

## بحثی در اندازه اهمیت توأم اجزاء در سیستم‌های $k$ از $n$

مرضیه باغبان سیجانی<sup>۱</sup>

تاریخ دریافت: ۱۳۹۵/۴/۱۹

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۶/۱/۳۰

### چکیده:

این مقاله مطالعه‌ای در اندازه اهمیت توأم،  $JRI$ ، اجزای در سیستم‌های منسجم  $k$  از  $n$  با اجزای مستقل از هم است.  $JRI$  نرخ بهبود قابلیت اعتماد سیستم به سبب بهبود قابلیت اعتماد دو یا چند جزء است. علامت و مقدار  $JRI$  نشان‌دهنده نوع و میزان تأثیر متقابل اجزای بر حسب قابلیت اعتماد سیستم است. البته در حالاتی خاص می‌توان علامت  $JRI$  را بدون محاسبه تعیین کرد. از این اندازه در تعیین اولویت اجزای برای تعمیر و نگهداری پیشگیرانه سیستم‌ها و تعیین سطح افزونگی سیستم‌های  $k$  از  $n$  استفاده می‌شود.

**واژه‌های کلیدی:** افزونگی، اندازه اهمیت توأم، تعمیر، سیستم‌های  $k$  از  $n$ .

### ۱ مقدمه

$TOI$  را تعریف کردند.

این مقاله مطالعه‌ای در زمینه اندازه اهمیت توأم اجزاء در سیستم‌های منسجم با اجزای مستقل از هم است. در بخش ۲ به تعاریف و مفاهیم مقدماتی می‌پردازیم. در بخش ۳ اندازه اهمیت قابلیت اعتماد توأم دو جزء را مورد مطالعه قرار داده‌ایم که در آن علامت  $JRI$  دو جزء بر حسب نوع تأثیر متقابل اجزای بررسی شده است. در بخش ۴ مقدار این اندازه برای دو جزء در سیستم‌های  $k$  از  $n$  به طور جداگانه بررسی شده است. در بخش ۵ این اندازه را برای  $k$  جزء مورد مطالعه قرار داده ایم که در آن، علامت و مقدار  $JRI$  برای سه جزء در سیستم‌های  $k$  از  $n$  بررسی شده است.

هر سیستم، مجموعه‌ای از اجزای است که برای هدفی معین طراحی شده و لزوماً همه اجزای سیستم، اهمیت یکسانی برای کارایی آن ندارند. لذا یکی از اهداف تحلیل قابلیت اعتماد شناسایی اجزایی است که بیشترین اهمیت را برای بهبود سیستم یا بیشترین بحران را برای شکست آن ایجاد می‌کنند.

بیرنیم [۳] بر مبنای ساختار و قابلیت اعتماد اجزای، اولین اندازه اهمیت را بر حسب احتمال بحرانی بودن یک جزء در سیستم‌های منسجم تعریف کرد. این اندازه به اندازه اهمیت بیرنیم  $I_B$ ، معروف است. هانگ و لی [۶] اندازه  $I_B$  را توسعه داده، مفهوم اندازه اهمیت توأم<sup>۲</sup> ( $JRI$ ) را برای دو جزء در یک سیستم با اجزای مستقل تعریف کردند.

## ۲ تعاریف و مفاهیم مقدماتی

### ۱.۲ سیستم و اجزای آن

فرض کنید سیستمی  $n$  جزء دارد و هر جزء در آن فعال یا غیرفعال است. برای توصیف این وضعیت، یک متغیر دوقماری  $X_i$ ،  $i = 1, \dots, n$  به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{جزء } c_i \text{ فعال است} \\ 0, & \text{جزء } c_i \text{ غیرفعال است} \end{cases}$$

همچنین فرض می‌کنیم که سیستم نیز در یکی از دو وضعیت فعال یا غیرفعال است. برای تعیین وضعیت سیستم برحسب

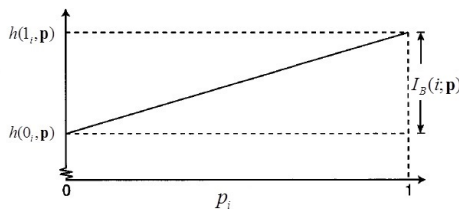
آرمسترانگ [۲] اندازه  $JRI$  را در حالتی که بین اجزای وابستگی است، مورد مطالعه کرد. این اندازه برای سیستم‌های چندحالتی توسط وو [۱۰] مورد بررسی قرار گرفت. هانگ و همکاران [۷]، اندازه  $JRI$  اجزای را در سیستم‌هایی با ساختار  $k$  از  $n$  مطالعه کردند و به بررسی برخی از ویژگی‌های آن پرداختند. جان و چانگ [۸] مجدداً این ویژگی‌ها را مورد مطالعه قرار داده، به تصحیح و تکمیل برخی از این نتایج پرداختند. گائو و همکاران [۴] مفهوم  $JRI$  را برای گروهی از اجزای مستقل توسعه دادند. بر اساس  $JRI$  مرتبه  $k$ ، کو و ژو [۹] اندازه اهمیت مرتبه کلی،

<sup>۱</sup> دانش‌آموخته کارشناس ارشد آمار دانشگاه اصفهان

تعریف می‌شود:

$$I_B(i; \mathbf{p}) = \frac{\partial h(\mathbf{p})}{\partial p_i}. \quad (1)$$

بزرگ بودن  $I_B$  یعنی یک تغییر کوچک در قابلیت اعتماد جزء  $c_i$  می‌تواند باعث افزایش قابلیت اعتماد سیستم شود. اندازه اهمیت بیرنجام به صورت نموداری در شکل ۱ نشان داده شده است.



شکل ۱. نمودار اندازه اهمیت بیرنجام

بنا بر رابطه

$$I_B(i; \mathbf{p}) = h(\cdot 1_i, \mathbf{p}^{(i)}) - h(\cdot 0_i, \mathbf{p}^{(i)}),$$

می‌توان گفت که اندازه اهمیت بیرنجام، معادل است با میزان افزایش قابلیت اعتماد سیستم وقتی که قابلیت اعتماد جزء  $c_i$  یک واحد افزایش می‌یابد. بنا بر رابطه

$$I_B(i; \mathbf{p}) = P(\varphi(\cdot 1_i, \mathbf{x}^{(i)}) - \varphi(\cdot 0_i, \mathbf{x}^{(i)}) = 1),$$

اندازه  $I_B(i; \mathbf{p})$ ، احتمال آن است که جزء  $c_i$  برای سیستم بحرانی باشد. به عبارتی احتمال آن است که کارکرد یا عدم کارکرد جزء  $c_i$  سبب کارکرد یا عدم کارکرد سیستم شود. با استفاده از این رابطه، حدود  $I_B$  در نتیجه ذیل حاصل می‌شود.

**نتیجه ۴.۲.** برای یک سیستم منسجم با  $n \geq 2$  و  $i = 1, \dots, n$

$$0 \leq I_B(i; \mathbf{p}) \leq 1$$

### ۳ اندازه اهمیت قابلیت اعتماد توأم دو جزء

اگرچه  $I_B$  برای رتبه‌بندی اجزای بر حسب کاهش یا افزایش اندازه اهمیتشان مورد استفاده قرار می‌گیرد و مهم‌ترین جزء را در افزایش قابلیت اعتماد سیستم تعیین می‌کند،  $I_B$  حاوی همه اطلاعات مربوط به تأثیر متقابل بین اجزای در قابلیت اعتماد سیستم نیست؛ به عبارتی تعیین‌کننده میزان تغییر اهمیت یک جزء در صورت فعال یا غیرفعال بودن جزء دیگر نیست. به این

وضعیت اجزای، فرض می‌شود که پیوند سیستم با اجزای آن، با تابع دومقداری  $\varphi(\mathbf{X})$ ، که به تابع ساختار سیستم معروف است، مشخص می‌شود که در آن  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ . بردار  $\mathbf{X}$  را بردار وضعیت سیستم می‌گوییم. بنا براین، با در نظر گرفتن وضعیت بردار  $\mathbf{X}$  داریم

$$\varphi(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1, & \text{سیستم فعال است} \\ 0, & \text{سیستم غیرفعال است} \end{cases}$$

شکل تابعی  $\varphi(\mathbf{X})$ ، پس از آن که نوع ارتباط بین اجزای در سیستم معلوم شود، قابل تعیین خواهد بود.

**تعریف ۱.۲.** یک سیستم را زمانی منسجم می‌نامند که تابع ساختار آن یکنوا بوده، جزء نامربوط در آن وجود نداشته باشد.

### ۲.۲ سیستم‌های $k$ از $n$

یک سیستم شامل  $n$  جزء را  $k$  از  $n$  می‌نامند هرگاه فعال بودن آن، مستلزم فعال بودن حداقل  $k$  جزء از  $n$  جزء آن باشد. نمایش جبری تابع ساختار سیستم‌های  $k$  از  $n$  به صورت زیر است:

$$\varphi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \sum_{i=1}^n x_i \geq k \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

ذکر این نکته ضروری است که سیستم متوالی، یک سیستم  $n$  از  $n$ ، سیستم موازی، یک سیستم  $1$  از  $n$  است.

### ۳.۲ بردارهای مسیر و بردارهای قطع‌کننده

**تعریف ۲.۲.** یک مسیر مینیمال، بردار وضعیتی است که به‌ازای آن سیستم فعال است و اگر حداقل یکی از اجزای فعال آن بردار، غیرفعال شود، سیستم نیز غیرفعال خواهد شد.

**تعریف ۳.۲.** بردار قطع‌کننده مینیمال، برداری است که به‌ازای آن سیستم از کار می‌افتد و چنانچه حداقل یکی از اجزای آن بردار فعال شود، سیستم ممکن است شروع به کار کند.

### ۴.۲ اندازه اهمیت بیرنجام

یک سیستم منسجم با تابع ساختار  $\varphi$  با  $n$  جزء مستقل  $c_1, \dots, c_n$  را در نظر بگیرید که قابلیت اعتماد جزء  $c_i$ ،  $p_i$  است و  $h(\mathbf{p})$  قابلیت اعتماد سیستم است. اندازه اهمیت بیرنجام جزء  $c_i$  به صورت زیر

ج)  $I_{JRI}^{\text{II}}(i, j; \mathbf{p}) = 0$  معادل است با  $I_B(j; \cdot_i, \mathbf{p}^{(i)}) = I_B(j; \cdot_i, \mathbf{p}^{(i)})$  در این صورت،  $I_B$  جزء  $c_j$  در حالتی که جزء  $c_i$  در سیستم غیرفعال، باشد برابر است با حالتی که جزء  $c_i$  در سیستم فعال است.

قضیه ۴.۳ در حالتی که متغیرها مستقل یا وابسته باشند، برقرار است.

قضیه ۴.۳ الف) اگر هیچ مسیر مینیمالی شامل هر دو جزء  $c_i$  و  $c_j$  وجود نداشته باشد، آن گاه

$$I_{JRI}^{\text{II}}(i, j; \mathbf{p}) \leq 0.$$

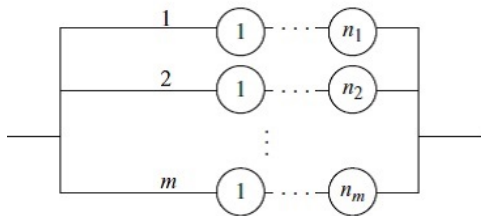
ب) اگر هیچ قطع کننده مینیمالی شامل هر دو جزء  $c_i$  و  $c_j$  وجود نداشته باشد، آن گاه

$$I_{JRI}^{\text{II}}(i, j; \mathbf{p}) \geq 0.$$

بنا بر قضیه فوق، در حالتی که دو جزء به صورت متوالی به هم متصل هستند علامت  $I_{JRI}^{\text{II}}$  مثبت است و در حالتی که دو جزء به صورت موازی به هم متصل هستند علامت  $I_{JRI}^{\text{II}}$  منفی است.

تذکر ۵.۳ دو جزء، مکمل (جانشین) قابلیت اعتماد یکدیگر هستند اگر با فعال بودن یکی از این دو جزء، اهمیت جزء دیگر افزایش (کاهش) یابد [۵]. بنا بر این، دو جزء، مکمل (جانشین) قابلیت اعتماد یکدیگر هستند اگر علامت  $JRI$  آن‌ها غیر منفی (غیر مثبت) باشد.

مثال ۶.۳ یک سیستم موازی-متوالی با اجزای  $i.i.d.$  و قابلیت اعتماد یکسان  $p$  را مانند شکل ۲ در نظر بگیرید.



شکل ۲. سیستم با ساختار موازی-متوالی

فرض کنید سیستم دارای  $k$  زیر سیستم متوالی با  $n_k$  جزء در  $k$ امین زیرسیستم،  $k = 1, \dots, m$ ، باشد. بنا بر این، قابلیت اعتماد سیستم برابر است با  $h(\mathbf{p}) = 1 - \prod_{k=1}^m (1 - p^{n_k})$  و  $I_{JRI}^{\text{II}}$  دو جزء  $c_j$  و  $c_i$  در زیرسیستم  $k$ ، به صورت زیر محاسبه می شود

$$I_{JRI}^{\text{II}}(i, j; p) = p^{n_k-2} \prod_{r \neq k} (1 - p^{n_r}) \geq 0.$$

منظور هانگ و لی [۷] اندازه اهمیت قابلیت اعتماد توأم دو جزء  $c_i$  و  $c_j$ ،  $I_{JRI}^{\text{II}}(i, j; \mathbf{p})$  را به صورت زیر تعریف کردند:

$$I_{JRI}^{\text{II}}(i, j; \mathbf{p}^{(ij)}) = \frac{\partial^2 h(\mathbf{p})}{\partial p_i \partial p_j}. \quad (2)$$

برحسب اندازه فوق، از لحاظ تعمیر و نگهداری و یا حتی انتخاب اجزای با هزینه و کیفیت بیشتر، دو جزئی بیشتر مورد توجه قرار می گیرند که  $JRI$  بزرگتری داشته باشند.

هانگ و لی [۷] در قضیه ۱.۳ رابطه بین  $I_B$  و  $I_{JRI}^{\text{II}}$  را در یک سیستم منسجم به دست آوردند.

فرض کنید نماد  $I_B(j; \cdot_i, \mathbf{p}^{(i)})$  نشان دهنده اندازه اهمیت بیرنجام جزء  $c_j$  به شرط فعال بودن جزء  $c_i$  در سیستم و نماد  $I_B(j; \cdot_i, \mathbf{p}^{(i)})$  نشان دهنده اندازه اهمیت بیرنجام جزء  $c_j$  به شرط غیرفعال بودن جزء  $c_i$  در سیستم باشد.

قضیه ۱.۳ در سیستم منسجم  $(N, \varphi)$  با اجزای مستقل  $c_1, \dots, c_n$  داریم الف)

$$I_{JRI}^{\text{II}}(i, j; \mathbf{p}) = I_B(j; \cdot_i, \mathbf{p}^{(i)}) - I_B(j; \cdot_i, \mathbf{p}^{(i)}).$$

ب)

$$I_{JRI}^{\text{II}}(i, j; \mathbf{p}) = I_B(i; \cdot_j, \mathbf{p}^{(i)}) - I_B(i; \cdot_j, \mathbf{p}^{(i)}).$$

بر اساس این قضیه،  $JRI$  مقداری مثبت، منفی یا صفر است. در اصل  $JRI$  دو جزء نشان دهنده میزان تغییر اهمیت قابلیت اعتماد یک جزء در حضور یا عدم حضور جزء دیگر است که بر اساس آن، نتایج ذیل حاصل می شود.

نتیجه ۲.۳ برای هر دو جزء  $c_i$  و  $c_j$

$$-1 \leq I_{JRI}^{\text{II}}(i, j; \mathbf{p}) \leq 1.$$

نتیجه ۳.۳ الف)  $I_{JRI}^{\text{II}}(i, j; \mathbf{p}) \geq 0$  معادل است با  $I_B(j; \cdot_i, \mathbf{p}^{(i)}) \geq I_B(j; \cdot_i, \mathbf{p}^{(i)})$  در این صورت، جزء  $c_j$  در حالتی که جزء  $c_i$  در سیستم فعال است،  $I_B$  بزرگ تری دارد نسبت به حالتی که جزء  $c_i$  در سیستم غیرفعال است.

ب)  $I_{JRI}^{\text{II}}(i, j; \mathbf{p}) \leq 0$  معادل است با  $I_B(j; \cdot_i, \mathbf{p}^{(i)}) \leq I_B(j; \cdot_i, \mathbf{p}^{(i)})$  در این صورت، جزء  $c_j$  در حالتی که جزء  $c_i$  در سیستم غیرفعال است،  $I_B$  بزرگ تری دارد نسبت به حالتی که جزء  $c_i$  در سیستم فعال است.

### ۱.۴ مقایسه $JRI$ دو جزء در یک سیستم $k$ از $n$

در این قسمت تغییر  $JRI$  اجزای را در سیستم‌های  $k$  از  $n$  از دو جهت مطالعه می‌کنیم. ابتدا تغییر  $JRI$  را بر حسب تغییر  $p$  و  $n$  در یک نقطه ثابت  $k$  ( $2 =$ ) و سپس تغییر آن را بر حسب تغییر  $p$  و  $k$  در نقطه ثابت  $n$  مورد بررسی قرار می‌دهیم.

**قضیه ۳.۴.** برای سیستم‌های  $2$  از  $n$  با اجزای *i.i.d.*

$$I_{JRI}^{II}(i, j; \mathbf{p}) = (1-p)^{n-3} [1 - (1-n)p]. \quad (\text{الف})$$

$$\lim_{p \rightarrow 1} I_{JRI}^{II}(i, j; \mathbf{p}) = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{p \rightarrow 0} I_{JRI}^{II}(i, j; \mathbf{p}) = 1 \quad (\text{ب})$$

(ج) کمترین مقدار  $I_{JRI}^{II}$  برابر است با  $\left(\frac{n-2}{n-1}\right)^{n-3}$  و این مقدار به‌ازای  $p = \frac{2}{n-1}$  به دست می‌آید.

(د) برای  $n \geq 5$ ، نمودار  $I_{JRI}^{II}$  دارای نقطه عطف  $\left[\frac{3}{n-1}, -2\left(\frac{n-4}{n-1}\right)^{n-3}\right]$  است.

بر اساس قضیه ۳.۴، در یک سیستم  $2$  از  $n$  با افزایش قابلیت اعتماد اجزای، اندازه اهمیت توأم دو جزء کاهش می‌یابد و هنگامی که  $\varphi \rightarrow 1$ ،  $JRI$  دو جزء صفر می‌شود.

**قضیه ۴.۴.** فرض کنید که  $I_{JRI}^{II}(i, j; \mathbf{p})$  اندازه اهمیت توأم دو جزء  $c_i$  و  $c_j$  برای سیستم  $2$  از  $n$  باشد. در این صورت رابطه بین  $JRI$  سیستم  $2$  از  $n$  و سیستم  $2$  از  $n+1$  به صورت ذیل است.

$$I_{JRI}^{II}(i, j; \mathbf{p}) < I_{JRI}^{II}(i, j; \mathbf{p}) \quad \text{اگر} \quad 0 < p < \frac{2}{n} \quad (\text{الف})$$

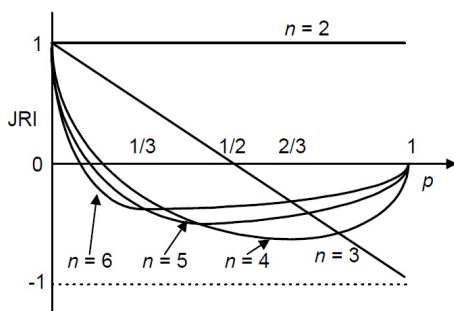
$$I_{JRI}^{II}(i, j; \mathbf{p}) = I_{JRI}^{II}(i, j; \mathbf{p}) \quad \text{اگر} \quad p = \frac{2}{n} \quad (\text{ب})$$

$$I_{JRI}^{II}(i, j; \mathbf{p}) > I_{JRI}^{II}(i, j; \mathbf{p}) \quad \text{اگر} \quad \frac{2}{n} < p < 1 \quad (\text{ج})$$

برای تعیین سطح بهینه‌ای از افزونگی در ساختارهای  $k$  از  $n$  به تغییرات  $JRI$  در سیستم‌های  $2$  از  $n$  به شکل ۳ توجه فرمایید. از شکل ۳ نتایج ذیل حاصل می‌شود.

□ برای  $n \geq 4$ ، با افزایش قابلیت اعتماد اجزای،  $\varphi$  اندازه اهمیت توأم دو جزء  $c_i$  و  $c_j$  به صفر میل می‌کند.

□ برای  $n \geq 4$  و مقادیر بزرگ  $\varphi$ ، با افزایش  $n$ ، مقدار قدر مطلق  $JRI$  دو جزء  $c_i$  و  $c_j$  کاهش می‌یابد.



شکل ۳. تغییرات  $JRI$  بر حسب سطح افزونگی در یک سیستم  $2$  از  $n$

$I_{JRI}^{II}$  جزء  $c_i$  در زیرسیستم  $k$  و جزء  $c_j$  در زیرسیستم  $k'$  به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$I_{JRI}^{II}(i, j; p) = -p^{n_k - n_{k'} - 2} \prod_{r \neq k, k'} (1 - p^{n_r}) \leq 0.$$

با توجه به مثال فوق،  $JRI$  دو جزئی که در یک سیستم به صورت متوالی به یکدیگر متصل هستند، مثبت است و  $JRI$  دو جزئی که در یک سیستم به صورت موازی به یکدیگر متصل باشند، منفی است.

### ۴ $JRI$ دو جزء در سیستم‌های $k$ از $n$

قضیه زیر، شکل بسته‌ای برای  $JRI$  دو جزء در یک سیستم  $k$  از  $n$  با اجزای *i.i.d.* است. بر مبنای این قضیه می‌توان تفاوت مقدار اندازه اهمیت  $JRI$  دو جزء را بر حسب قابلیت اعتماد اجزای و پارامترهای  $k$  و  $n$  بررسی کرد.

**قضیه ۱.۴.** برای  $n \geq 0$  و  $2 \leq k \leq n$ ،  $I_{JRI}^{II}$  برای سیستم  $k$  از  $n$  با اجزای *i.i.d.* برای دو جزء  $c_i$  و  $c_j$  به صورت زیر تعیین می‌شود

$$I_{JRI}^{II}(i, j; \mathbf{p}) = p^{k-2} (1-p)^{n-k-1} \times \left[ \binom{n-2}{k-2} - \binom{n-1}{k-1} p \right]. \quad (3)$$

نتیجه زیر از قضیه ۱.۴ حاصل می‌شود که بر اساس آن با آگاهی از مقدار  $p$  می‌توان علامت  $JRI$  را تعیین کرد.

**نتیجه ۲.۴.** برای  $n \geq 0$  و  $2 \leq k \leq n$ ، علامت  $I_{JRI}^{II}$  برای سیستم  $k$  از  $n$  با اجزای *i.i.d.* برای دو جزء  $c_i$  و  $c_j$  به صورت زیر تعیین می‌شود.

$$\text{الف) اگر } I_{JRI}^{II}(i, j; \mathbf{p}) > 0$$

$$0 < p < \frac{k-1}{n-1}.$$

$$\text{ب) اگر } I_{JRI}^{II}(i, j; \mathbf{p}) = 0 \quad p = \frac{k-1}{n-1}$$

$$\text{ج) اگر } I_{JRI}^{II}(i, j; \mathbf{p}) < 0$$

$$\frac{k-1}{n-1} < p < 1.$$

طبق نتیجه ۲.۴ به راحتی می‌توان تعیین کرد که در چه شرایطی اجزای جانشین قابلیت اعتماد یا مکمل قابلیت اعتماد یکدیگر هستند.

## ۵ اندازه اهمیت قابلیت اعتماد توأم $k$ جزء

گائو و همکاران [۴] مفهوم اندازه اهمیت توأم  $JRI$  را برای  $k$  جزء در سیستم به صورت زیر توسعه دادند:

$$I_{JR^k}(c_1, \dots, c_k) = \frac{\partial^k h(\mathbf{p})}{\prod_{i=1}^k \partial p_i}.$$

**قضیه ۱.۵.** در صورتی که اجزای از یکدیگر مستقل باشند، اهمیت قابلیت اعتماد نسبی توأم به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\begin{aligned} I_{JR^k}(c_1, \dots, c_k) &= h(1_1, \dots, 1_k; \mathbf{p}) \\ &\quad - h(1_1, 1_2, \dots, 0_k; \mathbf{p}) \pm \dots \pm h(0_1, 0_2, \dots, 1_k; \mathbf{p}) \\ &\quad \pm h(0_1, 0_2, \dots, 0_k; \mathbf{p}). \end{aligned} \quad (۴)$$

بررسی علامت مثبت و منفی قبل از تابع  $h$  در رابطه ۴ بر مبنای اصول زیر تعیین می شود.

(الف) اگر عدد  $k$  فرد باشد، در صورتی که تعداد متناظر با ۱ها نیز فرد باشد، علامت قبل از تابع  $h$  مثبت و در غیر این صورت منفی است.

(ب) اگر عدد  $k$  زوج باشد، در صورتی که تعداد متناظر با ۱ها نیز زوج باشد، علامت قبل از تابع  $h$  مثبت و در غیر این صورت منفی است.

(ج) علامت قبل از تابع  $h(0_1, \dots, 0_k; \mathbf{p})$  نیز به این صورت تعیین می شود که اگر  $k$  فرد باشد، منفی و در غیر این صورت مثبت است.

**نتیجه ۲.۵.** تساوی زیر میان  $JRI$  برای  $k$  جزء و  $JRI$  مراتب پایین تر برقرار است.

$$\begin{aligned} I_{JR^k}(c_1, \dots, c_k) &= I_{JR^{k-1}}(c_1, \dots, c_{k-1})_{s^*c_k} \\ &\quad I_{JR^{k-1}}(c_1, \dots, c_{k-1})_{s-c_k}. \end{aligned} \quad (۵)$$

که در آن  $I_{JR^{k-1}}(c_1, \dots, c_{k-1})_{s^*c_k}$  نشان دهنده اثر توأم  $k-1$  جزء در سیستم است، در صورتی که جزء  $c_k$  آن فعال باشد و  $I_{JR^{k-1}}(c_1, \dots, c_{k-1})_{s-c_k}$  به این معنا است که جزء  $c_k$  در سیستم غیرفعال است.

در حقیقت،  $JRI$  برای  $k$  جزء نشان دهنده میزان تغییر اهمیت قابلیت اعتماد  $k-1$  جزء در حضور یا عدم حضور جزء دیگر است.

این اطلاعات برای تعیین سطح افزونگی در یک سیستم  $k$  از  $n$  بر حسب مقدار  $p$  مفید است. به عنوان مثال، می توان مقدار  $n$  را طوری تعیین کرد که اجزای جانشین قابلیت اعتماد یکدیگر باشند. به این منظور، اگر  $n < \frac{1+p}{p}$  ترجیح داده می شود که سطح افزونگی افزایش یابد؛ زیرا در حالتی که  $n < \frac{1+p}{p}$  اجزاء مکمل قابلیت اعتماد یکدیگر هستند.

در سیستم های ۲ از  $n$ ، اگر  $p > \frac{1}{2}$  باشد، آن گاه  $|I_{JR_{i,n}^{II}}(i, j; \mathbf{p})| > |I_{JR_{i,n+1}^{II}}(i, j; \mathbf{p})|$  به عبارتی اگر قابلیت اعتماد اجزای بیش از  $\frac{1}{2}$  باشد، افزایش سطح افزونگی سبب کاهش شدت اثر متقابل دو جزء  $c_i$  و  $c_j$  می شود. در قضیه زیر، تغییرات  $JRI$  را می توان با تغییر  $k$  و  $p$  بررسی کرد.

### قضیه ۵.۴ (الف)

برای  $2 \leq k \leq n-3$ ، در سیستم های  $k$  از  $n$  داریم

$$\lim_{p \rightarrow 0} I_{JR_{k,n}^{II}}(i, j; \mathbf{p}) = 0,$$

$$\lim_{p \rightarrow 1} I_{JR_{k,n}^{II}}(i, j; \mathbf{p}) = 0.$$

(ب) برای  $2 \leq k \leq n-3$ ، در سیستم های  $k$  از  $n-1$  داریم

$$\lim_{p \rightarrow 0} I_{JR_{n-1,n}^{II}}(i, j; \mathbf{p}) = 0,$$

$$\lim_{p \rightarrow 1} I_{JR_{n-1,n}^{II}}(i, j; \mathbf{p}) = -1.$$

طبق قضیه ذیل می توان  $JRI$  سیستم  $k$  از  $n$  را با سیستم  $k$  از  $n+1$  بر مبنای مقدار  $p$  مقایسه نمود.

**قضیه ۶.۴.** با فرض این که  $a = \sqrt{\frac{(k-1)(n-k+1)}{n-1}}$  باشد، رابطه  $I_{JR_{k,n}^{II}}$  سیستم  $k$  از  $n$  با سیستم  $k$  از  $n+1$  به صورت زیر است. (الف) برای  $1 < p < \frac{k-1+a}{n}$  یا  $\frac{k-1-a}{n} < p < 1$ ، خواهیم داشت

$$I_{JR_{k,n}^{II}}(i, j; \mathbf{p}) < I_{JR_{k,n+1}^{II}}(i, j; \mathbf{p}).$$

(ب) برای  $p = \frac{k-1+a}{n}$ ، خواهیم داشت

$$I_{JR_{k,n}^{II}}(i, j; \mathbf{p}) = I_{JR_{k,n+1}^{II}}(i, j; \mathbf{p}).$$

(ج) برای  $\frac{k-1-a}{n} < p < \frac{k-1+a}{n}$ ، خواهیم داشت

$$I_{JR_{k,n}^{II}}(i, j; \mathbf{p}) > I_{JR_{k,n+1}^{II}}(i, j; \mathbf{p}).$$

### ۱.۵ علامت $JRI$ برای سه جزء

برقرار است:

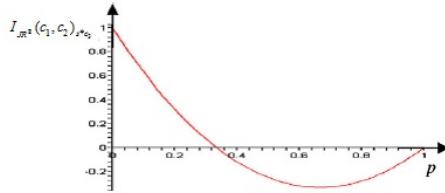
$$I_{JRI}^{III}(c_1, c_2, c_3) = 6p^5 - 6p + 1,$$

$$I_{JRI}^{II}(c_1, c_2)_{s-c_3} = 2p - 3p^2,$$

$$I_{JRI}^{II}(c_1, c_2)_{s*c_3} = I_{JRI}^{III}(c_1, c_2, c_3) +$$

$$I_{JRI}^{II}(c_1, c_2)_{s-c_3} = 1 - 4p + 3p^2.$$

شکل ۵،  $I_{JRI}^{II}(c_1, c_2)_{s*c_3}$  را برای مقادیر مختلف  $p$  نشان می‌دهد.



شکل ۵.  $I_{JRI}^{II}(c_1, c_2)_{s*c_3}$  برای سیستم ۳ از ۵

از شکل ۵ نتایج زیر حاصل می‌شود.

□ اگر  $\varphi \in [0, \frac{1}{3})$  آن گاه  $I_{JRI}^{II}(c_1, c_2)_{s*c_3} > 0$ . بنا بر

این،  $I_B(c_1)_{s*c_3*c_2} > I_B(c_1)_{s*c_3-c_2}$

یعنی، در یک سیستم ۳ از ۵ برای  $\varphi \in [0, \frac{1}{3})$  جزء  $c_1$  در صورت فعال بودن  $c_2$  و  $c_3$  اهمیت بیشتری دارد نسبت به زمانی که  $c_3$  فعال و  $c_2$  غیرفعال باشد.

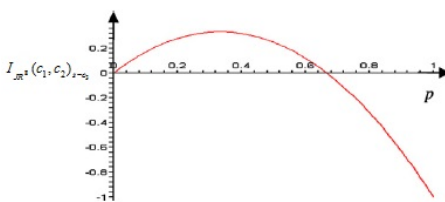
□ اگر  $\varphi \in (\frac{1}{3}, 1)$  آن گاه  $I_{JRI}^{II}(c_1, c_2)_{s*c_3} < 0$ . بنا

بر این،  $I_B(c_1)_{s*c_3*c_2} < I_B(c_1)_{s*c_3-c_2}$ . یعنی به‌ازای  $\varphi \in (\frac{1}{3}, 1)$  جزء  $c_1$  در صورت غیرفعال بودن  $c_2$  و فعال بودن  $c_3$  اهمیت بیشتری دارد نسبت به زمانی که  $c_2$  و  $c_3$  هر دو فعال باشند.

□ اگر  $\varphi = \frac{1}{3}$  آن گاه  $I_{JRI}^{II}(c_1, c_2)_{s*c_3} = 0$ . یعنی به‌ازای

$\varphi = \frac{1}{3}$  اهمیت جزء  $c_1$  در دو حالتی که  $c_2$  و  $c_3$  هر دو فعال یا  $c_2$  غیرفعال و  $c_3$  فعال باشد، یکسان است.

شکل ۶،  $I_{JRI}^{II}(c_1, c_2)_{s-c_3}$  را برای مقادیر مختلف  $p$  نشان می‌دهد.



شکل ۶.  $I_{JRI}^{II}(c_1, c_2)_{s-c_3}$  برای سیستم ۳ از ۵

از این شکل، نتایج ذیل حاصل می‌شود.

در نتیجه ذیل از قضیه ۲.۵، به بررسی حالات خاصی می‌پردازیم که بر اساس آن می‌توان علامت  $JRI$  سه جزء را بدون محاسبه تعیین کرد.

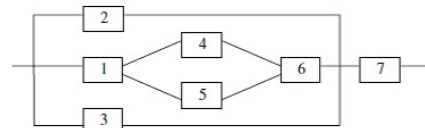
نتیجه ۳.۵. الف) اگر اجزای  $c_2$  و  $\{c_1, c_2\}$  موازی باشند، در صورتی که  $c_1$  و  $c_2$  با یکدیگر در حالت موازی باشند، آن گاه  $I_{JRI}^{III}(c_1, c_2, c_3) \geq 0$ .

ب) اگر اجزای  $c_3$  و  $\{c_1, c_2\}$  موازی باشند، در صورتی که  $c_1$  و  $c_2$  با یکدیگر در حالت متوالی باشند، آن گاه  $I_{JRI}^{III}(c_1, c_2, c_3) \leq 0$ .

ج) اگر اجزای  $c_3$  و  $\{c_1, c_2\}$  متوالی باشند، در صورتی که  $c_1$  و  $c_2$  با یکدیگر در حالت موازی باشند، آن گاه  $I_{JRI}^{III}(c_1, c_2, c_3) \leq 0$ .

د) اگر اجزای  $c_3$  و  $\{c_1, c_2\}$  متوالی باشند، در صورتی که  $c_1$  و  $c_2$  با یکدیگر در حالت متوالی باشند، آن گاه  $I_{JRI}^{III}(c_1, c_2, c_3) \geq 0$ .

مثال ۴.۵. یک سیستم متوالی-موازی شامل ۷ جزء  $i.i.d.$  با قابلیت اعتماد یکسان  $p$  با ساختار شکل ۴ را در نظر بگیرید.



شکل ۴. سیستم مثال ۴.۵

اجزای  $c_2$  و  $\{c_1, c_6\}$  در حالت موازی و  $c_1$  و  $c_6$  با یکدیگر در حالت متوالی هستند. لذا، بر اساس قسمت (ب) از نتیجه ۳.۵ داریم  $I_{JRI}^{III}(c_1, c_2, c_6) \leq 0$ . اجزای  $c_2$  و  $\{c_1, c_2\}$  در حالت موازی و  $c_1$  و  $c_2$  نیز با یکدیگر در حالت موازی هستند. بنا بر این، طبق قسمت (الف) از نتیجه ۳.۵ داریم  $I_{JRI}^{III}(c_1, c_2, c_3) \geq 0$ .

### ۲.۵ $JRI$ سه جزء در سیستم‌های $k$ از $n$

گائو و همکاران [۴]، اندازه اهمیت توأم سه جزء را در سیستم‌های  $k$  از  $n$  مطالعه کردند و برای حالتی که اجزای  $i.i.d.$  هستند، صورت بسته‌ای برای  $JRI$  به دست آوردند.

مثال ۵.۵. یک سیستم ۳ از ۵ را در نظر بگیرید. با فرض آن که قابلیت اعتماد همه اجزای یکسان و برابر  $p$  باشد، روابط زیر

بر اساس قضیه فوق، در صورتی که  $p < \frac{2}{n-1}$  باشند، آن گاه افزایش  $n$  سبب کاهش اثر توأم سه جزء در قابلیت اعتماد سیستم می شود.

در ادامه به مثالی در این زمینه توجه فرمایید.

**مثال ۷.۵.** برای سیستم ۳ از  $n$  با  $n$  های متفاوت،  $I_{JRI}^{III}(c_1, c_2, c_3)$  را برای حالت های زیر، محاسبه می کنیم.

$$k = 3, \quad n = 5,$$

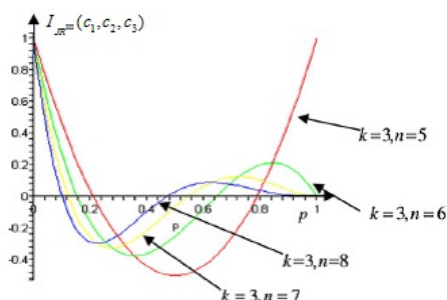
$$k = 3, \quad n = 6,$$

$$k = 3, \quad n = 7,$$

$$k = 3, \quad n = 8.$$

با توجه به شکل ۷، به ازای مقدار ثابت  $k = 3$  و مقادیر مختلف  $p \in (0, 1)$  به وضوح مشاهده می کنیم که برای  $p < \frac{2}{n-1}$  داریم:

$$I_{JRI}^{III}(c_1, c_2, c_3) > I_{JRI}^{III}(c_1, c_2, c_3).$$



شکل ۷.  $I_{JRI}^{III}(c_1, c_2, c_3)$  سیستم های ۳ از  $n$

□ به ازای  $p \in [0, \frac{2}{n-1})$

$$I_{JRI}^{II}(c_1, c_2)_{s-c_3} > \circ$$

بنا بر این،  $I_B(c_1)_{s-c_3*c_2} > I_B(c_1)_{s-c_3-c_2}$  یعنی به ازای  $p \in [0, \frac{2}{n-1})$  جزء  $c_1$  در صورت فعال بودن  $c_2$  و غیرفعال بودن  $c_3$  اهمیت بیشتری دارد نسبت به زمانی که  $c_2$  و  $c_3$  هر دو غیرفعال باشند.

□ به ازای  $p \in (\frac{2}{n-1}, 1)$

$$I_{JRI}^{II}(c_1, c_2)_{s-c_3} < \circ$$

بنا بر این،  $I_B(c_1)_{s-c_3*c_2} < I_B(c_1)_{s-c_3-c_2}$  یعنی به ازای  $p \in (\frac{2}{n-1}, 1)$  جزء  $c_1$  در صورت غیرفعال بودن  $c_2$  و  $c_3$  اهمیت بیشتری دارد نسبت به زمانی که  $c_2$  فعال و  $c_3$  غیرفعال باشد.

□ به ازای  $p = \frac{2}{n-1}$

$$I_{JRI}^{II}(c_1, c_2)_{s-c_3} = \circ$$

یعنی به ازای  $p = \frac{2}{n-1}$  اهمیت جزء  $c_1$  در دو حالتی که  $c_2$  و  $c_3$  هر دو غیرفعال یا  $c_2$  فعال و  $c_3$  غیرفعال باشند، یکسان است.

قضیه زیر تأثیر افزایش سطح افزونگی را در یک سیستم ۳ از  $n$  بر روی  $JRI$  سه جزء نشان می دهد.

**قضیه ۵.۶.** در یک سیستم ۳ از  $n$ ، اگر  $p < \frac{2}{n-1}$  باشند، آن گاه

$$I_{JRI}^{III}(c_1, c_2, c_3) > I_{JRI}^{III}(c_1, c_2, c_3).$$

## مراجع

[۱] اسدی، مجید (۱۳۹۲)، آشنایی با نظریه قابلیت اعتماد. تهران: مرکز نشر دانشگاهی.

[2] Armstrong, M. J. (1995). Joint reliability-importance of components. *IEEE Transactions on Reliability*, **44**, 408–412.

[3] Birnbaum, Z. W. (1969). On the importance of different components in a multicomponent system. In: Krishnaiah, P. R., ed. *Multivariate Analysis II*. New York: Academic Press, pp. 581–592.

[4] Gao, X., Cui, L. and Li, J. (2007). Analysis for joint importance of components in a coherent system. *European Journal of Operational Research*, **182**, 282–299.

[5] Hagstrom, J. N. (1990). *Redundancy, substitutes and complements in system reliability*. Technical report, College of Business Administration, University of Illinois.

- [6] Hong, J. S. and Lie, C. H. (1993). Joint reliability-importance of two edges in an undirected network. *IEEE Transactions on Reliability*, **42**, 17–33.
- [7] Hong, J. S., Koo, H. Y. and Lie C. H. (2002). Joint reliability-importance of  $k$ -out-of- $n$  systems. *European Journal of Operational Research*, **142**, 539–547.
- [8] Jan, S. and Chang, H. W. (2006). *Joint reliability importance of  $k$ -out-of- $n$  systems and series-parallel systems*. Proceedings of PDPTA'06, pp. 395–398.
- [9] Kuo, W. and Zhu, X. (2012). *Importance Measures in Reliability, Risk, and Optimization: Principles and Applications*. Wiley, New York.
- [10] Wu, S. (2005). Joint importance of multistate systems. *Computers and Industrial Engineering*, **49**, 63–75.
- [11] Xie, M. and Lai, C. D. (1996). Exploiting symmetry in the reliability analysis of coherent systems. *Naval Research Logistics*, **43**, 1025–1034.