

حرکت براونی، پیوند احتمال و آنالیز ریاضی

کسری علیشاهی^۱

چکیده

هدف این نوشته ارایه چشم‌اندازی از بخش‌هایی از دانش امروزیین احتمال و آنالیز تصادفی است. نقطه شروع و محور مشترک بیشتر مطالبی که به آن‌ها پرداخته‌ایم حرکت براونی است. نخست با پی‌گیری انگیزه‌های تاریخی، چگونگی شکل‌گیری تعریف دقیق و برخی از ویژگی‌های حرکت براونی و نیز ایده‌های اصلی توسعه انتگرال و حسابان تصادفی را بررسی کرده‌ایم. آن‌گاه پس از مرور مفاهیم پایه‌ای چون مارتینگل‌ها و زمان‌های توقف، روایتی جامع‌تر از حسابان تصادفی ارایه کرده‌ایم. سپس با به‌کار بردن این ابزارها به بررسی خواص عمیق‌تری از حرکت براونی و نیز برخی ارتباط‌ها با مسایلی در آنالیز کلاسیک پرداخته‌ایم. در پایان، مسأله‌ای از فیزیک و تعبیری احتمالاتی از پاسخ آن مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرد.

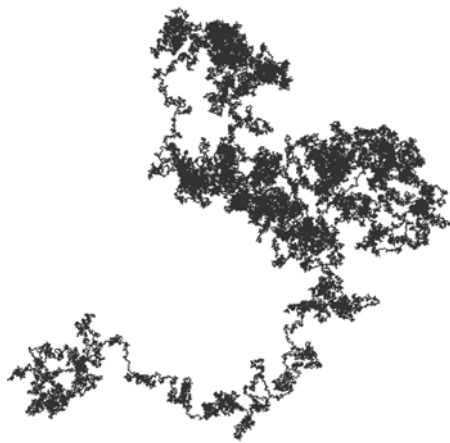
واژه‌های کلیدی: آنالیز تصادفی، حرکت براونی، زمان توقف، مارتینگل.
رده‌بندی موضوعی (MSC2000): 60G40, 60H05, 60J65

۱ حرکت براونی و انتگرال تصادفی

حرکت براونی سنگ بنای نظریه مدرن احتمال، آنالیز تصادفی و معادلات دیفرانسیل تصادفی است. فرآیندی تصادفی که به افتخار رابرت براون زیست‌شناس، که برای اولین بار متوجه حرکات نامنظم و به ظاهر اتفاقی ذرات ریز معلق در آب شد، به این نام خوانده می‌شود. مدت‌ها طول کشید تا دلیل فیزیکی این پدیده کشف شود و زمان بیشتری لازم بود تا تعریف ریاضی رضایت‌بخشی از حرکت براونی به زبان دقیق آنالیز ریاضی ارایه شود.

در تاریخ علم قرن بیستم نام‌های بزرگی با پژوهش‌های مربوط به حرکت براونی گره خورده است؛ نام‌هایی چون اینشتین، وینر، کولموگروف، لوی، ایتو، ...

درک موانع موجود بر سر راه تعریف درست حرکت براونی در ابتدای قرن بیستم چندان دشوار نیست. نکته این است که علم احتمال، با وجود همه نتایج و موفقیت‌هایی که به دست آورده

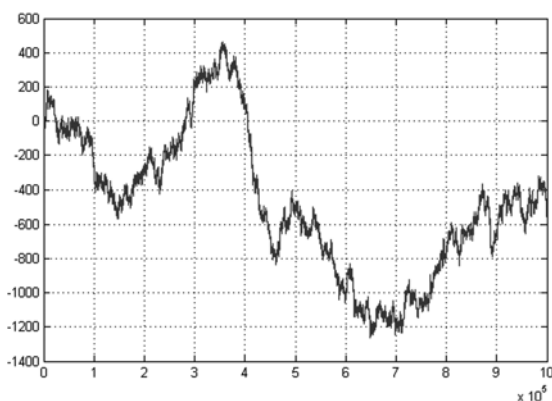


بود، تا پایان قرن نوزدهم هم‌چنان در مرحله نوپایی موسوم به دوره کلاسیک به سر می‌برد. دوره‌ای که وجه مشخصه آن تعبیر احتمال به‌عنوان نسبت تعداد حالت‌های مطلوب به تعداد کل حالت‌ها است. طبیعی است که این تعبیر حیطة مسائل قابل بررسی در دانش احتمال را بسیار محدود و مثلاً همه مثال‌های نامتناهی را از آن خارج می‌کرد. در آغاز قرن بیستم، هم‌زمان با بازنگری اساسی در بنیادهای آنالیز ریاضی و به‌ویژه مفاهیم طول و مساحت توسط ریاضی‌دانان بزرگی چون

منحصر به فرد است به این معنی همه توزیع‌های احتمال وابسته به آن به طور یکتا تعیین می‌شود. او هم‌چنین متوجه این حقیقت شگفت‌انگیز شد که هر مسیر نمونه‌ای از حرکت براونی به احتمال یک در همه جا مشتق ناپذیر است! این ویژگی را می‌توان از حکمی قوی‌تر درباره تغییرات حرکت براونی نتیجه گرفت: اگر تغییرات مرتبه p ام تابعی مثل f بر بازه $[a, b]$ را به شکل زیر تعریف کنیم

$$\limsup_{\substack{a=t_0 < \dots < t_N = b \\ \max(t_j - t_{j-1}) \rightarrow 0}} \sum |f(t_j) - f(t_{j-1})|^p$$

آن‌گاه ثابت می‌شود که هر مسیر از حرکت براونی به احتمال یک در هر بازه زمانی تغییرات مرتبه دومی برابر با طول آن بازه دارد. نتیجه این که تغییرات مرتبه اول آن بی‌نهایت است. این در حالی است که تغییرات مرتبه اول توابع خوش رفتاری که ما به طور معمول با آن‌ها سر و کار داریم، مثلاً همه توابع مشتق‌پذیر، کران دار است. بنابراین حرکت براونی نمی‌تواند مشتق‌پذیر باشد.



یکی دیگر از روش‌های ساختن حرکت براونی، که نخستین بار توسط بشلیه به کار گرفته شد، حدگیری از قدم زدن تصادفی با کوچک کردن طول گام‌ها و هم‌زمان افزایش تعداد آن‌ها در واحد زمان است. اگر این کار با مقیاس‌بندی مناسب انجام شود، آن‌گاه در حد یک فرآیند نابدیهی با مسیر پیوسته به وجود می‌آید که ویژگی‌های احتمالاتی قدم زدن تصادفی یعنی

بورل و لِبگ، این ایده شکل گرفت که از دیدگاه مجرد ریاضی، احتمال هم نوعی از اندازه‌گیری است و می‌تواند در قالب نظریه ریاضی تازه به وجود آمده (نظریه اندازه) صورت‌بندی شود. ادامه این مسیر توسط وینر، کولموگروف و بعدها ایتو، دوب و ... سرآغاز دوره جدیدی در توسعه احتمال به عنوان شاخه‌ای در خور توجه از ریاضیات شد. با صورت‌بندی جدید و به کمک قضایای توسعه اندازه، که وجود اندازه‌هایی با ویژگی‌های مطلوب بر فضاهای بسیار بزرگ (مثلاً فضاهای حاصل ضربی نامتناهی) را تضمین می‌کنند، احتمال دانان قادر شدند به بررسی مثال‌هایی پردازند که در آن‌ها نامتناهی عامل تصادف همزمان موجود و تأثیرگذار هستند. مثال‌هایی مانند نامتناهی بار پرتاب سکه و یا تغییرات یک کمیت تصادفی در زمان (فرآیند تصادفی) که طبیعتاً غنای بسیار بیشتری به دانش احتمال بخشیدند.



حرکت براونی، به اختصار، فرآیندی تصادفی با مسیرهای پیوسته است که نمونه‌های مانا و مستقل با توزیع گاوسی دارد. به بیان دقیق‌تر، فرآیند تصادفی $\{B_t\}_{0 \leq t < \infty}$ را حرکت براونی استاندارد می‌گوییم اگر به‌عنوان تابعی از t پیوسته باشد، $B_0 = 0$ و برای هر $s < t$ متغیر تصادفی گاوسی با میانگین صفر و واریانس $t - s$ و مستقل از $\{B_u\}_{u \leq s}$ باشد. نخستین بار وینر وجود حرکت براونی را ثابت کرد. در واقع او اندازه احتمالی بر فضای توابع پیوسته، $C[0, \infty)$ ، ساخت به نحوی که تابع پیوسته تصادفی که با این اندازه احتمال انتخاب شود ویژگی‌های مورد نظر برای حرکت براونی را برآورده کند. وینر به‌علاوه نشان داد که حرکت براونی با ویژگی‌های فوق

دیفرانسیلی آن‌ها در یک جزء کوچک زمان ترکیبی از یک بخش دینامیک تعینی و یک بخش براونی باشد، به وسیله احتمال دانان بزرگی چون لوی و ایتو دنبال شد. فرآیندهایی که به شکل صوری با معادله دیفرانسیل تصادفی به شکل زیر توصیف شوند

$$dX_t = b(X_t) dt + \sigma(X_t) dB_t \quad (۱)$$

مشکل این جاست که همان‌طور که گفته شد حرکت براونی به شدت ناهموار (مشتق ناپذیر) است و بنابراین معنا بخشیدن به معادله دیفرانسیل فوق چندان ساده نیست! یک راه متداول برای غلبه بر مشکلات ناهمواری از این دست، نوشتن معادله به شکل انتگرالی است

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(X_s) ds + \int_0^t \sigma(X_s) dB_s$$

اما تعبیر این صورت انتگرالی هم با مشکل جدی مواجه است. مشکل ناشی از این است که حرکت براونی تغییرات بی‌کران دارد و بنابراین تضمینی برای همگرایی انتگرال دوم وجود ندارد.



دست آورد بزرگ ایتو، غلبه بر این مانع و یافتن راهی برای معنا دادن به انتگرال‌های تصادفی به شکل $\int Y_s dB_s$ برای خانواده‌ای غنی از فرآیندهای تصادفی Y بود. صرف نظر از جزئیات فنی، ایده اصلی این است که اگرچه حرکت براونی تغییرات بی‌کران دارد و بنابراین انتگرال فوق برای همه مسیرهای پیوسته Y وجود ندارد، اما برای واگرایی مجموع‌های

داشتن نمونه‌های مستقل و مانا را به ارث خواهد برد. گاوسی شدن نمونه‌های فرآیند حدی نیز نتیجه‌ای از قضیه حد مرکزی است.

حرکت براونی نمونه شاخصی از فرآیندهای تصادفی است که احتمال دانان آن‌ها را فرآیندهای مارکوف نامیده‌اند. فرآیند مارکوف فرآیندی است که با دانستن مقدار آن در هر لحظه، مقادیر گذشته فرآیند تأثیری بر مقادیر آینده آن ندارند. به بیان دیگر، دانستن مقدار فرآیند تنها در لحظه‌ی حال، همان قدر درباره اتفاقات آینده حاوی اطلاعات است که دانستن کل مسیر فرآیند از گذشته تا حال.

فرآیندهای مارکوف تعمیم طبیعی سیستم‌های دینامیکی به حالت تصادفی هستند. همان‌طور که آینده یک سیستم دینامیکی به‌طور کامل با دانستن وضعیت کنونی آن قابل تعیین است، در یک سیستم تصادفی مارکوف نیز همه دانش احتمالاتی ممکن درباره آینده سیستم از وضعیت حال حاضر آن قابل استخراج است. یکی از دلایل اصلی توسعه آنالیز تصادفی در نیمه اول قرن بیستم تلاش جهت ارایه توصیفی کارآمد از فرآیندهای مارکوف پیوسته بوده است.

همان‌طور که می‌دانیم رده بزرگی از سیستم‌های دینامیکی، یا همان فرآیندهای مارکوف غیرتصادفی، به کمک معادلات دیفرانسیل قابل توصیف هستند. معادله‌ای که در فضای اقلیدسی، \mathbb{R}^d ، به اختصار به صورت زیر قابل بیان است

$$dX_t = b(X_t) dt$$

حرکت براونی در انتهای دیگر طیف فرآیندهای مارکوف جای دارد؛ فرآیندی تصادفی که تغییرات آن بر خلاف سیستم دینامیکی، مطلقاً فاقد الگوی از پیش تعیین شده است. در حقیقت این تغییرات مستقل از گذشته است! ایده تلفیق این دو مثال و به دست آوردن رده‌ای از فرآیندهای مارکوف که تغییرات

۲ امید شرطی، مارتینگل‌ها، زمان‌های توقف

در طول چند دهه پس از ابداع انتگرال تصادفی به‌وسیله ایتو، تلاش‌های زیادی به‌وسیله احتمال دانان برای توسعه ابزارهای آنالیز تصادفی صورت گرفت. حاصل این تلاش‌ها نظریه جامعی است که ایده‌های اولیه ایتورا در جهات مختلف تعمیم داده و به آن عمق و کلیت قابل توجهی بخشیده است. برای آن‌که به اجمال بخشی از این نظریه را مرور کنیم، لازم است برخی مفاهیم پایه‌ای را با دقت بیشتری بررسی کنیم.

همان‌طور که می‌دانیم پس از کولموگروف همه اشیاء تصادفی بر فضای زمینه‌ای به نام فضای احتمال تعریف می‌شوند. فضای احتمال سه‌تایی $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ است که از سه جزء فضای نمونه Ω ، مجموعه پیشامدها، \mathcal{F} ، و اندازه احتمال، \mathbb{P} ، تشکیل شده است. مجموعه پیشامدها یک میدان سیگمایی (σ) -میدان از زیرمجموعه‌های فضای نمونه است که اندازه احتمال بر اعضا آن تعریف شده است. یکی از دلایل این که اندازه احتمال را بر همه زیرمجموعه‌های فضای نمونه تعریف نمی‌کنیم مشکلات فنی است که وجود اندازه را بر چنین خانواده بزرگی ناممکن می‌کند. اما σ -میدان‌ها در احتمال نقش دیگری نیز به عهده دارند؛ آن‌ها به نحوی نشان دهنده میزان اطلاعات هستند. در حقیقت این‌که در مورد چه مجموعه‌ای از پیشامدها قادر به قضاوت باشیم وابسته به میزان اطلاعات ما است. این موضوع در بررسی فرآیندهای تصادفی اهمیت ویژه‌ای می‌یابد.

در حالت کلی به هر نگاشت \mathcal{F} -اندازه‌پذیر از Ω به \mathbb{R} یک متغیر تصادفی می‌گویند، اما در این‌جا برای ساده‌تر شدن بحث خود را به فضای متغیرهای با گشتاور دوم متناهی، $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ، محدود می‌کنیم. این مجموعه با ضرب داخلی

ریمان به شکل $\sum Y_{t_{j-1}}(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})$ ، باید Y_{t_j} ‌ها به نحوی با تغییرات حرکت براونی، $(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})$ ، هماهنگ شوند و اگر فرآیند Y سازگار باشد یعنی Y_t بر حسب حرکت براونی تا قبل از لحظه t تعیین شود، $(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})$ از $Y_{t_{j-1}}$ مستقل می‌شود و می‌توان نشان داد که در این صورت احتمال هماهنگی‌های ناخوشایندی که به واگرایی مجموع‌های ریمان بیانجامد صفر است و بنابراین انتگرال با احتمال یک موجود خواهد بود! به لحاظ فنی، مسیر ایتو برای تعریف انتگرال تصادفی از مشاهده‌ای اساسی به نام ایزومتري ایتو می‌گذرد که در بخش بعد به آن خواهیم پرداخت.

یکی دیگر از نتایج بسیار مهم که ایتو موفق به اثبات آن شد، رابطه‌ای موسوم به فرمول ایتو است که اساس حسابان تصادفی یا حسابان ایتو را تشکیل می‌دهد. از حسابان متداول می‌دانیم که اگر X_t و f تابعی مشتق‌پذیر باشند، در این صورت داریم

$$d f(X_t) = f'(X_t) dX_t$$

فرمول ایتو تعمیمی از این حقیقت برای رده‌ای از فرآیندهای تصادفی شامل جواب‌های معادلات دیفرانسیل تصادفی از نوع (۱) است. بنا به این رابطه در حالت ساده اگر X_t جواب معادله (۱) و تابع f به اندازه کافی هموار (دوبار مشتق‌پذیر با مشتق دوم پیوسته) باشد، $f(X_t)$ با معادله‌ای به شکل زیر قابل بیان است

$$d f(X_t) = f'(X_t) dX_t + \frac{1}{2} f''(X_t) \sigma(X_t)^2 dt \quad (2)$$

جمله اضافی شامل مشتق دوم، نقطه تمایز حسابان تصادفی و غیرتصادفی و ناشی از تغییرات بسیار شدید حرکت براونی و فرآیندهای مشابه آن است.

احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ مجهز به صافی $\{\mathcal{F}_t\}$ تعریف شده مارتینگل می‌گوییم اگر نسبت به صافی داده شده سازگار باشد و به علاوه

$$\mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_s) = X_s \quad , s \leq t \quad (۳)$$

یعنی همیشه بهترین پیش‌بینی برای مقدار فرآیند در هر زمانی از آینده، مقدار فعلی فرآیند است. توجه کنید که رابطه (۳) را می‌توان به شکل $\mathbb{E}(X_t - X_s | \mathcal{F}_s) = 0$ نوشت که معنای آن ناهمبستگی نمو‌های فرآیند نسبت به گذشته است. این ویژگی تعمیمی اساسی از خاصیت نمو‌های مستقل حرکت براونی است و بنابراین حرکت براونی نمونه‌ای از یک مارتینگل است.

بنا به قضیه‌ای از احتمال دان برجسته، دوب، که به نابرابری ماکسیمال معروف است، برای یک مارتینگل با مسیرهای پیوسته مثل M که بر بازه زمانی $[0, T]$ تعریف شده، می‌توانیم تغییرات کل مسیر را با مقدار لحظه پایانی کنترل کنیم

$$\mathbb{E}[(\sup_{t \in [0, T]} M_t)^2] \leq 4 \mathbb{E}(M_T^2)$$

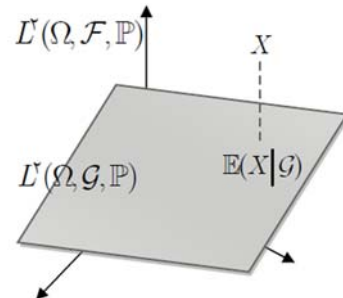
با توجه به این نابرابری، اگر فضای مارتینگل‌های پیوسته بر $[0, T]$ با گشتاور دوم متناهی، $M_t^c([0, T])$ را به نرم $\|M\|_T = \mathbb{E}(M_T^2)$ مجهز کنیم فضای هیلبرتی به دست خواهیم آورد که همگرایی در آن به نحوی همگرایی مسیرها را نیز نتیجه می‌دهد.

مارتینگل‌های پیوسته با گشتاور دوم متناهی ویژگی‌های قابل توجه دیگری هم دارند که از مهم‌ترین آن‌ها وجود تغییرات توأم است. برای دو مارتینگل M و N تغییرات توأم، $[M, N]$ ، به شکل زیر تعریف می‌شود

$$[M, N]_t = \lim \sum [(M_{t_j} - M_{t_{j-1}})(N_{t_j} - N_{t_{j-1}})]$$

که حدگیری روی افزایش‌های $t = t_0 < \dots < t_N = t$ که ظریف و ظریف‌تر می‌شوند انجام می‌گیرد. ثابت می‌شود که

$\mathbb{E}(XY)$ یک فضای هیلبرت است. اگر \mathcal{G} زیر σ -میدانی از \mathcal{F} باشد، $L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ زیرفضایی از $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ خواهد بود. تصویر متعامد متغیر تصادفی X بر این زیرفضا، $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ ، امید شرطی X نسبت به \mathcal{G} نامیده می‌شود. به یک تعبیر $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ بهترین تقریب \mathcal{G} -اندازه‌پذیر از X است (امید شرطی با شرط ضعیف‌تر متناهی بودن گشتاور اول نیز قابل تعریف است اما جزئیات فنی تعریف آن پیچیده‌تر است).



فرآیند تصادفی مدلی است برای تغییرات زمانی یک کمیت تصادفی که با خانواده‌ای مانند $\{X_t\}_{0 \leq t < \infty}$ از متغیرهای تصادفی نشان داده می‌شود که بر فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ تعریف شده‌اند. در بررسی فرآیندهای تصادفی از خانواده‌ای صعودی از زیر σ -میدان‌های \mathcal{F} ، $\{\mathcal{F}_t\}_{0 \leq t < \infty}$ ، به منظور نشان دادن میزان اطلاعات، که با زمان در حال افزایش است، استفاده می‌کنیم که به آن صافی می‌گویند. طبیعی است فرض کنیم که دانستن مقدار فرآیند مورد نظر بخشی از اطلاعات موجود باشد. این ویژگی، یعنی این که برای هر t ، X_t متغیری \mathcal{F}_t -اندازه‌پذیر باشد، را سازگاری فرآیند $\{X_t\}$ نسبت به صافی $\{\mathcal{F}_t\}$ می‌گویند. اگر به صافی مشخصی تصریح نشده باشد صافی طبیعی یا کوچکترین صافی که فرآیند نسبت به آن سازگار باشد یعنی $\mathcal{F}_t = \sigma(\{X_s; 0 \leq s \leq t\})$ را در نظر می‌گیریم.

مارتینگل‌ها رده مهمی از فرآیندهای تصادفی هستند که نقش اساسی در احتمال و به‌ویژه در نظریه انتگرال‌گیری تصادفی ایفا می‌کنند. فرآیند تصادفی $\{X_t\}$ را که بر فضای

جزئیات فنی شرایط قضیه نمونه‌گیری اختیاری کمی پیچیده است ولی مثلاً کران‌داری زمان توقف، τ ، یا مارتینگل، M ، برای برقراری حکم قضیه کافی است.

اکنون می‌توانیم روش ایتو برای تعریف انتگرال تصادفی را به نحو دقیق‌تری بررسی کنیم، برای این منظور بازه زمانی $[0, T]$ و حرکت براونی B_t که بر این بازه شده را در نظر می‌گیریم. هدف تعریف انتگرال‌های به شکل $\int_0^t X_s dB_s$ برای رده مناسبی از فرایندهای تصادفی X است. ایتو فرایندهای مناسب را آن‌هایی انتخاب کرد که نسبت به صافی حرکت براونی سازگار باشند و به‌علاوه داشته باشیم

$$[[X]]_T = \mathbb{E}[\int_0^T X_s^2 ds] < \infty$$

به‌سادگی دیده می‌شود که مجموعه این فرایندها، $\mathcal{L}^2([0, T])$ ، با نرم $[[\cdot]]$ یک فضای هیلبرت می‌سازد.

فرآیند تصادفی $X \in \mathcal{L}^2([0, T])$ را فرآیند ساده می‌نامیم اگر سازگار و قطعه قطعه ثابت باشد. یعنی افزایش مربع انتگرال‌پذیر $\zeta_j \in \mathcal{F}_{t_j}$ باشند که

$$X_t = \sum \zeta_j \mathbb{1}_{[t_j, t_{j+1})}(t)$$

انتگرال تصادفی از فرآیندهای ساده به‌طور طبیعی به‌صورت زیر قابل تعریف است

$$\int_0^t X_s dB_s = \sum_{j=0}^{N-1} \zeta_j (B_{t \wedge t_{j+1}} - B_{t \wedge t_j})$$

بررسی این که انتگرال خود به‌عنوان فرآیندی تصادفی برحسب t یک مارتینگل پیوسته می‌شود دشوار نیست. به‌علاوه با کمی محاسبه می‌توان نشان داد که

$$\mathbb{E}[(\int_0^t X_s dB_s)^2] = \mathbb{E}[(\sum_{j=0}^{N-1} \zeta_j (B_{t \wedge t_{j+1}} - B_{t \wedge t_j}))^2]$$

$[M, N]$ فرآیندی پیوسته با تغییرات کران‌دار است، و اگر N و M مستقل باشند، $[M, N] = 0$. به‌علاوه فرآیند $[M, M]$ که همان تغییرات مربعی M است و با (M) نشان داده می‌شود، پیوسته و صعودی است و تنها زمانی ثابت خواهد بود که M نیز ثابت باشد. بنابراین مارتینگل‌های پیوسته هم مانند حرکت براونی تغییرات مرتبه دوم نابدیهی و در نتیجه تغییرات مرتبه اول بی‌کران و مسیرهای مشتق‌ناپذیر دارند.



در مطالعه فرآیندهای تصادفی مطالعه برخی زمان‌های تصادفی به‌طور طبیعی ضرورت می‌یابد. مثلاً اولین زمان ورود حرکت براونی به ناحیه‌ای مشخص یا آخرین زمان خروج از آن، نمونه‌هایی از زمان‌های تصادفی هستند که در ادامه بیشتر به آن‌ها خواهیم پرداخت. رده مهمی از زمان‌های تصادفی به‌نام زمان‌های توقف با این ویژگی متمایز می‌شوند که تشخیص فرا رسیدن آن‌ها تا قبل از زمانی مشخص با اطلاعات موجود تا آن زمان میسر است. به بیان دقیق‌تر، زمان تصادفی τ را زمان توقف می‌گوییم اگر

$$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t \quad \text{برای هر } t$$

به این ترتیب می‌توان دید که مثلاً اولین زمان ورود زمان توقف است، اما آخرین زمان خروج چنین نیست.

روشن است که اگر M مارتینگل باشد برای هر t خواهیم داشت $\mathbb{E}(M_t) = \mathbb{E}(M_0)$. بنا به قضیه‌ای به‌نام نمونه‌گیری اختیاری، تحت شرایطی این ویژگی به زمان‌های توقف هم قابل توسعه است

$$\mathbb{E}(X_\tau) = \mathbb{E}(X_0)$$

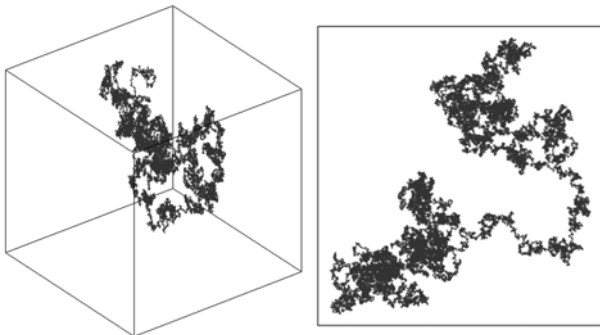
و $f(t, X_1, \dots, X_n)$ تابعی با مشتقات دوم پیوسته باشد،
 $X_t = f(t, X_t^{(1)}, \dots, X_t^{(n)})$ نیز یک فرآیند ایتو است که
 به شکل زیر قابل نمایش می باشد

$$dX_t = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} dX_t^{(i)} + \frac{1}{2} \sum \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} d[X^{(i)}, X^{(j)}]_t$$

۳ حرکت براونی در صفحه و فضا

حرکت براونی در ابعاد بالاتر هم با همان ویژگی های حرکت
 براونی یک بعدی تعریف می شود: حرکتی پیوسته با نمو های
 مستقل و مانا با توزیع گاوسی متقارن. $(B_t - B_s)$ بردار تصادفی
 گاوسی است که میانگین آن صفر و ماتریس کواریانس آن
 $(t - s)$ برابر ماتریس همانی است. می توان دید که مولفه های
 حرکت براونی چند بعدی، حرکت های براونی مستقل یک
 بعدی هستند.

حرکت های براونی در ابعاد مختلف شباهت های زیادی با هم
 دارند، اما برخی تفاوت های شگفت انگیز هم بین آنها وجود
 دارد. یکی از مهم ترین تفاوت ها به چگال بودن مسیر حرکت
 براونی در فضا بر می گردد.



بنا به قضیه ای از پولیا، اگر شما در شبکه d -بعدی، \mathbb{Z}^d ، به
 تصادف قدم بزنید یعنی در هر گام به احتمال برابر به یکی
 از $2d$ جهت ممکن حرکت کنید، برای $d = 1, 2$ به احتمال
 یک از همه نقاط شبکه خواهید گذشت اما برای $d \geq 3$ چنین

$$\begin{aligned} &= \sum_{j=0}^{N-1} \mathbb{E}(\zeta_j^2) \mathbb{E}((B_{t \wedge t_{j+1}} - B_{t \wedge t_j})^2) \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} \mathbb{E}(\zeta_j^2) ((t \wedge t_{j+1}) - (t \wedge t_j)) \\ &= \mathbb{E} \left[\int_0^t X_s^2 ds \right] \end{aligned}$$

این رابطه اهمیت زیادی دارد و به ایزومتري ایتو معروف
 است. بنا به ایزومتري ایتو، انتگرال گیری تصادفی
 به عنوان عمل گری خطی، از فرآیندهای ساده، که زیر فضای
 چگالی از $(\mathcal{L}^2([0, T]), \|\cdot\|_T)$ تشکیل می دهند، به فضای
 $(\mathcal{M}^c([0, T]), \|\cdot\|_T)$ تعریف شده و ایزومتري است. بنابراین
 این عمل گر به شکل طبیعی و به صورت یکتا به همه فرآیندهای
 سازگار مربع انتگرال پذیر توسعه می یابد.

اکنون پس از موفقیت در تعریف انتگرال های تصادفی نسبت
 به حرکت براونی، می توانیم با استفاده از انتگرال غیرتصادفی
 و انتگرال های تصادفی نسبت به حرکت های براونی مستقل،
 رده ای از فرآیندهای کلی تر شکل زیر بسازیم

$$X_t = X_0 + \int_0^t Z_s ds + \int_0^t Y_s^{(1)} dB_s^{(1)} + \dots + \int_0^t Y_s^{(k)} dB_s^{(k)}$$

این فرآیندها را، که به افتخار ایتو به نام فرآیندهای ایتو خوانده
 می شوند، گاهی به شکل صوری به فرم دیفرانسیلی زیر نمایش
 می دهند

$$dX_t = Z_t dt + \sum Y_t^{(j)} dB_t^{(j)}$$

می توان نشان داد که اگر $X_t^{(1)}, X_t^{(2)}$ دو فرآیند ایتو به صورت
 $dX_t^{(i)} = Z_t^{(i)} dt + \sum Y_t^{(i,j)} dB_t^{(j)}$ باشند، تغییرات توأم آنها
 از رابطه زیر به دست می آید

$$d[X^{(1)}, X^{(2)}]_t = \left(\sum Y_t^{(1,j)} Y_t^{(2,j)} \right) dt$$

یکی از صورت های مختلف قابل تصور از فرمول ایتو
 حاکی از آن است که اگر $X_t^{(1)}, \dots, X_t^{(n)}$ فرآیندهای ایتو

τ به کار ببریم (توجه کنید که f در ناحیه مورد توجه ما کران دار و بنابراین استفاده از قضیه مجاز است)، خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(f(B_\tau)) &= \mathbb{P}(\tau_r < \tau_R)g(r) + \mathbb{P}(\tau_R < \tau_r)g(R) \\ &= f(x) = g(|x|)\end{aligned}$$

از طرفی چون ناحیه بین دو گوی کران دار است حرکت براونی به احتمال یک در زمان متناهی از آن خارج می شود و بنابراین داریم

$$\mathbb{P}(\tau_r < \tau_R) + \mathbb{P}(\tau_R < \tau_r) = 1$$

با حل این معادلات به دست می آوریم

$$\mathbb{P}(\tau_r < \tau_R) = \frac{g(|x|) - g(R)}{g(r) - g(R)}$$

اکنون با جای گذاری از (۴) و حدگیری خواهیم داشت

$$\mathbb{P}(\tau_r < \infty) = \lim_{R \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\tau_r < \tau_R) = \begin{cases} 1 & d = 1, 2 \\ \left(\frac{r}{|x|}\right)^{d-2} & d \geq 3 \end{cases}$$

بنابراین در بعد یک و دو با شروع از x به هر همسایگی از نقطه دیگری چون y با احتمال یک خواهیم رسید اما در ابعاد بالاتر با کوچک شدن همسایگی این احتمال به صفر میل می کند.

به عنوان نتیجه ای ساده از حکم بالا، دیده می شود که مسیر هندسی حرکت براونی دو بعدی به احتمال یک در صفحه چگال است. اما می توان نشان داد که اندازه دو بعدی این مسیر صفر است. هم چنین با روش های پیچیده تری ثابت می شود که بعد هاسدورف مسیر حرکت براونی در همه ابعاد بیش از یک برابر با دو است.

۴ توابع همساز و مساله دیریکله

در بخش قبل از توابع همساز به شکل موثری برای بررسی رفتار حرکت براونی کمک گرفتیم. جالب است که این ارتباط در

نیست! به زبان احتمال دانان، قدم زدن تصادفی در بعد یک و دو بازگشتی و در ابعاد بالاتر گذرا است.

با ابزارهای آنالیز تصادفی که تا این جا دیده ایم می توانیم مشابه قضیه پولیا را برای همزاد پیوسته قدم زدن تصادفی یعنی حرکت براونی ثابت کنیم. نخست صورت چندبعدی فرمول ایتورا برای تابعی از حرکت براونی می نویسیم

$$df(B_t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \Delta f(B_t) dt + \nabla f(B_t) \cdot dB_t$$

یا به تعبیر انتگرالی، اگر حرکت براونی از نقطه x شروع به حرکت کرده باشد

$$f(B_t) = f(x) + \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^t \Delta f(B_s) ds + \int_0^t \nabla f(B_s) \cdot dB_s$$

حال اگر f تابعی همساز باشد، یعنی $\Delta f = 0$ ، در نمایش بالا برای $f(B_t)$ تنها یک انتگرال تصادفی باقی خواهد ماند و بنابراین $f(B_t)$ مارتینگل می شود. در ادامه f را تابعی همساز انتخاب می کنیم که بر $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ تعریف شده و شعاعی باشد یعنی $f(x) = g(|x|)$. به سادگی دیده می شود که چنین تابعی وجود دارد و در حد یک تبدیل خطی یکتا است و در ابعاد مختلف به این شکل داده می شود

$$g(u) = \begin{cases} u & d = 1 \\ \ln u & d = 2 \\ \left(\frac{1}{u}\right)^{d-2} & d \geq 3 \end{cases} \quad (4)$$

اکنون می خواهیم بررسی کنیم که حرکت براونی با شروع از نقطه x چقدر احتمال دارد که به نزدیکی نقطه دیگری مثل y برسد. با یک انتقال می توانیم فرض کنیم که y همان مبدأ مختصات است. حال اگر دو گوی به مرکز مبدأ با شعاع های برابر R و r در نظر بگیریم که نقطه x بین این دو واقع شود، و τ_r و τ_R را به ترتیب اولین زمان های برخورد به سطح این دو گوی بگیریم، $\tau = \min\{\tau_r, \tau_R\}$ ، اولین زمان خروج از ناحیه میان دو گوی، یک زمان توقف خواهد شد. اگر قضیه نمونه گیری اختیاری را در مورد مارتینگل $f(B_t)$ و زمان توقف

مونت کارلو می‌گویند: برای یافتن مقدار تقریبی جواب در نقطه‌ای داده شده، $u(x)$ ، مقدار $\mathbb{E}^x(f(B_\tau))$ را تخمین می‌زنیم و برای این کار تعدادی مسیر حرکت براونی با شروع از نقطه x شبیه‌سازی می‌کنیم و آن‌ها را تا برخورد به مرز Ω ادامه می‌دهیم. میانگین تابع f در نقاط به دست آمده تخمینی از $\mathbb{E}^x(f(B_\tau))$ است. طبیعی است که هرچه تعداد مسیرهای شبیه‌سازی شده بیشتر شود دقت تخمین نیز افزایش می‌یابد. روش‌های مونت کارلو مزیتی مهم دارند و آن این است که حجم محاسبات مورد نیاز آن‌ها نسبت به بعد مساله، مانند روش‌های کلاسیک حل عددی معادله دیفرانسیل، به صورتی غیرقابل کنترل زیاد نمی‌شود و لذا این روش‌ها در ابعاد بالا هم‌چنان قابل استفاده هستند. تا امروز برای رده بزرگی از معادلات دیفرانسیل پاره‌ای جواب‌هایی با تعبیر احتمالاتی به دست آمده است و تلاش برای توسعه این روش‌ها به انواع دیگر معادلات دیفرانسیل هم‌چنان ادامه دارد.

۵ قضیه لوی و نوردایی هم‌دیس

یک ویژگی دیگر حرکت براونی که آن را به مفاهیم عمیقی در آنالیز و هندسه مرتبط می‌کند نوردایی آن تحت اثر نگاشت‌های هم‌دیس است. این حقیقت بسیار جالب که افتخار کشف آن متعلق به احتمال‌دان فرانسوی، لوی است حاکی از آن است که تصویر حرکت براونی تحت نگاشتی زاویه نگه‌دار یا هم‌دیس از نظر شکل هندسی مسیر (ولی نه نحوه پرمایش آن) هم‌توزیع با حرکت براونی باقی می‌ماند.

نوردایی هم‌دیس نتیجه قضیه عمیقی، باز هم از لوی، است که حرکت براونی را به کمک برخی ویژگی‌های مارتینگلی آن در میان فرآیندهای پیوسته به صورت یکتا مشخص می‌کند. بنا براین قضیه، تنها فرآیند تصادفی $(X_t^{(1)}, \dots, X_t^{(d)})$ که

جهت معکوس نیز بسیار روشن‌گر و انگیزه‌بخش پژوهش‌های عمیق و گسترده‌ای بوده است. این پژوهش‌ها منجر به استفاده از مفاهیم و ابزارهای احتمالاتی در شاخه‌های پرسابقه‌تری از آنالیز ریاضی مانند معادلات دیفرانسیل و نظریه پتانسیل شده و از این طریق نتایج بدیعی به دست آمده است.

یکی از شناخته‌شده‌ترین مثال‌ها از چنین کاربردهای آنالیزی، نمایش احتمالاتی برای جواب مساله دیریکله است که نخستین بار توسط کاکوتانی ارایه شد. مساله عبارت است از پیدا کردن تابعی هم‌ساز مانند u درون ناحیه Ω از فضای اقلیدسی به نحوی که روی مرز Ω برابر با تابع داده شده f باشد

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = f & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

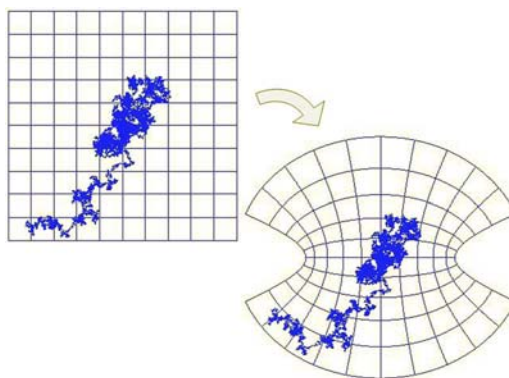
همان‌طور که دیده‌ایم اگر u جوابی برای مساله بالا و B_t یک حرکت براونی با شروع از نقطه $x \in \Omega$ باشد، به علت هم‌ساز بودن u ، $u(B_t)$ مارتینگل می‌شود. اکنون اگر τ را اولین زمان خروج از Ω بگیریم با به کار بردن قضیه نمونه‌گیری اختیاری خواهیم داشت

$$u(x) = u(B_0) = \mathbb{E}^x(u(B_\tau)) = \mathbb{E}^x(f(B_\tau))$$

بنابراین برای هر $x \in \Omega$ با نوعی میانگین‌گیری از f بر روی مرز Ω به دست می‌آید که وزن نقاط مختلف روی مرز Ω در این میانگین‌گیری از توزیع اولین برخورد حرکت براونی به مرز تعیین می‌شود. به این ترتیب یکتایی جواب مساله دیریکله، به همراه توصیفی احتمالاتی از جواب در صورت وجود به دست می‌آید. می‌توان نشان داد که تحت شرایط نسبتاً عامی بر Ω و f ، تابع u که با عبارت بالا توصیف می‌شود واقعا جواب مساله دیریکله است. اثبات این موضوع کمی فنی‌تر است و در آن از ویژگی قوی مارکوفی برای حرکت براونی استفاده شود.

این نمایش احتمالاتی گذشته از جذابیت نظری آن، به روش عددی جالبی برای یافتن جواب منجر می‌شود که به آن روش

مولفه‌های آن مارتینگل‌هایی با مسیر پیوسته باشند و برای هر
 $[X^{(i)}, X^{(j)}]_t = \delta_{i,j}t$ ، حرکت براونی $-d$ بعدی است!



$$\langle M^{(1)} \rangle_t = \dots = \langle M^{(d)} \rangle_t, \quad \forall i \neq j [M^{(i)}, M^{(j)}]_t = 0$$

یا معادل آن به زبان دیفرانسیلی

$$d\langle M^{(1)} \rangle_t = \dots = d\langle M^{(d)} \rangle_t, \quad \forall i \neq j [M^{(i)}, M^{(j)}]_t = 0 \quad (5)$$

اکنون فرض کنید B_t حرکت براونی $-d$ بعدی و
 $\varphi: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ نگاشتی با مشتقات مرتبه دوم پیوسته باشد که
 $x = (x_1, \dots, x_d)$ را به $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_d(x))$ تصویر
 می‌کند. با به کار بردن فرمول ایتو برای $\varphi_i(B_t)$ خواهیم داشت

$$d\varphi_i(B_t) = \sum_k \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}(B_t) dB_t^{(k)} + \frac{1}{2} \sum_k \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_k^2}(B_t) dt$$

بنابراین به دست می‌آوریم

$$d[\varphi_i(B), \varphi_j(B)]_t = \sum_k \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}(B) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k}(B) \right) dt \quad (6)$$

اکنون اگر φ نگاشتی هم‌دیس باشد، ماتریس مشتق آن،
 $[\partial_{x_k} \varphi_i]_{i,k}$ ، متعامد خواهد بود و بنابراین شرط (5) و (6)
 نتیجه می‌شود. پس بنا به آن چه نشان دادیم $\varphi(B_t)$ با تغییر
 پرمایشی از حرکت براونی به دست می‌آید. اما تغییر پرمایش
 شکل هندسی مسیر را تغییر نمی‌دهد و این همان ویژگی
 ناوردایی هم‌دیس است!

همان‌طور که می‌دانیم خانواده نگاشت‌های هم‌دیس در فضای
 دوبعدی بسیار غنی است. در واقع این نگاشت‌ها همان توابع
 تحلیلی بر صفحه مختلط هستند که مطالعه آن‌ها شاخه
 مستقلی از ریاضیات است. اما در ابعاد بالاتر نگاشت‌های
 هم‌دیس بسیار محدودتر هستند. به نظر شما آیا این حقیقت
 ارتباطی با رفتار متفاوت حرکت براونی در بعد دو و ابعاد بالاتر
 دارد؟

در حالت یک بعدی، $d = 1$ ، قضیه لوی ادعا می‌کند که
 مارتینگل پیوسته‌ای که تغییرات مرتبه دوم آن تا لحظه t برابر t
 باشد حرکت براونی است. اکنون اگر M_t مارتینگلی پیوسته با
 تغییرات مرتبه دوم متناهی باشد، $\langle M \rangle_t$ فرآیندی پیوسته خواهد
 شد و بنابراین می‌توانیم خانواده صعودی $\{\tau_t\}_{t \geq 0}$ از زمان‌های
 توقف را به کمک رابطه $\langle M \rangle_{\tau_t} = t$ تعریف کنیم. اکنون اگر
 قرار دهیم $X_t = M_{\tau_t}$ ، به کمک صورت‌های پیشرفته‌تری از
 قضیه نمونه‌گیری اختیاری می‌توان نشان داد که فرآیند پیوسته
 X نیز مارتینگل است و چون با توجه به نحوه تعریف τ_t ‌ها
 می‌دانیم که $\langle X \rangle_t = t$ ، بنابراین X حرکت براونی است. نتیجه
 این‌که همه مارتینگل‌های پیوسته با تغییر پرمایشی (تصادفی) از
 حرکت براونی به دست می‌آیند.

در ابعاد بیش از یک، $d \geq 2$ ، ماجرا کمی پیچیده‌تر است؛
 این بار اگر بخواهیم همان کار را برای مارتینگل پیوسته
 $M_t = (M_t^{(1)}, \dots, M_t^{(d)})$ انجام دهیم، یعنی زمان‌های توقف

۶ توزیع بار الکتریکی

اگر مقدار یک واحد بار الکتریکی بر جسم رسانایی مانند A قرار دهیم، این بار چگونه بر A توزیع می‌شود؟ شاید درباره جواب مساله این قدر شنیده باشید که بار بر سطح جسم قرار می‌گیرد و نیز این که چگالی بار در نزدیکی نقاط تیز سطح بیشتر است. در این بخش تلاش می‌کنیم به کمک حرکت براونی توصیفی از جواب ارایه کنیم



یک حرکت براونی را با شروع از نقطه‌ای مانند x خارج از A در نظر بگیرید. می‌دانیم که در بعد سه با احتمال مثبت این متحرک براونی هیچ‌گاه به A بر نخواهد خورد. اما می‌توان پرسید که مشروط به رخ دادن چنین برخوردی، اولین نقطه برخورد کجا است؟ روشن است که پاسخ این سوال یک اندازه احتمال است که به دلیل پیوستگی حرکت براونی محمل آن سطح خارجی A است. اکنون اگر نقطه x را از A دور و دورتر کنیم اندازه‌های احتمال نظیر به اندازه احتمالی میل می‌کنند که جواب مساله توزیع بار است! به بیان دیگر، توزیع بار همان توزیع آماری محل برخورد حرکت‌های براونی با شروع از نقطه بی‌نهایت به سطح A است.

می‌توانیم نحوه قرار گرفتن بار الکتریکی بر A را با اندازه علامت‌داری چون Q_A توصیف کنیم که اندازه کل آن یک و محمل آن A است و برای هر $B \subset A$ مقدار بار داخل B را نشان می‌دهد. در این صورت بنا به قانون کولن، انرژی

پتانسیل حاصل از این نحوه توزیع بار برابر است با

$$U = \int_A \int_A \frac{1}{|x-y|} Q_A(dx) Q_A(dy)$$

به دلایل فیزیکی می‌دانیم که پاسخ مساله آن توزیعی است که انرژی پتانسیل را مینیمم کند. بنابراین اگر فضای اندازه‌ها علامت‌دار با محمل A را $\mathcal{M}(A)$ بنامیم، و با رابطه زیر

$$\langle \mu, \nu \rangle = \int_A \int_A \frac{1}{|x-y|} \mu(dx) \nu(dy)$$

آن را مجهز به یک فرم دوخطی مثبت کنیم، (اثبات مثبت بودن $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ، یعنی این که برای هر $\nu \in \mathcal{M}(A)$ که $\nu \neq 0$ ، داریم $\langle \nu, \nu \rangle > 0$ چندان هم ساده نیست!) برای یافتن پاسخ مساله توزیع بار باید Q_A را با شرط $Q_A(A) = 1$ طوری پیدا کنیم که $\langle Q_A, Q_A \rangle$ مینیمم شود.

اکنون فرض کنید $\mu_{x,A}$ اندازه احتمال ناشی از اولین نقطه برخورد حرکت براونی با شروع از نقطه x به A باشد. به عبارت دیگر اگر τ_A اولین زمان برخورد به A باشد $\mu_{x,A}(dy) = \mathbb{P}^x(B_{\tau_A} \in dy | \tau_A < \infty)$ و قرار دهید $\mu_A = \lim_{x \rightarrow \infty} \mu_{x,A}$ (در این جا به مساله وجود حد نخواهم پرداخت)، نشان خواهیم داد که

$$(Y) \quad \langle \mu_A, \rho \rangle = 0, \quad \rho(A) = 0 \quad \text{که } \rho \in \mathcal{M}(A) \text{ برای هر}$$

در این صورت برای هر $\nu \in \mathcal{M}(A)$ که $\nu(A) = 1$ خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \langle \nu, \nu \rangle &= \langle \mu_A, \mu_A \rangle + \langle \nu - \mu_A, \nu - \mu_A \rangle + 2\langle \mu_A, \nu - \mu_A \rangle \\ &> \langle \mu_A, \mu_A \rangle + 0 + 0 = \langle \mu_A, \mu_A \rangle \end{aligned}$$

و بنابراین μ_A باید همان Q_A باشد. برای اثبات (Y)، برای نقطه $y \in A$ تابع f_y را به شکل $f_y(x) = \frac{1}{|x-y|}$ تعریف می‌کنیم. دیدیم که این تابع هم‌ساز است و بنابراین اگر B_t حرکت براونی سه بعدی باشد $f_y(B_t)$ مارتینگل است. با به کار

بردن قضیه نمونه‌گیری اختیاری برای این مارتینگل و زمان توقف τ_A داریم

$$\begin{aligned} \int_A \frac{1}{|z-y|} \mu_{x,A}(dz) &= \int_A f_y(z) \mu_{x,A}(dz) \\ &= \frac{1}{\mathbb{P}^x(\tau_A < \infty)} \int_A f_y(z) \mathbb{P}^x(B_{\tau_A} \in dz) \\ &= \frac{1}{\mathbb{P}^x(\tau_A < \infty)} \mathbb{E}^x(f_y(B_{\tau_A})) \\ &= \frac{1}{\mathbb{P}^x(\tau_A < \infty)} \mathbb{E}^x(f_y(B_\circ)) \\ &= \frac{1}{\mathbb{P}^x(\tau_A < \infty)} |x-y| \end{aligned}$$

و پس از حدگیری

$$\int_A \frac{1}{|z-y|} \mu_A(dz) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\mathbb{P}^x(\tau_A < \infty)} |x-y|$$

اما واضح است که مقدار حد در عبارت سمت راست به y

$$\forall y \in A, \int_A \frac{1}{|z-y|} \mu_A(dz) = c(A)$$

بستگی ندارد پس سمت چپ نیز باید چنین باشد. بنابراین عدد ثابتی چون $c(A)$ وجود دارد به طوری که

$$\begin{aligned} \langle \mu_A, \rho \rangle &= \int_A \left(\int_A \frac{1}{|x-y|} \mu_A(dx) \right) \rho(dy) x \\ &= \int_A c(A) \rho(dy) = c(A) \rho(A) = 0 \end{aligned}$$

و این اثبات را کامل می‌کند.

داشت

مراجع

- [۱] جهانی پورر، نیوتن، لاینیتس و سپس کیوشی ایتو، فرهنگ و اندیشه ریاضی، شماره ۳۶ (۱۳۸۵) ۶۱-۶۶.
- [۲] ژاژ، و. و پروترف، تاریخچه انتگرال تصادفی و ریاضیات مالی از ۱۸۸۰ تا ۱۹۷۰، ترجمه روح‌الله جهانی پور، فرهنگ و اندیشه ریاضی، شماره ۳۶ (۱۳۸۵) ۱۷-۳۸.
- [۳] ظهوری زنگنه ب. و جهانی پورر، نوربرت وینر ریاضی دانی برای تمام فصول، فرهنگ و اندیشه ریاضی، شماره ۳۳ (۱۳۸۳) ۷۷-۸۶.
- [4] Chung, K.L., Green Brown and Probability; World Scientific (1995).
- [5] Karatzas I. and Shreve, S.E., Brownian Motion and Stochastic Calculus; Sec. Ed., Springer (2000).
- [6] Oksendal, B., Stochastic Differential Equations; Springer (2003).
- [7] Protter, P., Stochastic Integration and Differential Equations; Springer, (2004).