

روش بیزی برای بهینه‌سازی طول گارانتی محصولات

مهرناز محمدپور^۱، سمانه رضوی^۲

تاریخ دریافت: ۱۳۹۵/۹/۱

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۶/۴/۲۷

چکیده:

تولیدکنندگان امروزه به‌طور فزاینده‌ای با یک رقابت شدید روبرو هستند و برای این که سودآور باقی بمانند، نیاز به طراحی، توسعه و تولید محصولات قابل اعتماد دارند. یکی از روش‌هایی که تولیدکنندگان نظر مصرف‌کنندگان را به محصولات خود جلب می‌کنند، به کار بردن گارانتی بر روی محصولات خود است. از طرفی مصرف‌کنندگان نیز مایل به خرید یک محصول با طول گارانتی بالا هستند که اتخاذ چنین سیاستی هزینه زیادی را برای تولیدکنندگان ایجاد می‌کند. بنا بر این، تعیین طول گارانتی مطلوب و مناسب برای تولیدکنندگان بسیار حائز اهمیت است. در این مقاله به کمک روش بیزی و استفاده از یک تابع مطلوبیت مناسب، تعیین طول گارانتی بهینه برای محصولاتی که توزیع طول عمر آنها نمایی است مورد بررسی قرار می‌گیرد. **واژه‌های کلیدی:** هزینه نارضایتی، سود اقتصادی، توزیع پسین پیشین، هزینه گارانتی.

۱ مقدمه

مطلوبیت مناسب، مسئله بهینه‌سازی طول گارانتی محصولات از روش بیزی مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

ساختار مقاله به شرح زیر است. در بخش دوم، مدل توزیع طول عمر محصولات و توزیع پسین پیشین بحث می‌شود. در بخش سوم، سیاست اتخاذ شده برای گارانتی محصولات مورد بحث قرار می‌گیرد. تابع مطلوبیت و تعیین طول گارانتی بهینه برای محصولات در بخش چهارم بحث می‌شوند. در آخر یک مثال عملی برای تشریح نتایج ارائه می‌شود.

۲ مدل توزیع طول عمر

در این بخش برای سادگی توزیع طول عمر محصولات، نمایی در نظر گرفته می‌شود. توزیع نمایی یک مدل پرکاربرد در آزمایشات طول عمر و قابلیت اعتماد است. تابع چگالی احتمال این توزیع به‌صورت

$$f(x|\theta) = \theta \exp\{-\theta x\}, \quad x > 0, \theta > 0 \quad (1)$$

هدف عمده تولیدکنندگان افزایش سودآوری است، لذا آنها تلاش می‌کنند که مصرف‌کنندگان را از کیفیت محصولات خود و قابل اعتماد بودن آنها متقاعد کنند. اتخاذ یک سیاست گارانتی خوب روی محصولات در ایجاد یک نگرش مثبت و تمایل خریداران کمک می‌کند و این سیاست یک ابزار مفید در رقابت‌های جهانی است. از این رو، انتخاب طول گارانتی مناسب که منجر به افزایش سودآوری و جلب رضایت مشتریان شود بسیار حائز اهمیت است. در این مقاله، از رویکرد بیزی مسئله بهینه‌سازی طول گارانتی برای محصولاتی که طول عمر آنها دارای توزیع نمایی باشد، مورد بررسی قرار می‌گیرد. در سالیان اخیر، انتخاب طول گارانتی مناسب برای محصولات مورد توجه محققان زیادی قرار گرفته است و روش‌های مختلف برای محاسبه طول گارانتی بهینه ارائه شده است. برای مطالعه بیشتر در این زمینه می‌توان به [۱]، [۲] و [۳] مراجعه کرد. در این مقاله با معرفی سیاست‌های گارانتی رایج و استفاده از یک تابع

^۱ عضو هیئت علمی گروه آمار، دانشگاه مازندران، ایران

^۲ دانش‌آموخته کارشناسی ارشد آمار، دانشگاه مازندران، ایران

۳ سیاست گارانتی

گارانتی یا ضمانت نامه در واقع یک قرار داد بین تولیدکننده و خریدار بعد از فروش یک محصول است که نوع و میزان خسارت را بابت خرابی کالا در طول مدت گارانتی به خریدار نشان می‌دهد. دوتنوع سیاست گارانتی رایج که معمولاً استفاده می‌شود عبارت‌اند از سیاست جایگزینی رایگان (FRW)^۳ و سیاست سرشکن (PRW)^۴. در این بخش، این دو سیاست به‌طور مختصر معرفی و سپس یک سیاست که ترکیبی از دو سیاست فوق است معرفی می‌شود. برای مطالعه بیشتر می‌توان به [؟، ؟] مراجعه کرد.

تحت سیاست FRW، اگر یک محصول در دوره گارانتی خراب شود، یک محصول دیگر از همان نوع رایگان جایگزین آن می‌شود یا این که تولیدکننده و خریدار به بازپرداخت کامل قیمت آن محصول توافق می‌کنند. در هر دو مورد، خریدار خسارت کامل را برای خرابی کالا در طول دوره گارانتی دریافت می‌کند. تحت سیاست (PRW)، تولیدکننده به‌ازای خرابی محصول در دوره گارانتی، غرامتی را به خریدار پرداخت می‌کند که میزان غرامت در این حالت یک تابع خطی از زمان باقی مانده دوره گارانتی است.

یک ترکیبی از FRW و PRW، سیاست ترکیبی FRW/PRW نامیده می‌شود. در این سیاست ترکیبی از سیاست FRW در یک دوره زمانی $[0, w_1]$ و سیاست PRW در دوره زمانی $[w_1, w_2]$ استفاده می‌شود به‌طوری که $w_1 < w_2$ و مقادیر مثبت است. سیاست ترکیبی فوق به این معنی است که اگر یک محصول با طول عمر t در فاصله زمانی $[0, w_1]$ خراب شود در این صورت خریدار متعهد به بازپرداخت خسارت کامل است و اگر این محصول در فاصله زمانی $[w_1, w_2]$ خراب شود خریدار درصدی از قیمت محصول را به عنوان غرامت پرداخت می‌کند و در نهایت اگر زمان خرابی محصول بیشتر از w_2 باشد هیچگونه غرامتی پرداخت نخواهد شد. شکل ۱ دیاگرام این سیاست را نشان می‌دهد.

که در آن θ میانگین طول عمر است. فرض کنید X_1, X_2, \dots, X_n یک نمونه تصادفی از توزیع نمایی باشد، تابع درست‌نمایی نمونه عبارت است از

$$L(\theta) = \theta^n \exp \left\{ -\theta \sum_{i=1}^n x_i \right\}$$

با توجه به این که رویکرد این مقاله بیزی است و در روش بیزی پارامتر θ یک متغیر تصادفی با یک توزیع اولیه (یا توزیع پیشین) است، در این جا توزیع پیشین، توزیع گاما با پارامترهای α و β با چگالی

$$\pi(\theta) = \frac{\theta^{\alpha-1} e^{-\frac{\theta}{\beta}}}{\Gamma(\alpha) \beta^\alpha}, \quad \theta > 0, \alpha > 0, \beta > 0.$$

فرض می‌شود. از ترکیب تابع چگالی پیشین و تابع درست‌نمایی نمونه، تابع چگالی پسین θ به صورت

$$\pi(\theta|X) = \frac{(1 + \beta \sum_{i=1}^n X_i)^{n+\alpha} \theta^{n+\alpha+1} e^{-\frac{\theta(1+\beta \sum_{i=1}^n X_i)}{\beta}}}{\Gamma(\alpha+n) \beta^{n+\alpha}} \quad \theta > 0, \alpha > 0, \beta > 0. \quad (2)$$

به دست می‌آید. که در آن $\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$. لذا توزیع پسین θ نیز توزیع گاما با پارامترهای $n+\alpha$ و $\frac{\beta}{1+\beta \sum_{i=1}^n X_i}$ است. توزیع پیش‌بینی کننده برای پیش‌بینی طول عمر در زمان آینده t حایز اهمیت است. تابع چگالی توزیع پسین پیش‌بینی کننده در زمان t را بر اساس روابط (۲) و (۳) می‌توان به صورت

$$f(t|\underline{X}) = \int_0^\infty f(t|\underline{X}) \pi(\theta|X) d\theta = \frac{(n+\alpha)\beta}{1+\beta \sum_{i=1}^n X_i} \times \left[1 + \frac{t\beta}{1+\beta \sum_{i=1}^n X_i} \right]^{-(n+\alpha+1)} \quad t > 0. \quad (3)$$

محاسبه کرد. بنا بر این میانگین و صدک مرتبه p -ام توزیع پیش‌بین را با اندکی محاسبات می‌توان به صورت

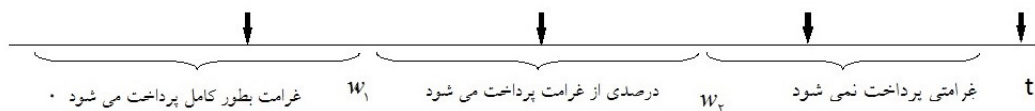
$$m(t|\underline{X}) = \frac{(n+\alpha)(n+\alpha-1)}{\beta} \left(1 + \beta \sum_{i=1}^n X_i \right),$$

$$t_p = \frac{1}{\beta} \left[\left(\frac{1}{1-p} \right)^{\frac{1}{n+\alpha}} - 1 \right] \left[1 + \beta \sum_{i=1}^n X_i \right]$$

محاسبه کرد.

^۳ Free replacement warranty

^۴ Pro-rate warranty



شکل ۱. دیاگرام سیاست ترکیبی

در سیاست ترکیبی، انتخاب نقاط w_1 و w_2 برای تعیین مرز دو دوره گارانتی و سودآوری بیشتر تولیدکنندگان بسیار حائز اهمیت است. در ادامه با معرفی یک تابع مطلوبیت مناسب چگونگی انتخاب نقاط بهینه w_1 و w_2 را مورد بررسی قرار می‌دهیم. این تابع، مقدار مطلوبیت را بر اساس سیاست FRW/PRW، زمانی که محصول در زمان t خراب شود اندازه‌گیری می‌نماید.

$$U(t, w_1, w_2) = B(w_1, w_2) - W(t, w_1, w_2) - D(t, w_1, w_2)$$

باید توجه داشت که سیاست‌های FRW و PRW حالت‌های خاصی از سیاست ترکیبی FRW/PRW هستند به طوری که اگر $w_1 = w_2$ ، سیاست FRW حاصل و اگر $w_1 = 0$ ، سیاست PRW حاصل می‌شود.

الف) تابع سود اقتصادی $B(w_1, w_2)$

با فرض این که S قیمت فروش یک محصول باشد، هزینه جبران خرابی این محصول با طول عمر t تحت سیاست ترکیبی FRW/PRW به صورت

نوشت. با این تابع، هر چه سود اقتصادی بیشتر و هزینه‌های ناشی از گارانتی و نارضایتی محصول کمتر باشد، مقدار مطلوبیت بیشتر می‌شود. در ادامه به بررسی جزئیات این سه تابع می‌پردازیم.

با فرض این که S قیمت فروش یک محصول باشد، هزینه جبران خرابی این محصول با طول عمر t تحت سیاست ترکیبی FRW/PRW به صورت

$$C_W(t) = \begin{cases} S & 0 \leq t < w_1 \\ S \left(\frac{w_2 - t}{w_2 - w_1} \right) & w_1 \leq t < w_2 \\ \cdot & t \geq w_2 \end{cases} \quad (4)$$

است. همان‌طور که مشاهده می‌شود اگر زمان خرابی در فاصله $[0, w_1)$ باشد، خسارت کامل پرداخت می‌شود و اگر زمان خرابی در فاصله $[w_1, w_2)$ باشد، بخشی از قیمت محصول به عنوان غرامت پرداخت می‌شود.

۴ تابع مطلوبیت

برای بهینه‌سازی طول گارانتی محصولات و انتخاب بهینه نقاط w_1, w_2 بایستی از یک تابع مطلوبیت مناسب استفاده شود. تابع

♠ Economic benefit function

♠ Warranty cost function

♠ Dissatisfaction cost function

در نظر گرفت. که در آن

$$B(w_1, w_2) = A_1 M \left(1 - e^{-A_2 \left(\frac{w_1 + w_2}{T} \right)} \right),$$

$$A_1 > 0, A_2 > 0$$

ج) تابع هزینه نارضایتی

هزینه نارضایتی، هزینه غیرمستقیم تولیدکننده است، زمانی که کالا در دوره گارانتی و یا بعد از آن خراب شود. به طوری که خریدار به خاطر نارضایتی از دوره گارانتی یا طول عمر مورد انتظار، از خرید مجدد آن کالا ممانعت می‌کند. تحت سیاست ترکیبی FRW/PRW و با فرض این که طول عمر مورد انتظار یک محصول از نظر خریدار L باشد، تابع هزینه نارضایتی بر حسب این که محصول در چه مرحله‌ای از دوره گارانتی خراب شود شامل سه مؤلفه خواهد بود.

مؤلفه اول:

وقتی که محصول در دوره $[0, w_1]$ خراب شود. از آنجا که سیاست FRW در این دوره استفاده شده است، بنا بر این هزینه نارضایتی در این مؤلفه، نسبتی از قیمت فروش (مانند $1 < q_1 < 0$ که این نسبت توسط آزمایشگر پیشنهاد می‌شوند) در تعداد مورد انتظار محصولاتی که در این دوره خراب می‌شوند، به صورت

$$D_1(t, w_1) = -MF(w_1|X) Sq_1 \int_0^{w_1} f(t|X) dt$$

خواهد بود.

مؤلفه دوم:

وقتی که محصول در دوره $[w_1, w_2]$ خراب شود. اگر محصول در این دوره خراب شود، فرض می‌کنیم که تابع هزینه نارضایتی یک تابع نزولی خطی بر اساس طول عمر با ماکسیمم Sq_1 و مینیمم Sq_2 است ($0 < q_2 < q_1$). بنا بر این نسبت تعیین شده از طرف تولیدکننده است). بنا بر این تابع هزینه نارضایتی این مؤلفه به صورت

$$D_2(t, w_1, w_2) = M(F(w_1|X) - F(w_2|X)) \cdot \left[Sq_1 - (Sq_1 - Sq_2) \left(\frac{t - w_1}{w_2 - w_1} \right) \right] \cdot I_{[w_1, w_2]}(t).$$

خواهد بود.

مؤلفه سوم:

A_1 : سود به‌ازای تولید یک کالا،

M : تعداد کالاهای فروخته شده،

A_2 : پارامتر کنترل سرعت سود است.

توجه کنید که پارامتر A_2 را می‌توان از نسبت دو حالت خاص سیاست ترکیبی FRW/PRW به صورت

$$h(A_2) = \frac{B(0, t_w)}{B(t_w, t_w)} = \frac{1 - e^{-A_2 \left(\frac{t_w}{t_w} \right)}}{1 - e^{-A_2 t_w}}, \quad (5)$$

محاسبه کرد. در واقع تابع $h(\cdot)$ درصدی از سود باقیمانده را نشان می‌دهد، وقتی که تولیدکننده سیاست را از FRW به PRW تغییر می‌دهد. به‌ازای هر t_w (زمان گارانتی استاندارد تحت سیاست FRW در بازار) و با توجه به این که $h(\cdot) \leq 1$ است و $0 \leq h(\cdot) \leq 1$ می‌توان مقداری یکتا برای A_2 با استفاده از رابطه بالا به دست آورد.

ب) تابع هزینه گارانتی

تابع هزینه گارانتی، هزینه جبران خرابی یک کالا را که در دوره گارانتی خراب می‌شود، نشان می‌دهد. در سیاست FRW/PRW، توزیع تعداد کالاهایی که در دوره گارانتی خراب می‌شوند را توزیع سه‌جمله‌ای با احتمال‌های خرابی $F(w_1|X)$ ، $F(w_2|X) - F(w_1|X)$ و $1 - F(w_2|X)$ در نظر می‌گیرند که در آن تابع توزیع تجمعی پسین پیش‌بین است. در نتیجه تابع هزینه گارانتی به صورت

$$\begin{aligned} W(t, w_1, w_2) &= MP(t \leq w_1|X) SI_{[0, w_1]}(t) \\ &+ MP(w_1 \leq t < w_2|X) \\ &\cdot S \left(\frac{w_2 - t}{w_2 - w_1} \right) I_{[w_1, w_2]}(t), \\ &= MF(w_1|X) SI_{[0, w_1]}(t) \\ &+ M(F(w_2|X) - F(w_1|X)) \\ &\cdot S \left(\frac{w_2 - t}{w_2 - w_1} \right) I_{[w_1, w_2]}(t). \end{aligned}$$

خواهد بود. که در آن S قیمت هر کالا، M تعداد کالاهای به فروش رفته و $I(\cdot)$ تابع نشانگر است.

$$\int_{w_1}^{w_2} [Sq_1 - (Sq_1 - Sq_2) \left(\frac{t - w_1}{w_2 - w_1} \right)] f(t|X) dt - M (F(L|X) - F(w_2|X)) \int_{w_1}^L Sq_2 \left(\frac{L - t}{L - w_2} \right) f(t|X) dt. \quad (۶)$$

در نتیجه مقدار بهینه (w_1^*, w_2^*) با ماکسیم کردن تابع $(؟؟)$ به صورت

$$(w_1^*, w_2^*) = \arg \left(\max_{w_1, w_2 \in R^+} E(U(T, w_1, w_2)) \right)$$

به دست می آید، که در آن R^+ مجموعه اعداد مثبت است. توجه کنید که ماکسیم کردن تابع $(؟؟)$ نسبت به (w_1, w_2) به صورت تحلیلی کار دشواری است. بنا بر این از روش های عددی با استفاده از نرم افزار R مقادیر بهینه دوره های گارانتی و مقدار مطلوبیت می توان محاسبه کرد.

مثال ۱.۴. در این مثال روش پیشنهادی برای تعیین دوره گارانتی بهینه را برای یک سری داده های واقعی به کار می بریم. داده های جدول (۱) زمان های خرابی نوعی عایق الکتریکی را که تحت یک فشار با ولتاژ ثابت قرار گرفته اند، نشان می دهد [۴].

ابتدا بررسی می کنیم که توزیع نمایی برای داده ها مناسب است یا خیر؟ برای این منظور از کولموگوروف-اسمیرنوف^۸ (KS) استفاده می کنیم. بر اساس برآورد درست نمایی ماکسیم $\hat{\theta} = ۰/۰۷$ مقدار آماره آزمون کولموگوروف-اسمیرنوف و p -مقدار متناظر به ترتیب عبارت اند از $KS = ۰/۲۴۶۴$ و $p - value = ۰/۱۶۷۸$. لذا توزیع نمایی به زمان های خرابی به خوبی برازش می شود.

فرض کنید پارامترهای توزیع پیشین را $\alpha = ۰/۵$ و $\beta = ۱۰$ در نظر بگیریم. قیمت فروش هر کالا را که هزینه تولید آن ۵۰ دلار است نیز $S = ۱۵۰$ دلار در نظر می گیریم، بنا بر این سود آن $A_1 = ۱۰۰$ دلار است. طول دوره گارانتی استاندارد تحت سیاست FRW را هم صدک دهم توزیع پسین پیشین در نظر می گیریم. لذا $t_w = ۱/۴۷$.

وقتی که محصول بعد از دوره گارانتی در دوره $[w_2, L)$ خراب می شود، خریدار هم چنان از آن ناراضی است، مگر این که طول عمرش مقدار مشخص شده L باشد که این مقدار می تواند میانگین، میانه و درصدی از توزیع پسین پیشین باشد هم چنین می توان بر اساس تجربیات یا برآورد بازار، آن را انتخاب کرد. بنا بر این فرض می کنیم که تابع هزینه نارضایتی در این مؤلفه یک تابع نزولی خطی بر اساس طول عمر باشد. اگر طول عمر محصول برابر با L باشد، این هزینه صفر می شود و لذا این تابع به صورت

$$D_2(t, w_1) = M (F(L|X) - F(w_2|X))$$

$$Sq_2 \left(\frac{L - t}{L - w_2} \right) I_{[w_2, L)}(t).$$

خواهد بود. در نتیجه هزینه نارضایتی برابر است با

$$D(t, w_1, w_2) = D_1(t, w_1) + D_2(t, w_1, w_2) + D_3(t, w_2)$$

د) تابع مطلوبیت مورد انتظار و گارانتی بهینه

اکنون مقدار بهینه w_1^* و w_2^* با ماکسیم کردن مقدار مورد انتظار تابع مطلوبیت تحت توزیع پسین پیشین نسبت به w_1, w_2 به دست می آیند. مقدار مورد انتظار تابع مطلوبیت عبارت است از:

$$\begin{aligned} E(U(T, w_1, w_2)) &= E(B(w_1 - w_2) - W(T, w_1, w_2) - D(T, w_1, w_2)) \\ &= A_1 M \left(1 - e^{-A_2 \left(\frac{w_1 + w_2}{\beta} \right)} \right) \\ &\quad - MS \left(F(w_1|X) \int_{w_1}^{w_2} f(t|X) dt - (F(w_2|X) - F(w_1|X)) \int_{w_1}^{w_2} \left(\frac{w_2 - t}{w_2 - w_1} \right) f(t|X) dt \right) \\ &\quad - MF(w_1|X) Sq_1 \int_{w_1}^{w_2} f(t|X) dt - M (F(w_1|X) - F(w_2|X)) \end{aligned}$$

^۸ Kolmogrov-Smirnov

جدول ۱. زمان‌های خرابی

| | | | | | | | | | |
|------|------|------|-------|-------|-------|-------|------|-------|-----|
| ۰/۱۹ | ۰/۷۸ | ۰/۹۶ | ۱/۳۱ | ۲/۷۸ | ۳/۱۶ | ۴/۱۵ | ۴/۶۷ | ۴/۸۵ | ۶/۵ |
| ۷/۳۵ | ۸/۰۱ | ۸/۲۷ | ۱۲/۰۶ | ۳۱/۷۵ | ۳۲/۵۷ | ۳۳/۹۱ | ۳۶/۷ | ۷۲/۸۹ | |

۹۳/۲۸ دلار خواهد بود.

اگر تولیدکننده علاقه‌مند به سیاست ترکیبی FRW/PRW باشد و درصد سود باقیمانده را ۰/۷۵ در نظر بگیرد، در این صورت خواهیم داشت $h(A_2) = ۰/۷۵$ و لذا از رابطه (۴۴) نتیجه می‌شود که $A_2 = ۱/۴۷$.

حال اگر طول عمر محصول را در این مثال $L = ۹/۸۸$ (میانه توزیع پسین پیش‌بین) در نظر بگیریم، با قرار دادن مقادیر فوق در رابطه تابع مطلوبیت مورد انتظار و انجام بهینه‌سازی بنا بر سیاست ترکیبی FRW/PRW، مقادیر بهینه w_1 و w_2 به صورت

$$w_1^* = ۱/۸, w_2^* = ۴/۲۳$$

به دست می‌آیند. که با این مقادیر بهینه، ماکسیمم مطلوبیت

۵ نتیجه‌گیری

انتخاب طول گارانتی مناسب برای محصولات که منجر به افزایش سودآوری و جلب رضایت مشتریان شود بسیار حایز اهمیت است. در این مقاله، سیاست‌های رایج برای گارانتی محصولات مورد بحث قرار گرفت. در ادامه با استفاده از یک تابع مطلوبیت مناسب به روش بیزی، مسئله بهینه‌سازی طول گارانتی مورد مطالعه قرار گرفت.

مراجع

- [1] Agrawal, J., Richardson. P. S., and Grimm, P. E., (1996). The relationship between warranty and product reliability, *Journal of Consumer Affairs*, **30**, 421-443.
- [2] Huang, H. Z., Liu, Z. J., and Murthy, D. N. P., (2007). Optimal reliability warranty and price for new products, *IIE Transactions*, **39**, 819-827.
- [3] Menezes, M. A. J., and Currim, I. S., (1992). An approach for determination of warranty length, *International Journal of Research in Marketing*, **9**, 177-195.
- [4] Waller, R. A., Johnson, M. M., Waterman, M. S., and Martz, H. F., (1977). Gamma prior distribution selection for Bayesian analysis of failure rate and reliability, *Nuclear Systems Reliability Engineering and Risk Assessment*, 584-606.
- [5] Wu, S. J., Chen, D. F., and Chen, S. T., (2006). Bayesian inference for Rayleigh distribution under progressive censored sample, *Applied Stochastic Model in Business and Industry*, **22**, 269-279.
- [6] Wu, S. J., and Huang, S. R., (2010). Optimal warranty length for a Rayleigh distributed product with progressive censoring, *IEEE Transactions Reliability*, **59**, 661-666.
- [7] Wu, S. J., Lu, Y. T., and Tsai, T. R., (2008). Reliability sampling plans for Weibull distribution with limited capacity of test facility, *Computers and Industrial Engineering*, **55**, 721-728.