوردن برآورد بیزی، حجم نمونهٔ مطلوب را بر اساس این تابع سود به دست می‌آوریم. این تابع سود به‌صورت مخصوص برای به دست آوردن برآورد بیز وقتی توزیع پسینی، گاما باشد طراحی شده است. با استفاده از این تابع سود، حجم نمونهٔ مطلوب را برای توزیع‌های نرمال با میانگین معلوم، نمایی، پارتو و به‌قسمی می‌یابیم که هزینهٔ نمونه‌گیری کمینه شود. در این فرایند برای کمینه کردن هزینه از تابع هزینهٔ لیندلی استفاده می‌کنیم. در این‌جا به‌دلیل دشوار بودن محاسبات، اندازهٔ نمونه را نمی‌توان به‌روش آنالیزی به دست آورد به همین دلیل به‌کمک روش‌های عددی،پوآسون حجم نمونهٔ مطلوب را به دست می‌آوریم.

واژه‌های کلیدی: توزیع پارتو، تابع هزینه، تابع سود، تابع زیان، ریسک پسینی.

۱ مقدمه

محاسبهٔ اندازهٔ نمونه در مسائل عملی موضوع مهمی است که مستقیماً با هزینهٔ مطالعه و گردآوری داده‌ها ارتباط دارد. در هر پژوهش، دانستن تعداد مشاهدات (اندازهٔ نمونه) به‌طوری که هزینهٔ کلی طرح نیز مینیمم شود، مسئله‌ای است که از اهمیت زیادی برخوردار می‌باشد. هزینهٔ کلی، شامل زیان حاصل‌شده از تصمیم‌گیری و هزینهٔ تحلیل و هدایت آزمایش‌های انجام‌شده است. این هزینه به عوامل زیادی بستگی دارد. از جملهٔ عوامل مهم، یکی اندازهٔ نمونهٔ نهایی و دیگری روش جمع‌آوری داده‌ها است. برای داشتن دقت بیشتر و در نتیجه افزایش سود باید آزمایش‌های بیشتری انجام شود، که این امر باعث افزایش هزینهٔ آزمایش‌ها می‌شود. اوّلین مقاله بر اساس نظریهٔ تصمیم برای تعیین اندازهٔ نمونه [۶] بر پایهٔ تابع زیان ارائه شد. [۷] این روش دوباره مطرح شد و مورد توجه بسیاری از پژوهشگران قرار گرفت. مسئلهٔ پیدا کردن اندازهٔ نمونهٔ بهینه برای هر دو نوع نمونه‌گیری ثابت و دنباله‌ای در [۳] بحث شده است. برای برآورد میانگین یک توزیع اختیاری، [۵] یک معیار بیزی را بر اساس تغییر مورد انتظار برآورد نقطه‌ای برای میانگین مقادیر نمونهٔ بعدی مطرح کرده و حد بالایی را برای اندازهٔ نمونه محاسبه نموده است. [۱] مطالعهٔ نسبتاً جامعی روی هر دو دسته از روش‌ها ارائه کرده است. [۱۴] مسئله را بر اساس مقادیر مورد انتظار از اطلاعات نمونه بررسی کرده‌اند. [۱۹] با به‌کارگیری این روش در فاز دوم آزمایه‌های بالینی، اندازهٔ نمونه را با ماکسیمم‌سازی تابع سود خاصی به دست آورد. [۱۳] مسالهٔ تعیین اندازهٔ نمونه را با استفاده از روش بیزی برای یک آزمایهٔ بالینی مطرح و آن را برای حالتی خاص حل کردند. [۱۱] یک تابع هدف شامل هزینه و سود اجرای یک آزمایش تصادفی را مطرح نموده، با بهینه‌سازی آن، اندازهٔ نمونهٔ آزمایش تصادفی را به‌روش بیزی به دست آوردند. همچنین [۱۲]، مروری بر روش‌های مختلف بیزی برای تعیین اندازهٔ نمونهٔ آزمایش‌های تصادفی ارائه کرد. [۱۶] در مورد تعیین اندازهٔ نمونه در آزمایه‌های بالینی و حسابرسی مالی بحث کردند. در طول دههٔ اخیر، تعیین اندازهٔ نمونه از دیدگاه بیزی مورد توجه بسیاری از پژوهشگران، صنعت و دولت قرار گرفته است. اگرچه هنوز بین دانشمندان بیزی و کلاسیک بحث و اختلاف نظر وجود دارد، [۴،۲] به‌صورت موفقیت‌آمیزی، شایستگی‌های

[1] دانش‌آموختهٔ کارشناسی ارشد، گروه آمار دانشگاه سیستان و بلوچستان، ایران

[2] عضو هیئت علمی گروه آمار دانشگاه سیستان و بلوچستان، ایران

هر دو نگرش کلاسیک و بیزی را بیان کردند. به هر حال، هیچ‌یک از بحث‌ها راجع به تعیین اندازهٔ نمونه از دیدگاه بیزی برای آزمایش‌های بالینی در مرحلهٔ طرح‌ریزی میسر نشد؛ بنا بر این بسیاری از محققان از شبیه‌سازی استفاده کردند.

در این مقاله با در نظر گرفتن تابع هزینهٔ لیندلی و تابع سود به‌روش بیز به‌دنبال تعیین اندازهٔ نمونه ایم به‌طوری که هزینهٔ نمونه‌گیری کمینه شود. در ادامهٔ این بخش، تعریف‌های مورد نیاز را آورده‌ایم. سپس در بخش دوم، تابع سود مورد نظر را معرفی کرده، در نهایت در بخش سوم حجم نمونهٔ مطلوب را با استفاده از تابع سود معرفی شده به دست خواهیم آورد.

۱.۱ تابع هزینه

[۸] با فرض این‌که c_0 هزینهٔ زیرساختی از نمونه‌گیری یا هر هزینهٔ دیگر در نمونه‌گیری باشد و c هزینهٔ هر واحد نمونه‌گیری در نظر گرفته شود، تابع هزینه برای اندازهٔ نمونه را به‌صورت

$$C(n) = c_0 + cn; \quad n > 0 \tag{۱}$$

معرفی کرد. [۱۷] با اضافه کردن ریسک پسینی برآوردگر بیزی به این تابع هزینه، تابع هزینهٔ کل را به‌صورت

$$TC(n) = c_0 + cn + PR$$

به دست آورد.

حال با کمینه‌سازی هزینهٔ نمونه‌گیری، حجم نمونهٔ مطلوب را کمینه خواهیم کرد، که در برخی موارد ریسک پسینی به بردار تصادفی $\mathbf{X}$ بستگی دارد. در این‌صورت امید ریاضی ریسک پسینی (APR) را به دست آورده، به تابع هزینهٔ لیندلی اضافه می‌کنیم. در نتیجه، امید ریاضی هزینهٔ کل عبارت است از:

$$E(TC(n)) = c_0 + cn + APR\ .$$

۲ تابع سود

[۹] دستورالعمل واضح تعیین اندازهٔ نمونه بر اساس بیشترین سود مورد انتظار[۳] را با در نظر گرفتن تابع هزینهٔ خطی به‌صورت زیر تعریف کرد:

فرض کنید $X_1, X_2, ..., X_n$ یک نمونهٔ nتایی از تابع چگالی $p(X|\theta)$ باشد که پارامتر θ مجهول است. اگر $p(\mathbf{X}|\theta, n)$ تابع درست‌نمایی و $p(\theta)$ تابع چگالی پیشینی برای θ باشد، چگالی پسینی برای θ به‌صورت زیر خواهد بود:

$$p(\theta|\mathbf{X}, n) = \frac{p(\mathbf{X}|\theta, n)p(\theta)}{p(\mathbf{X}|\mathbf{n})}, \tag{۲}$$

که در آن $p(\mathbf{X}|n)$ تابع چگالی حاشیه‌ای X است.

حال تابع سود $U(n, \mathbf{X}, \delta, \theta)$ را در نظر می‌گیریم که δ برآورد θ است. در ابتدا از تابع سود نسبت به متغیرهای تصادفی θ و X امید ریاضی می‌گیریم و سپس بر اساس کمیّت‌های δ و n سود را بیشینه می‌کنیم. با استفاده از رابطهٔ (۲) می‌توان $p(\theta|\delta, \mathbf{X}, n)$ را به دست آورد، زیرا چگالی $p(\theta|\delta, \mathbf{X}, n)$ شبیه به $p(\theta|\mathbf{X}, n)$ است. از این رو δ تأثیری بر توزیع $\theta|\mathbf{X}, n$ ندارد. بنا بر این بیشینه‌سازی سود مورد انتظار بر اساس δ را به‌عنوان تصمیم نهایی اتخاذ می‌کنیم. امید ریاضی این مقدار بیشینه‌شده بر اساس $\mathbf{X}$ را می‌توان با استفاده از $p(\mathbf{X}|n)$ به دست آورد. پس در نهایت امید ریاضی را بر حسب n بیشینه می‌کنیم تا حجم نمونهٔ مطلوب به دست آید، که به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\max_n \left[\sum_X \max_\delta \left\{ \int U(n, \mathbf{X}, \delta, \theta) p(\theta|\mathbf{X}, n) d\theta \right\} p(\mathbf{X}|n) \right]. \tag{۳}$$

حال بر اساس [۱۵]، سود به $\mathbf{X}$ وابسته نیست و داریم:

$$U(n, \mathbf{X}, \delta, \theta) = U(\delta, \theta) - c_0 - cn, \tag{۴}$$

که c هزینهٔ نمونه‌گیری برای هر واحد از مشاهدات است و c_0 هزینهٔ پایه یا هر هزینهٔ دیگر مربوط به نمونه‌گیری است. سپس با استفاده از روابط (۳) و (۴) داریم:

$$\max_n \left[\sum_X \max_\delta \left\{ \int U(\delta, \theta) p(\theta|\mathbf{X}, n) d\theta \right\} p(\mathbf{X}|n) - c_0 - cn \right]. \tag{۵}$$

در نتیجه با در نظر گرفتن روابط (۲) و (۵) حالت نهایی برای به دست آوردن حجم نمونهٔ مطلوب به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\max_n \left[\sum_X \max_\delta \left\{ \int U(\delta, \theta) p(\mathbf{X}|\theta, n) p(\theta) d\theta \right\} - c_0 - cn \right]. \tag{۶}$$

این روش تعیین اندازهٔ نمونه ، بیشینه‌سازی سود مورد انتظار نامیده می‌شود. در این روش، بیشینه‌سازی سود مورد انتظار دو بار مورد استفاده قرار می‌گیرد: ابتدا بر اساس θ و δ و سپس بر اساس n و X. در این مقاله از تابع زیان نسبت به تابع سود، $U(n, \mathbf{X}, \delta, \theta)$،

[۳] Maximization of Expected Utility (MEU)

استفاده می‌کنیم که زیان به‌صورت زیر است:

$$-U(n, \mathbf{X}, \delta, \theta) = L(\delta, \theta) + c_{\cdot} + cn. \qquad (۷)$$

و صورت نهایی برای به دست آوردن کوچک‌ترین اندازهٔ نمونه عبارت خواهد بود از

$$\min_{n} \left[\sum_{X} \max_{\delta} \left\{ \int L(\delta, \theta) p(\mathbf{X}|\theta, n) p(\theta) d\theta \right\} + c_{\cdot} + cn \right]. \qquad (۸)$$

۱.۲ دستورالعمل

در این مقاله با معرفی تابع سود و برآورد بیز، حجم نمونهٔ مطلوب را بر اساس تابع سود معرفی‌شده به دست می‌آوریم. این تابع سود به‌صورت مخصوص برای به دست آوردن برآورد بیز وقتی توزیع پسینی، گاما باشد طراحی شده است. اگر δ برآورد θ باشد تابع سود و زیان باید توابعی از δ و θ باشند، که ترکیب δ و θ به‌صورت تفاضل یا نسبتی از آنها یا تفاضل و نسبت می‌باشد. اما بین توابع سود و زیان، رابطهٔ عکس وجود دارد. اگر تابع زیان را با $L(\delta,\theta)$ و تابع سود را با $U(\delta,\theta)$ تعریف کنیم، و با توجه به این‌که زیان عبارت است از بیشترین سود قابل کسب منهای سودی که در عمل به دست می‌آید، رابطهٔ بین تابع سود و زیان به‌صورت $L(\delta,\theta) = max_{\delta} U(\delta,\theta) - U(\delta,\theta)$ می‌باشد؛ به این معنی که برای برآورد بیز منحصر به فرد، کمینه‌سازی زیان مورد انتظار معادل است با بیشینه‌سازی سود مورد انتظار. در عمل می‌خواهیم برای تصمیم‌ها به‌طور دقیق توابع سود و زیان را در نظر بگیریم. در بیشتر موارد از میانگین پسینی استفاده می‌شود. بنا بر این اگر میانگین پسینی برآوردی برای انتخاب باشد، پس تابع سود یا زیان به‌صورت درجهٔ دوم است. حال برای این‌که نشان دهیم می‌توان هر تابع سود یا زیانی که نامتقارن است و میانگین پسینی را به‌عنوان برآورد بیز در نظر می‌گیرد داشته باشیم، یک تابع سود برای پارامتر عضو اعداد حقیقی مثبت تعریف می‌کنیم و در ادامه سود مورد انتظار را برای این تابع سود به دست می‌آوریم. بنا بر این یک صورت هم‌ارز تابع زیان ارائه می‌کنیم و در نهایت حجم نمونهٔ مطلوب را با کمینه کردن زیان مورد انتظار به دست می‌آوریم. بیشتر توابع ریسک پسینی، صورت‌هایی پیچیده دارند و نمی‌توان به‌سادگی و با مشتق‌گیری حجم نمونهٔ مطلوب را به دست آورد که در این حالات، حجم نمونهٔ مطلوب را با استفاده از روش‌های عددی به دست می‌آوریم.

۲.۲ تابع سود نمایی مندرج

اگر δ برآورد θ باشد تابع سود را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$U(\delta, \theta) = \frac{\theta}{\delta}\, exp\left[\left(۱ - \frac{\theta}{\delta}\right)\right], \qquad (۹)$$

که $\theta \in R_{+}$ و سود در نقطهٔ $\theta = \delta$ بیشینه می‌شود. به‌عبارت دیگر $U(\delta,\delta) = ۱$. متناوباً می‌توانیم تابع سود بالا را به‌عنوان تابع زیان به‌صورت زیر در نظر بگیریم:

$$L(\delta, \theta) = ۱ - r\, exp(۱ - r), \qquad (۱۰)$$

که $r = \frac{\theta}{\delta}$ و $r = ۱$؛ یعنی $\delta = \theta$؛ به این مفهوم که هیچ زیانی نداریم یا به‌عبارت دیگر $L(\delta,\delta) = ۰$.

تابع زیان (۱۰) حالت خاصی از تابع زیان گامای بازتابی[۴] با شرط $\gamma = ۱$ است. تابع زیان گامای بازتابی توسط [۱۸] معرفی شد و به‌صورت زیر است:

$$L(\theta, \delta) = k\left[۱ - \left(\frac{\delta}{\theta}\right)^{\gamma} e^{-\gamma(\frac{\delta}{\theta} - ۱)}\right], \quad k > ۰, \gamma > ۰$$

که در آن k بیشینهٔ زیان و γ پارامتر شکل می‌باشد.

خواص:

۱) این تابع زیان، کراندار است و بیشینهٔ زیان حد اکثر مقدار یک و کمینهٔ زیان مقدار صفر را می‌گیرد (حداقل مقدار زیان، صفر است، زیان منفی نمی‌شود).

۲) زیان کاهش می‌یابد اگر $۰ < r \leqslant ۱$.

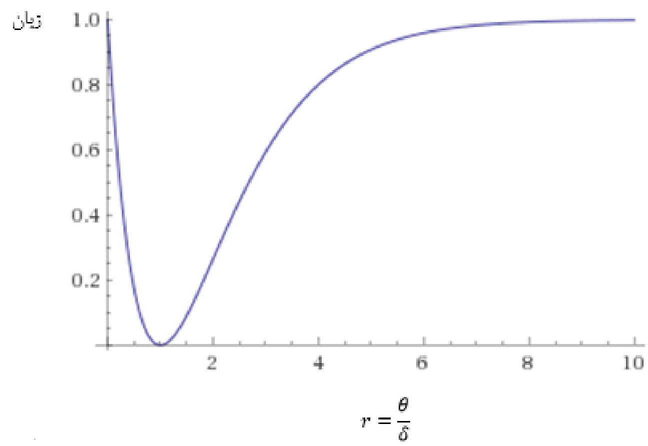
۳) اگر $r = ۱$ باشد، زیان برابر با صفر است و خطای برآورد $۱ - r$ می‌باشد.

۴) زیان به‌ازای مقادیر $r > ۱$ افزایش می‌یابد.

این تابع زیان نامتقارن است، زیرا $L(\delta,\theta)$ به‌ازای $۰ < r < ۱$ به‌سرعت کاهش می‌یابد و برای $r = ۱$ برابر با صفر می‌باشد. در نهایت به‌ازای $r > ۱$ زیان به‌طور آهسته افزایش پیدا می‌کند. از این رو صورت نمایی سود به‌وسیلهٔ $r = \frac{\theta}{\delta}$ مندرج (به‌ازای مقادیر مختلف r زیان‌های متفاوتی به دست می‌آید، $r = ۱$ زیان صفر، $r > ۱$ زیان افزایش و $۰ < r < ۱$ زیان کاهش می‌یابد) می‌شود. به همین دلیل تابع سود پیشنهادی را تابع سود نمایی مندرج نامیده‌ایم.

---

[۴] Rlected gamma loss function



شکل ۱. تابع زیان نمایی مندرج به‌ازای $r = \frac{\theta}{\delta}$.

در قضیهٔ زیر، برآورد بیز را برای تابع سود معرفی‌شده به دست می‌آوریم.

قضیهٔ ۱.۲. فرض کنید $X_1, X_2, ..., X_n$ یک نمونهٔ n تایی از هر توزیعی با تابع چگالی $p(X|\theta)$ باشد که $\theta \in R_+$. همچنین فرض کنید $p(\theta)$ هر تابع چگالی پیشینی برای توزیع θ است به‌طوری‌که توزیع پسینی با تابع چگالی $p(\theta|\mathbf{X})$، توزیع گاما با پارامترهای α و β باشد. پس برآورد بیز بر اساس تابع سود (۹) میانگین پسینی یعنی $\frac{\alpha}{\beta}$ است.

اثبات. فرض کنید $X_1, X_2, ..., X_n$ یک نمونهٔ تصادفی به اندازهٔ n از تابع چگالی به‌صورت $p(X|\theta)$ باشد. اگر $p(\theta)$ تابع چگالی پیشینی برای θ باشد، توزیع پسینی، گاما با پارامترهای α و β است. حال از تابع سود (۹) نسبت به $p(\theta|\mathbf{X})$ امید ریاضی می‌گیریم:

$$E[U(\delta,\theta)] = \int \frac{\theta}{\delta}\, exp\left(1-\frac{\theta}{\delta}\right) p(\theta|\mathbf{X}) d\theta \qquad (11)$$

سپس از رابطهٔ (۱۱) نسبت به δ مشتق می‌گیریم:

$$\begin{aligned}\frac{\partial E[U(\delta,\theta)]}{\partial\delta} =& \frac{\beta^{\alpha} exp(1)}{\Gamma(\alpha)} \int \theta^{\alpha+1-1} exp\{-(\beta\theta)\} \\ &\times \left[\frac{1}{\delta}\left(\frac{\theta}{\delta^2}\right) exp\left\{-\frac{\theta}{\delta}\right\} - \frac{1}{\delta^2} exp\left\{-\frac{\theta}{\delta}\right\}\right] d\theta \\ =& \frac{\alpha\beta^{\alpha} exp(1)}{\delta^2(\beta+\frac{1}{\delta})^{\alpha+1}} \left[\frac{\alpha+1}{\delta(\beta+\frac{1}{\delta})} - 1\right].\end{aligned}$$

برای به دست آوردن برآورد بیز، عبارت $\frac{\partial E[U(\delta,\theta)]}{\partial\delta}$ را برابر با صفر قرار می‌دهیم:

$$\frac{\alpha\beta^{\alpha} exp(1)}{\delta^2(\beta+\frac{1}{\delta})^{\alpha+1}} \left[\frac{\alpha+1}{\delta(\beta+\frac{1}{\delta})} - 1\right]$$

و در نهایت داریم:

$$\delta = \frac{\alpha}{\beta}$$

که به‌وضوح میانگین پسینی است. □

قضیهٔ ۲.۲. فرض کنید $X_1, X_2, ..., X_n$ یک نمونهٔ تصادفی به اندازهٔ n از هر توزیعی با تابع چگالی $p(X|\theta)$ باشد که $\theta \in R_+$. همچنین فرض کنید $p(\theta)$ هر تابع چگالی پیشینی از توزیع θ باشد به‌طوری که توزیع پسینی با تابع چگالی $p(\theta|\mathbf{X})$، توزیع گاما با پارامترهای α و β باشد. پس بیشینهٔ سود مورد انتظار بر اساس تابع سود (۹)، $e^1 \times \left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{-(\alpha+1)}$ است.

اثبات. فرض کنید $X_1, X_2, ..., X_n$ یک نمونهٔ تصادفی به اندازهٔ n از تابع چگالی به‌صورت $p(X|\theta)$ است. اگر $p(\theta)$ تابع چگالی پیشینی برای θ باشد، به‌طوری‌که توزیع پسینی با چگالی $p(\theta|\mathbf{X})$، توزیع گاما با پارامترهای α و β باشد، از قضیهٔ ۱.۲ برآورد بیز بر اساس تابع سود (۹) برابر است با $\delta = \frac{\alpha}{\beta}$، که میانگین پسینی است. بنا بر این سود مورد انتظار به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$E[U(\delta,\theta)] = \int \frac{\theta}{\delta}\, exp\left(1-\frac{\theta}{\delta}\right) p(\theta|\mathbf{X}) d\theta,$$

که در نقطهٔ $\delta = \frac{\alpha}{\beta}$ بیشینه می‌شود. پس داریم:

$$E[U(\delta,\theta)] = e \times \left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{-(\alpha+1)}.$$

این عبارت به‌وضوح مستقل از پارامتر پیشینی β است. در نتیجه معادل صورت ریسک پسینی بر اساس تابع زیان (۱۰) به‌شکل زیر می‌باشد:

$$PR = 1 - e \times \left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{-(\alpha+1)}. \qquad (12)$$

□

۳ تعیین اندازهٔ نمونه

در این بخش حجم نمونهٔ مطلوب را با استفاده از قضایای بیان‌شده برای توزیع‌های نرمال با فرض معلوم بودن میانگین، نمایی، پارتو و پوآسون به دست می‌آوریم.

۱.۳ تعیین اندازهٔ نمونه در برآورد دقت توزیع نرمال وقتی میانگین معلوم است

فرض کنید $X_1, X_2, ..., X_n$ یک نمونهٔ تصادفی به اندازهٔ n از توزیع نرمال با میانگین $\mu_.$ و دقت $(\xi = \frac{1}{\sigma^2})$ باشد. با فرض این‌که توزیع پیشینی، توزیع مزدوج گاما با پارامترهای α و β است، توزیع پسینی نیز گاما می‌باشد با پارامترهای $\alpha + \frac{n}{2}$ و $\beta + \frac{t}{2}$ که $T = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_.)^2$. در نتیجه طبق قضیهٔ ۱.۲، برآورد بیز بر اساس تابع زیان (۱۰)، به‌صورت $\delta = \frac{\alpha + \frac{n}{2}}{\beta + \frac{t}{2}}$ است. در ادامه و با استفاده از قضیهٔ ۲.۲، امید ریاضی تابع سود به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$E[U(\xi, \theta)] = e \times \left(1 + \frac{1}{\alpha + \frac{n}{2}}\right)^{-(\alpha + \frac{n}{2} + 1)}$$

بنا بر این بر اساس رابطهٔ (۱۲)، تابع ریسک پسینی برابر است با:

$$PR = 1 - \ exp\left\{1 + z\ log\left(1 - \frac{1}{z}\right)\right\}$$

که $z = \alpha + \frac{n}{2} + 1$. با بسط دادن عبارت لگاریتم و صرف نظر از توان سوم و بالاتر z (زیرا با افزایش توان، $\frac{1}{z}$ کاهش می‌یابد و به‌خاطر ناچیز بودن قابل چشم‌پوشی است) داریم: $PR \approx 1 - \ exp\left(-\frac{1}{z}\right)$. با جایگذاری مقدار z در PR داریم:

$$PR \approx 1 - \ exp\left(-\frac{1}{\alpha + \frac{n}{2} + 1}\right)$$

حال با اضافه کردن ریسک پسینی به تابع هزینهٔ (۱)، هزینهٔ کل به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$TC(n) \approx c_. + cn + 1 - \ exp\left(-\frac{1}{\alpha + \frac{n}{2} + 1}\right) \qquad (13)$$

برای به دست آوردن حجم نمونهٔ مطلوب از رابطهٔ (۱۳) نسبت به n مشتق گرفته، برابر با صفر قرار می‌دهیم، که در نتیجه داریم:

$$4c\left(\alpha + \frac{n}{2} + 1\right)^2 - \ exp\left\{-\frac{1}{2(\alpha + \frac{n}{2} + 1)^2}\right\} = 0.$$

حل این معادله به‌صورت تحلیلی امکان‌پذیر نیست؛ به همین دلیل از روش عددی استفاده می‌کنیم. با استفاده از نرم‌افزار Maple13 و حل معادلهٔ بالا بر حسب n، دو ریشه به دست می‌آید که فقط یکی از ریشه‌ها مثبت است و باید همان ریشهٔ مثبت را به‌عنوان حجم نمونهٔ مطلوب برای مقادیر c و α در نظر گرفت. در جدول ۱ حجم نمونهٔ مطلوب را برای مقادیر مختلف c با فرض ثابت بودن α و در جدول ۲ حجم نمونهٔ مطلوب را با فرض ثابت بودن c برای مقادیر مختلف α به دست آورده‌ایم.

۲.۳ تعیین اندازهٔ نمونه در برآورد پارامتر توزیع نمایی

فرض کنید $X_1, X_2, ..., X_n$ یک نمونهٔ تصادفی به اندازهٔ n از توزیع نمایی با پارامتر λ باشد. همچنین فرض کنید توزیع مزدوج پیشینی، گاما با پارامترهای α و β باشد. پس توزیع پسینی نیز گاما است با پارامترهای $\alpha + n$ و $\beta + s$ که $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$. بنا بر این طبق قضیهٔ ۱.۲، برآورد بیز بر اساس تابع زیان (۱۰) به‌صورت $\delta = \frac{\alpha + n}{\beta + s}$ است و بر اساس رابطهٔ (۱۲) ریسک پسینی به‌صورت زیر می‌باشد:

$$PR = 1 - \ exp\left\{1 + z\ log\left(1 - \frac{1}{z}\right)\right\},$$

که $z = \alpha + n + 1$. حال با بسط دادن عبارت لگاریتم و صرف نظر کردن از توان سوم و بالاتر z، داریم $PR \approx 1 - \ exp\left(-\frac{1}{z}\right)$. بنا بر این با جایگذاری مقدار z، ریسک پسینی به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$PR \approx 1 - \ exp\left(-\frac{1}{\alpha + n + 1}\right) \qquad (14)$$

حال ریسک پسینی را به تابع هزینهٔ (۱) اضافه می‌کنیم تا هزینهٔ کل به‌صورت زیر به دست آید:

$$TC(n) \approx c_. + cn + 1 - \ exp\left(-\frac{1}{\alpha + n + 1}\right) \qquad (15)$$

جدول ۱. حجم نمونهٔ مطلوب در برآورد دقت توزیع نرمال با میانگین معلوم به‌ازای مقادیر مختلف c

	n^*		
c	$\alpha=۱$	$\alpha=۲$	$\alpha=۳$
۰/۰۰۰۵	۴۰	۳۶	۳۳
۰/۰۰۱۰	۳۶	۳۲	۲۹
۰/۰۰۱۵	۳۳	۲۹	۲۵
۰/۰۰۲۰	۲۸	۲۴	۲۱
۰/۰۰۲۵	۲۴	۲۰	۱۷
۰/۰۰۳۰	۱۹	۱۷	۱۴
۰/۰۰۳۵	۱۶	۱۴	۱۰
۰/۰۰۴۰	۱۴	۱۱	۶
۰/۰۰۴۵	۱۱	۸	۳
۰/۰۰۵۰	۷	۶	۱

جدول ۲. حجم نمونهٔ مطلوب در برآورد دقت توزیع نرمال با میانگین معلوم به‌ازای مقادیر مختلف α

	n^*		
α	$c=۰/۰۰۱$	$c=۰/۰۰۱۵$	$c=۰/۰۰۲$
۱	۳۶	۳۳	۲۸
۲	۳۲	۲۹	۲۴
۳	۲۹	۲۵	۲۱
۴	۲۵	۲۱	۱۸
۵	۲۲	۱۹	۱۴
۶	۱۹	۱۵	۱۱
۷	۱۶	۱۱	۷
۸	۱۳	۹	۵
۹	۱۱	۶	۲
۱۰	۸	۴	۱

و در نهایت برای به دست آوردن حجم نمونهٔ مطلوب از رابطهٔ (۱۵) نسبت به n مشتق گرفته، برابر با صفر قرار می‌دهیم، که داریم:

$$۲c(\alpha+n+۱)^۲-exp\left\{-\frac{۱}{۲(\alpha+n+۱)^۲}\right\}=۰ \quad (۱۶)$$

حال با استفاده از نرم‌افزار Maple13 رابطهٔ (۱۶) را بر حسب n حل می‌کنیم. در ادامه دو ریشه به دست می‌آید که فقط یکی مثبت است و آن را به‌عنوان حجم نمونهٔ مطلوب برای مقادیر مختلف c و α در نظر می‌گیریم. در جدول ۳ حجم نمونهٔ مطلوب را در برآورد پارامتر توزیع نمایی برای مقادیر مختلف c با فرض ثابت بودن α و در جدول ۴ حجم نمونهٔ مطلوب را برای مقادیر مختلف پارامتر پیشینی α با شرط ثابت بودن c به دست آورده‌ایم.

۳.۳ تعیین اندازهٔ نمونه در برآورد پارامتر توزیع پارتو

فرض کنید $X_۱, X_۲, ..., X_n$ یک نمونهٔ تصادفی به اندازهٔ n از توزیع نمایی با پارامتر θ باشد، که دارای تابع چگالی به‌صورت زیر است:

$$p(X|\theta)=\theta\alpha^\theta x^{-(\theta+۱)}; \quad x>\alpha, \theta>۰$$

و می‌توان آن را به شکل زیر نوشت:

$$p(X|\theta) = \theta\ exp\left\{-\theta\ log\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right\}\frac{۱}{x}.$$

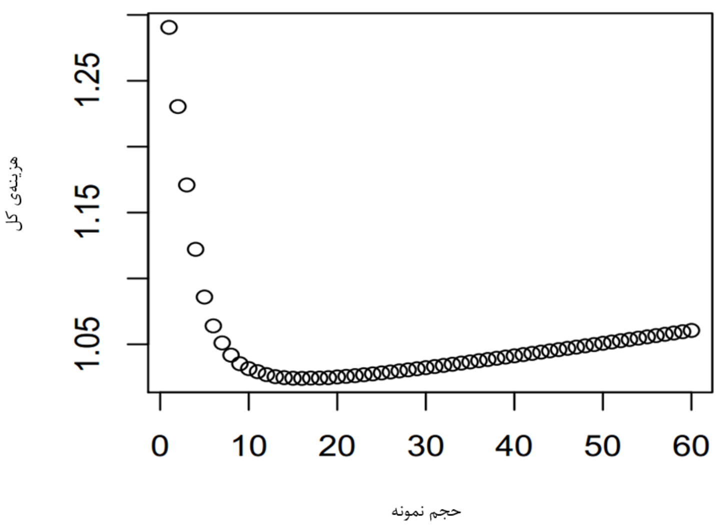
همچنین فرض کنید توزیع مزدوج پیشینی برای θ، توزیع گاما با پارامترهای α و β باشد، که در نتیجه توزیع پسینی نیز گاما است با پارامترهای $\alpha+n$ و $\beta+\sum_{i=۱}^{n} log\ x_i - n\ log\ \alpha$. در نتیجه بر اساس قضیهٔ ۱.۲، برآورد بیز بر اساس تابع زیان (۱۰) به‌صورت $\delta = \frac{\alpha+n}{\beta+\sum_{i=1}^{n} log\ x_i - n\ log\ \alpha}$ است. بنا بر این با استفاده از رابطهٔ (۱۲)، ریسک پسینی به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$PR = ۱ - \ exp(۱) \times \left(۱ + \frac{۱}{\alpha+n}\right)^{-(\alpha+n+۱)},$$

که دقیقاً شبیه به ریسک پسینی در رابطهٔ (۱۴) است. پس ریسک پسینی بر اساس تابع زیان (۱۰) مستقل از پارامتر پیشینی β می‌باشد.

جدول ۳. حجم نمونهٔ مطلوب در برآورد پارامتر توزیع نمایی به‌ازای مقادیر مختلف c

	n^*		
c	$\alpha=۱$	$\alpha=۳$	$\alpha=۵$
۰/۰۰۰۱۰	۷۴	۶۹	۶۵
۰/۰۰۰۱۵	۶۸	۶۱	۵۲
۰/۰۰۰۲۰	۶۲	۵۵	۴۴
۰/۰۰۰۲۵	۵۷	۴۹	۳۹
۰/۰۰۰۳۰	۵۱	۴۴	۳۵
۰/۰۰۰۳۵	۴۶	۴۰	۳۲
۰/۰۰۰۴۰	۴۰	۳۴	۲۹
۰/۰۰۰۴۵	۳۶	۳۱	۲۶
۰/۰۰۰۵۰	۳۲	۲۸	۲۲
۰/۰۰۰۵۵	۲۹	۲۵	۱۹
۰/۰۰۰۶۰	۲۷	۲۳	۱۵
۰/۰۰۰۶۵	۲۴	۱۹	۱۱
۰/۰۰۰۷۰	۲۲	۱۶	۸



شکل ۲. تعیین اندازهٔ نمونه در برآورد پارامتر توزیع پوآسون به‌ازای $\alpha=۱$، $\beta=۴$، $c_.=۱$ و $c=۰/۰۰۱$.

جدول ۴. حجم نمونهٔ مطلوب در برآورد پارامتر توزیع نمایی به‌ازای مقادیر مختلف α

	n^*		
α	$c = ۰/۰۰۰۱$	$c = ۰/۰۰۰۱۵$	$c = ۰/۰۰۰۲$
۵	۶۵	۴۴	۲۲
۱۰	۵۹	۳۹	۲۱
۱۵	۵۴	۳۶	۱۸
۲۰	۵۰	۳۱	۱۶
۲۵	۴۶	۲۷	۱۳
۳۰	۴۳	۲۴	۱۱
۳۵	۳۹	۲۲	۷
۴۰	۳۴	۱۹	۵
۴۵	۳۱	۱۷	۲
۵۰	۲۸	۱۴	۱

جدول ۵. حجم نمونهٔ مطلوب در برآورد پارامتر توزیع پوآسون برای مقادیر مختلف پارامترهای پیشینی α و β به‌ازای $c_{\cdot} = ۱$ و $c = ۰/۰۰۱$

α	β	n^*	β	α	n^*
۱	۱	۱۰	۱	۱	۱۰
	۲	۱۲		۲	۶
	۳	۱۴		۳	۴
	۴	۱۵		۴	۲
۲	۱	۶	۲	۱	۱۲
	۲	۸		۲	۸
	۳	۱۰		۳	۶
	۴	۱۲		۴	۴
۳	۱	۴	۳	۱	۱۴
	۲	۶		۲	۱۰
	۳	۸		۳	۸
	۴	۱۰		۴	۶

بنا بر این در این حالت دقیقاً تابع هزینهٔ (۱۵) را داریم که در نتیجه برای به دست آوردن حجم نمونهٔ مطلوب باید رابطهٔ (۱۶) را حل کنیم، که همان نتایج عددی حاصل از توزیع نمایی به دست می‌آید.

۴.۳ تعیین اندازهٔ نمونه در برآورد پارامتر توزیع پوآسون

فرض کنید $X_۱, X_۲, ..., X_n$ یک نمونهٔ تصادفی به اندازهٔ n از توزیع نمایی با پارامتر θ باشد. همچنین فرض کنید توزیع پیشینی برای θ، گاما با پارامترهای α و β باشد. پس توزیع پسینی نیز گاما است با پارامترهای $\beta + t$ و $\alpha + n$، که $T = \sum_{i=۱}^{n} X_i$. بر اساس قضیهٔ ۱.۲، برآوردگر بیز بر اساس تابع زیان (۱۰)

به‌صورت $\delta = \frac{\beta+t}{\alpha+n}$ است. بنا بر این با استفاده از قضیهٔ ۲.۲، تابع ریسک پسینی به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$PR = ۱ - e \times \left(۱ + \frac{۱}{t+\beta}\right)^{-(t+\beta+۱)}$$

حال با اضافه کردن ریسک پسینی به تابع هزینهٔ (۱)، هزینهٔ کل به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$TC(n) = c_۰ + cn + ۱ - e \times \left(۱ + \frac{۱}{t+\beta}\right)^{-(t+\beta+۱)},$$

که به T بستگی دارد. در این‌جا برای به دست آوردن حجم نمونهٔ مطلوب باید $E(TC(n))$ یا به‌عبارت دیگر APR را به دست آورد که به‌دلیل شکل پیچیدهٔ ریسک پسینی، حل آن به‌روش آنالیزی امکان‌پذیر نیست؛ بنا بر این از شبیه‌سازی استفاده می‌کنیم. در جدول ۵ حجم نمونهٔ مطلوب در برآورد پارامتر توزیع پوآسون برای مقادیر مختلف پارامترهای پیشینی α و β آمده است. در این جدول مشاهده می‌شود که اگر پارامتر پیشینی α افزایش یابد با شرط ثابت بودن β، حجم نمونهٔ مطلوب کاهش می‌یابد و از طرف دیگر با شرط ثابت بودن α و افزایش β، حجم نمونهٔ مطلوب نیز افزایش می‌یابد. در شکل ۲ اندازهٔ نمونه را در برابر هزینهٔ نمونه‌گیری برای هر واحد، c با پارامترهای پیشینی $\alpha = ۱$ و $\beta = ۴$ رسم کرده‌ایم، که حجم نمونهٔ مطلوب برابر با ۱۵ است.

نتیجه‌گیری

در این مقاله حجم نمونهٔ مطلوب را برای توزیع‌های مختلف بر اساس تابع سود محاسبه کردیم. در این‌جا یک تابع سود نامتقارن جدید پیشنهاد کردیم. مزیت استفاده از این تابع سود، این است که کراندار است و برای توزیع پسینی گاما، میانگین پسینی همان برآورد بیز می‌باشد. همچنین امید ریاضی این تابع سود با توزیع مزدوج پیشینی برای این صورت نامتقارن از سود را به دست آوردیم و در ادامه اندازهٔ نمونه مطلوب را با استفاده از این تابع سود برای توزیع‌های نرمال با میانگین معلوم، نمایی، پارتو و پوآسون محاسبه کردیم. حجم نمونهٔ مطلوب را برای توزیع‌های نرمال، نمایی و پارتو در جدول‌هایی ارائه دادیم که برای این توزیع‌ها با افزایش پارامترهای پیشینی، حجم نمونهٔ مطلوب کاهش می‌یابد. اما برای توزیع پوآسون به به‌دلیل پیچیدگی و وابسته بودن ریسک پسینی به متغیر تصادفی از شبیه‌سازی استفاده کردیم. در این مورد اگر پارامتر پیشینی α افزایش یابد با شرط ثابت بودن β، حجم نمونهٔ مطلوب کاهش می‌یابد و از طرف دیگر با شرط ثابت بودن α و افزایش β، حجم نمونهٔ مطلوب نیز افزایش می‌یابد.

مراجع

[1] Adcock, C. J. (1988). A Bayesian approach to calculating sample size. *The Statistician*, **37**, 433-439.

[2] Berger, J. (1985). *Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis*, **2nd edn**. New York: Springer.

[3] Berger, J. O. (1980). *Statistical Decision Theory - Foundation Concepts and Methods*, Springer - Verlag.

[4] Berger, J. O., Boukai, B. and Wang, Y. (1997). Unified frequentist and Bayesian testing of a precise hypothesis. *Statistical Science*, **12**, 133-160.

[5] Goldstein, M. (1981). A Bayesian Criterion for Sample Size. *Annals of Statistics*, **9**, 670-672.

[6] Grundy, P. M., Healy, M. J. R. and Rees, D. H. (1956). Economic choice of the amount of experimentation. *Journal of the Royal Statistical Society*, **A 18**, 32-48.

[7] Hamilton, H. W. (1968). Confience Properties of Bayesian Interval Estimates. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B: Methodological*, **30**, 535-544.

[8] Lindley, D. V. (1972). *Bayesian Statistics*, a Review. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics.

[9] Lindley, D. V. (1997a). The choice of sample size, *Statistician*, **2**, 129-138.

[10] Maple 13 (1996-2009) Copyright ©Maplesoft, a division of Waterloo Maple Inc.

[11] O'Hagan, A. and Stevens, J. W. (2001). Bayesian assessment of Sample size for clinical trails of cost-effctiveness. *Medical Decision Making*, **21**, 219-230.

[12] Pezeshk, H. (2003). Bayesian techniques for Sample size determination in clinical trials: A short review. *Statistical Method in Medical Research*, **12(6)**, 489-504.

[13] Pezeshk, H. and Gittins, J. C. (1999). Sample size Determination in Clinical Trials. *Student*, **3**, 19-26.

[14] Pham-Gia, T. and Turkkan, N. (1992). Sample Size Determination in Bayesian Analysis (Disc: P399-404). *The Statistician: Journal of the Institute of Statisticians*, **41**, 389-397.

[15] Raiffa, H. and Schalaifer, R. (1961). *Applied statistical Decision Theory*. Boston, Havard University Graduate School of Business Adminstration.

[16] Sahu, S. K. and Smith, T. M. F. (2006). A Bayesian method of sample size determination with practical applications. *Journal of the Royal Statistical Society*, **A 169**, 235–253.

[17] Saiful Islam, A. F. M. and Pettit, L. I. (2012). Bayesian sample size determination using linex loss and linear cost, *Communications in Statistics - Theory and Methods*, **41**, 223-240.

[18] Spiring, F.A. and Yeung, A.S. (1998). A general class ofloss functions with industrial applications, *Journal of Quality Technology*, **30**, 152-1 62.

[19] Stallard, N. (1998). Sample size determination for phase II clinical trials based on Bayesian decision theory. *Biometrics*, **54**, 279-294.