فواصل اطمینان فازی برای میانگین متغیرهای تصادفی فازی

جلال چاچی[۱]

چکیده

در این مقاله یک روش جدید برای به‌دست آوردن فواصل اطمینان دوطرفه و یک‌سطرفه فازی برای پارامتر فازی و براساس متغیرهای تصادفی فازی معرفی می‌شود. داده‌های استفاده شده در ساخت چنین فواصل اطمینانی، مشاهدات متغیرهای تصادفی فازی نرمال هستند. این روش، مبتنی بر به‌کارگیری روش‌های معمول به‌دست آوردن فواصل اطمینان دوطرفه و یک‌طرفه برای پارامترهایی است، که از $h-$ برش‌های پارامتر فازی به‌دست می‌آیند. در ساخت فواصل اطمینان معمولی از داده‌هایی که از $h-$ برش‌های مشاهدات فازی به‌دست می‌آیند، استفاده می‌شود. با ترکیب این فواصل اطمینان، یک ناحیه اطمینان به‌دست می‌آید. سپس معیاری برای عضویت هر پارامتر فازی در فاصله اطمینان فازی معرفی می‌شود. مقدار این عضویت متناسب با اشتراکی است که تابع عضویت هر پارامتر فازی با ناحیه اطمینان به‌وجود می‌آورد. روش پیشنهادی، در دو مثال کاربردی و عددی مورد استفاده قرار گرفته و تشریح شده است.

واژه‌های کلیدی: متغیر تصادفی فازی، متغیر تصادفی فازی نرمال، فاصله اطمینان، فاصله اطمینان فازی.
رده‌بندی موضوعی (MSC2000): 03E72, 60D05, 62F25

۱ مقدمه

نظریه برآوردیابی فاصله‌ای یک شاخه اصلی و مهم در استنباط آماری است. روش‌های رایج در برآوردهای فاصله‌ای، مبتنی بر مجموعه‌ای از مفروضات اساسی می‌باشند، مانند: دقیق بودن (و دقیق گزارش شدن) مشاهدات، دقیق بودن مقدار پارامتر مجهول، کافی بودن اندازه نمونه، مفروضات مربوط به توزیع جامعه، و .... در عمل گاهی یک یا چند فرض از این مفروضات برقرار نیستند، یا این‌که نمی‌توان (مثلا به دلیل کوچک بودن اندازه نمونه) از برقراری آن‌ها اطمینان حاصل کرد.

استفاده از نظریه مجموعه‌های فازی کمک می‌کند تا بتوان در برخی از شرایط فوق، به‌ویژه حالت‌هایی که با مشاهدات و/یا پارامترها و/یا متغیرهای نادقیق روبرو هستیم، شیوه‌های مناسبی را جایگزین نمود. یکی از این موارد، که موضوع این مقاله است، حالتی است که مقادیر متغیر تصادفی، مقادیر نادقیق هستند و لذا در عمل با مشاهدات نادقیق/مبهم/فازی روبرو هستیم، و از طرفی می‌خواهیم برای یک پارامتر فازیِ جامعه فاصله اطمینان بیابیم. در واقع تفاوت کار با حالت معمولی این است که در اینجا با دو منبع عدم اطمینان مواجه هستیم: عدم اطمینان احتمالی (ناشی از انتخاب نمونه به جای بررسی کل جامعه و/یا منسوب به نوع مدل احتمالی زیربنایی) و عدم اطمینان امکانی/فازی ناشی از ابهام و عدم قطعیت در مقادیر مشاهدات و/یا پارامتر فازیِ جامعه. در این مقاله، شیوه‌ای جدید برای تشکیل فاصله اطمینان برای یک پارامتر فازی و بر اساس مشاهدات فازی ارایه می‌دهیم. نخست مروری کوتاه بر مطالعات صورت گرفته در موضوع فواصل اطمینان در محیط فازی انجام می‌دهیم.

[۱] دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی اصفهان $j.chachi@math.iut.ac.ir$

فیتل [۵] به استنباط درباره پارامتر حقیقی مقدار θ، بر پایه‌ی داده‌های فازی می‌پردازد. وی نخست، با استفاده از اصل گسترش و برآوردگرهای مبتنی بر داده‌های حقیقی، برآوردگرهای فازی را برای θ و بر پایه‌ی داده‌های فازی معرفی می‌کند. آن‌گاه با استفاده از یک فاصله اطمینان معمولی برای θ و بر پایه یک نمونه تصادفی از f_θ، یک ناحیه اطمینان فازی را برای θ معرفی می‌کند. این فاصله اطمینان یک مجموعه فازی از فضای پارامتر Θ است. وو [۷] بر اساس متغیرهای تصادفی فازی، روشی برای ساختن فواصل اطمینان فازی برای پارامتر مجهول فازی ارایه داده است، که در آن از نوعی ترتیب برای اعداد فازی استفاده شده است. اسکریانس [۴] روشی برای یافتن بازه‌های اطمینان برای مدل‌های فازی با تاکید بر کاربرد آن‌ها در کنترل فرآیند و تشخیص خطا ارایه داده است که مبتنی بر مدل‌های اگر—آن‌گاه فازی و برخی شیوه‌های آماری است. رمضانی و همکاران [۳] در مطالعه‌ای در زمینه کنترل کیفیت، با تعریف حدود مشخصه فازی، چهار ناحیه اطمینان مجانبی برای یک شاخص عملکرد فرآیند معرفی کرده‌اند. همان‌گونه که گفته شد، در این مقاله، روش جدیدی را برای به‌دست آوردن فواصل اطمینان فازی برای پارامتر مجهول فازی مطرح می‌کنیم. تاکید ما بر یافتن فواصل اطمینان برای میانگین متغیرهای تصادفی فازی نرمال است، گرچه این روش را می‌توان برای سایر موارد نیز به‌کار برد.

این مقاله به‌صورت زیر تدوین شده است: در بخش دوم، به بیان مفاهیم و تعاریف مورد نیاز از نظریه مجموعه‌های فازی، اعداد فازی، متغیرهای تصادفی فازی و متغیرهای تصادفی فازی نرمال می‌پردازیم. در بخش سوم، نحوه به‌دست آوردن فواصل اطمینان فازی دوطرفه، یک‌طرفه راست و یک‌طرفه چپ را ذکر می‌کنیم. در بخش چهارم، با بیان دو مثال عددی به تشریح روش پیشنهاد شده می‌پردازیم. بخش پنجم اختصاص به مقایسه‌ای کوتاه بین روش پیشنهادیِ این مقاله و چند روش دیگر در این زمینه دارد، و در بخش ششم به نتیجه‌گیری پرداخته‌ایم.

۲ مفاهیم و تعاریف

۱.۲ مجموعه‌ها و اعداد فازی

فرض کنید $\mathbb{X}$ یک مجموعه مرجع باشد. مجموعه فازی $\tilde{A}$ از $\mathbb{X}$ با تابع عضویت $\tilde{A}:\mathbb{X}\to[۰,۱]$ مشخص می‌شود. برای هر $h\in(۰,۱]$، $h-$ برش مجموعه فازی $\tilde{A}$ به‌صورت $\tilde{A}_h=\{x\in\mathbb{X}\,|\,\tilde{A}(x)\geq h\}$ تعریف می‌شود و $\tilde{A}_۰$ بستار مجموعه $\{x\in\mathbb{X}\,|\,\tilde{A}(x)>۰\}$ است. مجموعه فازی $\tilde{A}$ نرمال نامیده می‌شود هرگاه برای دست کم یک عضو $x\in\mathbb{X}$، $\tilde{A}(x)=۱$. در این مقاله فرض می‌شود مجموعه مرجع، مجموعه اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ باشد.

مجموعه فازی $\tilde{N}$ از $\mathbb{R}$ را یک عدد فازی گوییم، هرگاه $\tilde{N}$ یک مجموعه فازی نرمال با تابع عضویت نیم‌پیوسته بالایی باشد (یعنی برای هر $h\in\mathbb{R}$ مجموعه $\{x\in\mathbb{R}\,|\,f(x)\geq h\}$ بسته باشد) و برای هر $h\in(۰,۱]$، مجموعه‌های $\tilde{N}_h$ کران‌دار باشند. مجموعه تمام اعداد فازی از $\mathbb{R}$ را با $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ نشان می‌دهیم.

حالت خاص و مهمی از عدد فازی، عدد فازی مثلثی است که با نماد $\tilde{N}=(n,s_l,s_r)_T$ نشان داده می‌شود، که در آن n، s_l و s_r به‌ترتیب نشان دهنده مرکز، پهنای چپ و پهنای راست هستند. عدد فازی مثلثی $\tilde{N}$ بیان کننده مفهوم حدوداً n (یا تقریباً n) است. تابع عضویت و $h-$برش‌های عدد فازی مثلثی $\tilde{N}$ به‌صورت زیر است

$$\tilde{N}(x)=\frac{x-(n-s_l)}{s_l}I_{[n-s_l,n)}(x)+\frac{(n+s_r)-x}{s_r}I_{[n,n+s_r]}(x),$$

$$\tilde{N}_h=[n_h^l,n_h^u]=[n-(۱-h)s_l,n+(۱-h)s_r],$$

که در آن I_A تابع نشان‌گر مجموعه معمولی A است. در این مقاله از اعداد فازی مثلثی استفاده شده است. البته بنا به زمینه

مورد بحث و/یا نوع مشاهدات یک آزمایش می‌توان از انواع دیگر اعداد فازی استفاده نمود.

با استفاده از اصل گسترش، حساب اعداد فازی به‌صورت $(\tilde N \odot \tilde M)(z) = \sup_{x,y:x\circ y=z} \min\{\tilde N(x), \tilde M(y)\}$ تعریف می‌شود، که $\odot$ یکی از اعمال حسابی تعمیم یافته $\oplus$، $\otimes$، $\ominus$ و $\oslash$ است و $\circ$ به‌ترتیب یکی از اعمال حسابی $+$، $\times$، $-$ و $\div$ است. به‌ویژه اگر $\tilde N$ و $\tilde M$ دو عدد فازی باشند، آن‌گاه $\tilde N \oplus \tilde M$ یک عدد فازی است و طبق حساب بازه‌ای برای هر $h \in [0,1]$، $(\tilde N \oplus \tilde M)_h = [n_h^l + m_h^l, n_h^u + m_h^u]$. برای مطالعه بیشتر در مورد مجموعه‌های فازی و حساب اعداد فازی به [۸] مراجعه کنید.

۲.۲ متغیرهای تصادفی فازی

فرض کنید $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ یک فضای احتمال، $\mathcal{X} : \Omega \to \mathcal{F}(\mathbb{R})$ یک تابع فازی مقدار و $X \sim f_{\underline{\theta}}$ یک متغیر تصادفی حقیقی مقدار با پارامتر $\underline{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_p) \in \mathbb{R}^p$ باشند. هم‌چنین فرض کنید کلیه متغیرهای تصادفی، بر فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ تعریف شوند.

تابع فازی مقدار $\mathcal{X} : \Omega \to \mathcal{F}(\mathbb{R})$ را یک متغیر تصادفی فازی گوییم، اگر و فقط اگر برای هر $h \in [0,1]$، توابع $X_h^l : \Omega \to \mathbb{R}$ و $X_h^u : \Omega \to \mathbb{R}$ متغیرهای تصادفی حقیقی مقدار باشند (که در آن $(\forall \omega \in \Omega;\ \mathcal{X}(\omega)_h = [X_h^l(\omega), X_h^u(\omega)])$ [۲]. متغیرهای تصادفی فازی $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ را هم‌توزیع گوییم اگر برای هر $h \in [0,1]$، $X_h^l \overset{D}{=} Y_h^l$ و $X_h^u \overset{D}{=} Y_h^u$، و آن‌ها را مستقل گوییم هرگاه هر عضو مجموعه $\{X_h^l, X_h^u \,|\, h \in [0,1]\}$ از هر عضو مجموعه $\{Y_h^l, Y_h^u \,|\, h \in [0,1]\}$ مستقل باشد [۷]. متغیر تصادفی فازی $\mathcal{X}$ را هم‌توزیع با متغیر تصادفی X با پارامتر فازی $\underline{\tilde\theta} = (\tilde\theta_1, \ldots, \tilde\theta_p)$ گوییم، هرگاه برای هر $h \in [0,1]$، $X_h^l \sim f_{\underline{\theta}_h^l}$ و $X_h^u \sim f_{\underline{\theta}_h^u}$، که در آن‌ها، $\underline{\theta}_h^l = (\theta_{1h}^l, \ldots, \theta_{ph}^l)$، $\underline{\theta}_h^u = (\theta_{1h}^u, \ldots, \theta_{ph}^u)$ و $\tilde\theta_{jh} = [\theta_{jh}^l, \theta_{jh}^u]$، $j = 1, \ldots, p$ [۷].

برای مثال، $\mathcal{X}$ دارای توزیع نرمال با میانگین فازی $\tilde\theta$ و واریانس فازی $\tilde\sigma^2$ است، هرگاه برای هر $h \in [0,1]$، $X_h^l \sim N(\theta_h^l, \sigma_h^{2l})$ و $X_h^u \sim N(\theta_h^u, \sigma_h^{2u})$. در این حالت، اصطلاحا گوییم $\mathcal{X}$ دارای توزیع $N(\tilde\theta, \tilde\sigma^2)$ است و می‌نویسیم $\mathcal{X} \sim N(\tilde\theta, \tilde\sigma^2)$.

تعریف ۱ (نیز رک به [۷]) گوییم $\underline{\mathcal{X}} = (\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_n)$ یک نمونه تصادفی فازی nتایی از توزیع نرمال با میانگین فازی $\tilde\theta$ و واریانس فازی $\tilde\sigma^2$ است، هرگاه $\mathcal{X}_i$ها متغیرهای تصادفی فازی مستقل و هم‌توزیع از توزیع نرمال با میانگین فازی $\tilde\theta$ و واریانس فازی $\tilde\sigma^2$ باشند. در این حالت می‌نویسیم $\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_n \overset{i.i.d.}{\sim} N(\tilde\theta, \tilde\sigma^2)$.

نتیجه ۲ فرض کنید $\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_n \overset{i.i.d.}{\sim} N(\tilde\theta, \tilde\sigma^2)$، آن‌گاه برای هر $h \in [0,1]$، $X_{1h}^l, \ldots, X_{nh}^l \overset{i.i.d.}{\sim} N(\theta_h^l, \sigma_h^{2l})$ و $X_{1h}^u, \ldots, X_{nh}^u \overset{i.i.d.}{\sim} N(\theta_h^u, \sigma_h^{2u})$. در حالتی که $\tilde\sigma^2 = I_{\{\sigma^2\}}$، یعنی واریانس یک مقدار دقیق باشد، برای هر $h \in [0,1]$، $X_{1h}^l, \ldots, X_{nh}^l \overset{i.i.d.}{\sim} N(\theta_h^l, \sigma^2)$ و $X_{1h}^u, \ldots, X_{nh}^u \overset{i.i.d.}{\sim} N(\theta_h^u, \sigma^2)$. در این حالت می‌نویسیم $\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_n \overset{i.i.d.}{\sim} N(\tilde\theta, \sigma^2)$.

۳ فواصل اطمینان فازی برای پارامتر فازی $\tilde\theta$

در این بخش می‌خواهیم مفهوم فاصله اطمینان را به حالتی که پارامتر مورد نظر فازی باشد و نمونه حاصله نیز بر اساس مقادیر متغیر تصادفی فازی باشد، تعمیم دهیم. به‌ویژه براساس نمونه تصادفی فازی $\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_n$ از توزیع $N(\tilde\theta, \sigma^2)$ با واریانس معلوم σ^2، به بررسی فواصل اطمینان دوطرفه و یک‌طرفه (راست و چپ) فازی برای پارامتر فازی $\tilde\theta$ در سطح اطمینان $100(1-\alpha)\%$ می‌پردازیم.

۱.۳ فاصله اطمینان دوطرفه فازی برای $\tilde{\theta}$

فرض کنید $\mathcal{X}_{۱},\ldots,\mathcal{X}_n \overset{i.i.d.}{\sim} N(\tilde{\theta},\sigma^{۲})$. می‌خواهیم یک فاصله اطمینان دوطرفه برای $\tilde{\theta}$ تشکیل دهیم. نخست رده‌ای از فواصل اطمینان برای نقاط ابتدایی و انتهایی h–برش‌های پارامتر فازی $\tilde{\theta}$، یعنی $\tilde{\theta}_h=[\theta_h^l,\theta_h^u]$، تشکیل می‌دهیم. طبق نتیجه ۲، برای هر $h\in[۰,۱]$ داریم

$$X_{۱h}^l,\ldots,X_{nh}^l \overset{i.i.d.}{\sim} N(\theta_h^l,\sigma^{۲}), \qquad (۱)$$
$$X_{۱h}^u,\ldots,X_{nh}^u \overset{i.i.d.}{\sim} N(\theta_h^u,\sigma^{۲}).$$

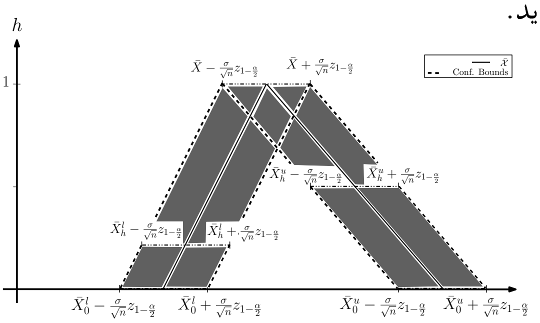
اکنون فواصل اطمینان $۱۰۰(۱-\alpha)\%$ با دم‌های برابر برای پارامترهای θ_h^l و θ_h^u براساس دو نمونه بالا به‌صورت زیر حاصل می‌شوند

$$S_T\left(\underline{X}_h^l\right)=\left[\bar{X}_h^l-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{۱-\frac{\alpha}{۲}},\bar{X}_h^l+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{۱-\frac{\alpha}{۲}}\right], \quad (۲)$$
$$S_T\left(\underline{X}_h^u\right)=\left[\bar{X}_h^u-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{۱-\frac{\alpha}{۲}},\bar{X}_h^u+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{۱-\frac{\alpha}{۲}}\right], \quad (۳)$$

که در آن‌ها $\bar{X}_h^l=\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^n X_{ih}^l$، $\bar{X}_h^u=\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^n X_{ih}^u$ و z_α چندک مرتبه αام توزیع نرمال استاندارد است. بنابراین می‌توانیم رده‌ی فواصل اطمینان $۱۰۰(۱-\alpha)\%$ با دم‌های برابر را برای پارامترهای θ_h^l و θ_h^u به‌صورت زیر تشکیل دهیم

$$\left\{\left[\bar{X}_h^l-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{۱-\frac{\alpha}{۲}},\bar{X}_h^l+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{۱-\frac{\alpha}{۲}}\right] \mid h\in[۰,۱]\right\},$$
$$\left\{\left[\bar{X}_h^u-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{۱-\frac{\alpha}{۲}},\bar{X}_h^u+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{۱-\frac{\alpha}{۲}}\right] \mid h\in[۰,۱]\right\}.$$

شکل ۱ نمودار رده‌ی فواصل اطمینان فوق برای پارامترهای θ_h^l و θ_h^u، را به‌ازای همه مقادیر $h\in[۰,۱]$ نشان می‌دهد، که در آن $\bar{\mathcal{X}}=\frac{۱}{n}\otimes(\mathcal{X}_۱\oplus\cdots\oplus\mathcal{X}_n)$، $\bar{\mathcal{X}}_h=[\bar{X}_h^l,\bar{X}_h^u]$ و $\bar{X}=[\bar{X}_۱^l,\bar{X}_۱^u]$. در این نمودار، به هر فاصله اطمینان (۲) و (۳)، ارتفاع h متناظر با آن داده شده است. دقت کنید که در بحث بالا، در هر سطح h یک فاصله اطمینان برای پارامتر θ_h^l و یک فاصله اطمینان برای پارامتر θ_h^u به‌دست آورده‌ایم، که با روی هم گذاشتن آنها نوار خاکستری رنگ شکل ۱ به‌دست می‌آید.



شکل ۱. رده‌ی فواصل اطمینان $۱۰۰(۱-\alpha)\%$ دوطرفه.

در ادامه، هدف آن است که مفهوم فاصله اطمینان دوطرفه را به حالتی که پارامتر و متغیرهای تصادفی، فازی باشند تعمیم دهیم. نخست یادآور می‌شویم که در حالت معمولی (مشاهدات دقیق و پارامتر دقیق) با داشتن یک فاصله اطمینان می‌توانیم ادعا کنیم که آن فاصله اطمینان با احتمال خاصی (سطح اطمینان مربوطه) مقدار مجهول پارامتر را در بر دارد. اما اگر داده‌ها فازی و پارامتر نیز فازی باشد، باید روش معمولی را به‌گونه‌ای مناسب و بر اساس عضویت یک عدد فازی (یک مقدار خاص برای پارامتر فازی) در یک مجموعه فازی (مجموعه فاصله اطمینان فازی) تعریف کنیم. پس مناسب است که این نوع فاصله اطمینان را به‌صورت مجموعه فازی $\tilde{C}_T=\left\{(\tilde{\theta},\tilde{C}_T(\tilde{\theta}))\mid \tilde{\theta}\in\mathcal{F}(\Theta)\right\}$ معرفی کنیم. برای این کار باید میزان عضویت هر پارامتر فازی $\tilde{\theta}$ را در مجموعه فازی فوق (یعنی مقدار $(\tilde{C}_T(\tilde{\theta}))$ تعیین کنیم.

برای این منظور، واضح است که اگر $\tilde{\theta}$ به‌گونه‌ای باشد که برای هر $h\in[۰,۱]$، روابط زیر برقرار باشند

$$\theta_h^l\in S_T\left(\underline{X}_h^l\right), \qquad \theta_h^u\in S_T\left(\underline{X}_h^u\right), \qquad (۴)$$

آن‌گاه $\tilde{\theta}$ با درجه یک متعلق به فاصله اطمینان $\tilde{C}_T$ است، یعنی $C_T(\tilde{\theta})=۱$ و اگر برای هیچ یک از مقادیر $h\in[۰,۱]$ (یا حداکثر تعداد شمارش‌پذیری از مقادیر h در بازه $[۰,۱]$)

روابط (۴) برقرار نباشند، آن‌گاه $\tilde{\theta}$ متعلق به فاصله اطمینان $\tilde{C}_T$ نیست، یعنی $\tilde{C}_T(\tilde{\theta}) = 0$. اما برای $\tilde{\theta} \in \mathcal{F}(\Theta)$ی انتخاب شده، روابط (۴) ممکن است برای بعضی hها در $[0, 1]$ برقرار باشند، لذا $\tilde{\theta}$ به‌طور جزیی متعلق به فاصله اطمینان $\tilde{C}_T$ است، یعنی $0 < \tilde{C}_T(\tilde{\theta}) < 1$.

در ادامه قصد داریم تا تابع عضویت $\tilde{C}_T(\cdot)$ را برای فاصله اطمینان دوطرفه فازی $\tilde{C}_T$، تعریف کنیم. فرض کنید

$$
\begin{aligned}
K^l_{\tilde{\theta};\alpha} &= \left\{h \in [0, 1] \,|\, \theta^l_h \in \left[\bar{X}^l_h - \tfrac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}, \bar{X}^l_h + \tfrac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]\right\},\\
C^l_{1;\tilde{\theta};\alpha} &= \left\{h \in [0, 1] \,|\, \theta^l_h < \bar{X}^l_h - \tfrac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right\},\\
C^l_{2;\tilde{\theta};\alpha} &= \left\{h \in [0, 1] \,|\, \theta^l_h > \bar{X}^l_h + \tfrac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right\},\\
K^u_{\tilde{\theta};\alpha} &= \left\{h \in [0, 1] \,|\, \theta^u_h \in \left[\bar{X}^u_h - \tfrac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}, \bar{X}^u_h + \tfrac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]\right\},\\
C^u_{1;\tilde{\theta};\alpha} &= \left\{h \in [0, 1] \,|\, \theta^u_h < \bar{X}^u_h - \tfrac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right\},\\
C^u_{2;\tilde{\theta};\alpha} &= \left\{h \in [0, 1] \,|\, \theta^u_h > \bar{X}^u_h + \tfrac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S^l &= \int_{h \in C^l_{1;\tilde{\theta};\alpha}} \left[\bar{X}^l_h - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}} - \theta^l_h\right] dh \\
&\quad + \int_{h \in C^l_{2;\tilde{\theta};\alpha}} \left[\theta^l_h - \left(\bar{X}^l_h + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)\right] dh,\\
S^u &= \int_{h \in C^u_{1;\tilde{\theta};\alpha}} \left[\bar{X}^u_h - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}} - \theta^u_h\right] dh \\
&\quad + \int_{h \in C^u_{2;\tilde{\theta};\alpha}} \left[\theta^u_h - \left(\bar{X}^u_h + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)\right] dh,\\
W^l &= \int_{h \in K^l_{\tilde{\theta};\alpha}} \left[\theta^l_h - \left(\bar{X}^l_h - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)\right] dh \\
&\quad + \int_{h \in K^l_{\tilde{\theta};\alpha}} \left[\bar{X}^l_h + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}} - \theta^l_h\right] dh \\
&= 2\frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}} \mathcal{L}\left(K^l_{\tilde{\theta};\alpha}\right),\\
W^u &= \int_{h \in K^u_{\tilde{\theta};\alpha}} \left[\theta^u_h - \left(\bar{X}^u_h - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)\right] dh \\
&\quad + \int_{h \in K^u_{\tilde{\theta};\alpha}} \left[\bar{X}^u_h + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}} - \theta^u_h\right] dh \\
&= 2\frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}} \mathcal{L}\left(K^u_{\tilde{\theta};\alpha}\right).
\end{aligned}
$$

که در آن $\mathcal{L}(A)$ اندازه لبگ مجموعه A است.

تعریف ۲ میزان عضویت $\tilde{\theta}$ در فاصله اطمینان دوطرفه فازی $\tilde{C}_T$، به‌صورت $\tilde{C}_T(\tilde{\theta}) = \frac{W}{W+S}$ تعریف می‌شود، که در آن $W = W^l + W^u$ و $S = S^l + S^u$.

مجموعه‌های $K^l_{\tilde{\theta};\alpha}$ و $K^u_{\tilde{\theta};\alpha}$ به‌ترتیب نمایان‌گر مقادیری از h هستند که برای آن‌ها روابط (۴) برقرار هستند. هر چه این مجموعه‌ها به مجموعه $[0, 1]$ نزدیکتر باشند، یا به‌عبارتی اندازه لبگ آن‌ها به یک نزدیکتر باشد، بدان معنا است که برای hهای بیشتری از بازه $[0, 1]$، روابط (۴) برقرار هستند. منطقی به‌نظر می‌رسد که هر چه برای hهای بیشتری روابط (۴) برقرار باشند، میزان عضویت $\tilde{\theta}$ در فاصله اطمینان $\tilde{C}_T$ بیشتر باشد. این تاثیر مثبت با اندازه لبگ این مجموعه‌ها در تعریف نواحی W^l و W^u منظور شده است.

مجموعه‌های $C^l_{i;\tilde{\theta};\alpha}$ و $C^u_{i;\tilde{\theta};\alpha}$ برای $i = 1, 2$، به‌ترتیب نمایان‌گر مقادیری از h هستند که برای آن‌ها روابط (۴) برقرار نمی‌باشند. این مجموعه‌ها روی هم، نواحی S^l و S^u را برای آن دسته θ^l_h و θ^u_hهایی که در روابط (۴) صدق نمی‌کنند، به‌وجود می‌آورند. این نواحی به‌ترتیب میزان دوری θ^l_h و θ^u_h را از کران‌های ناحیه اطمینان $100(1-\alpha)\%$ تولید شده نشان می‌دهند. این دو ناحیه روی هم ناحیه S را به‌وجود می‌آورند که می‌توان آن را میزان دوری $\tilde{\theta}$ از ناحیه اطمینان $100(1-\alpha)\%$ تعبیر کرد. ناحیه S تاثیر معکوسی در میزان عضویت $\tilde{\theta}$ در فاصله اطمینان $\tilde{C}_T$ دارد. یعنی برای $\tilde{\theta}$ های مختلف، میزان عضویت $\tilde{\theta}$ یی که ناحیه S بزرگتری تولید می‌کند، در فاصله اطمینان $\tilde{C}_T$ کمتر است.

لازم به ذکر است که $K^l_{\tilde{\theta};\alpha} = \left(C^l_{1;\tilde{\theta};\alpha} \cup C^l_{2;\tilde{\theta};\alpha}\right)^c$ و $K^u_{\tilde{\theta};\alpha} = \left(C^u_{1;\tilde{\theta};\alpha} \cup C^u_{2;\tilde{\theta};\alpha}\right)^c$. حال اگر مجموعه‌های $K^l_{\tilde{\theta};\alpha}$ و $K^u_{\tilde{\theta};\alpha}$ تهی (یا حداکثر، شمارش پذیر) باشند، آن‌گاه اندازه لبگ آن‌ها صفر می‌شود که در نتیجه W نیز صفر می‌شود. لذا همان‌گونه که مطرح شد، درجه عضویت $\tilde{\theta}$ در

فاصله اطمینان فازی صفر خواهد شد. از سوی دیگر اگر مجموعه‌های $C^l_{i;\tilde{\theta};\alpha}$ و $C^u_{i;\tilde{\theta};\alpha}$ برای $i = ۱, ۲$، تهی (یا حداکثر، شمارش پذیر) باشند، آن‌گاه مقدار S صفر می‌شود که معادل با این است که درجه عضویت $\tilde{\theta}$ در فاصله اطمینان فازی یک است.

۲.۳ فاصله اطمینان یک‌طرفه راست فازی برای $\tilde{\theta}$

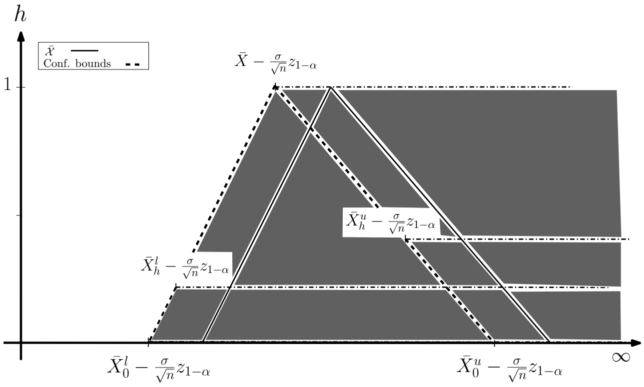
فواصل اطمینان $۱۰۰(۱-\alpha)\%$ یک‌طرفه راست برای پارامترهای θ^l_h و θ^u_h براساس نمونه‌های (۲) به‌ترتیب به‌صورت زیر هستند

$$S_R\left(\underline{X}^l_h\right) = \left[\bar{X}^l_h - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{۱-\alpha}, \infty\right),$$
$$S_R\left(\underline{X}^u_h\right) = \left[\bar{X}^u_h - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{۱-\alpha}, \infty\right).$$

رده‌های فواصل اطمینان $۱۰۰(۱-\alpha)\%$ یک‌طرفه راست برای پارامترهای θ^l_h و θ^u_h به‌ترتیب به‌صورت زیر می‌باشند

$$\left\{\left[\bar{X}^l_h - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{۱-\alpha}, \infty\right) \mid h \in [۰, ۱]\right\},$$
$$\left\{\left[\bar{X}^u_h - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{۱-\alpha}, \infty\right) \mid h \in [۰, ۱]\right\}.$$

شکل ۲ نمودار رده‌ی فواصل اطمینان $۱۰۰(۱-\alpha)\%$ یک‌طرفه راست را برای پارامترهای θ^l_h و θ^u_h نشان می‌دهد.



شکل ۲. رده‌ی فواصل اطمینان $۱۰۰(۱-\alpha)\%$ یک‌طرفه راست.

در ادامه قصد داریم تا مفهوم فاصله اطمینان یک‌طرفه راست را به حالتی که پارامتر و متغیرهای تصادفی، فازی باشند تعمیم دهیم. این فاصله اطمینان فازی به‌صورت مجموعه فازی $\tilde{C}_R = \left\{(\tilde{\theta}, \tilde{C}_R(\tilde{\theta})) \mid \tilde{\theta} \in \mathcal{F}(\Theta)\right\}$ معرفی می‌شود. برای این‌کار باید میزان عضویت هر پارامتر فازی $\tilde{\theta}$، یعنی $\tilde{C}_R(\tilde{\theta})$، را در مجموعه فازی فوق تعیین کنیم. واضح است که، اگر $\tilde{\theta}$ به‌گونه‌ای باشد که برای هر $h \in [۰, ۱]$، روابط زیر برقرار باشند

$$\theta^l_h \in S_R\left(\underline{X}^l_h\right) \quad , \quad \theta^u_h \in S_R\left(\underline{X}^u_h\right), \qquad (۵)$$

آن‌گاه $\tilde{\theta}$ با درجه یک متعلق به فاصله اطمینان $\tilde{C}_R$ است، یعنی $\tilde{C}_R(\tilde{\theta}) = ۱$ و اگر برای هیچ یک از مقادیر $h \in [۰, ۱]$ روابط (۵) برقرار نباشند، آن‌گاه $\tilde{\theta}$ متعلق به فاصله اطمینان $\tilde{C}_R$ نیست، یعنی $\tilde{C}_R(\tilde{\theta}) = ۰$. اما برای $\tilde{\theta} \in \mathcal{F}(\Theta)$ی انتخاب شده، روابط (۵) ممکن است برای بعضی hها در $[۰, ۱]$ برقرار باشند و لذا در این حالت $\tilde{\theta}$ به‌طور جزیی متعلق به فاصله اطمینان $\tilde{C}_R$ است. اکنون فرض کنید

$$K^l_{\tilde{\theta};\alpha} = \left\{h \in [۰, ۱] \,|\, \theta^l_h \geq \bar{X}^l_h - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{۱-\alpha}\right\},$$
$$C^l_{\tilde{\theta};\alpha} = \left\{h \in [۰, ۱] \,|\, \theta^l_h < \bar{X}^l_h - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{۱-\alpha}\right\} = \left(K^l_{\tilde{\theta};\alpha}\right)^c,$$
$$K^u_{\tilde{\theta};\alpha} = \left\{h \in [۰, ۱] \,|\, \theta^u_h \geq \bar{X}^u_h - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{۱-\alpha}\right\},$$
$$C^u_{\tilde{\theta};\alpha} = \left\{h \in [۰, ۱] \,|\, \theta^u_h < \bar{X}^u_h - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{۱-\alpha}\right\} = \left(K^u_{\tilde{\theta};\alpha}\right)^c,$$

$$\begin{aligned}
S &= \int_{h \in C^l_{\tilde{\theta};\alpha}} \left[\bar{X}^l_h - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{۱-\alpha} - \theta^l_h\right] dh \\
&\quad + \int_{h \in C^u_{\tilde{\theta};\alpha}} \left[\bar{X}^u_h - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{۱-\alpha} - \theta^u_h\right] dh, \\
W &= \int_{h \in K^l_{\tilde{\theta};\alpha}} \left[\theta^l_h - \left(\bar{X}^l_h - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{۱-\alpha}\right)\right] dh \\
&\quad + \int_{h \in K^u_{\tilde{\theta};\alpha}} \left[\theta^u_h - \left(\bar{X}^u_h - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{۱-\alpha}\right)\right] dh.
\end{aligned}$$

تعریف ۳ میزان عضویت $\tilde{\theta}$ در فاصله اطمینان یک‌طرفه راست فازی $\tilde{C}_R$، به‌صورت $\tilde{C}_R(\tilde{\theta}) = \frac{W}{W+S}$ تعریف می‌شود.

۳.۳ فاصله اطمینان یک‌طرفه چپ فازی برای $\tilde{\theta}$

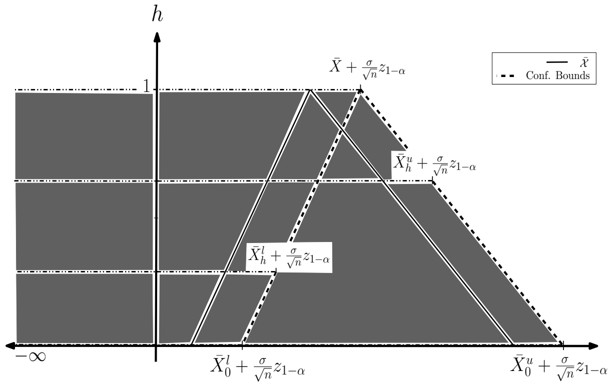
فواصل اطمینان $\%(\alpha - 1)100$ یک‌طرفه چپ برای پارامترهای θ_h^l و θ_h^u براساس نمونه‌های (۲) به‌ترتیب به‌صورت زیر است

$$S_L\left(\underline{X}_h^l\right) = \left(-\infty, \bar{X}_h^l + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha}\right],$$
$$S_L\left(\underline{X}_h^u\right) = \left(-\infty, \bar{X}^u + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha}\right].$$

رده‌های فواصل اطمینان $\%(\alpha - 1)100$ یک‌طرفه چپ برای پارامترهای θ_h^l و θ_h^u به‌ترتیب به‌صورت زیر می‌باشند

$$\left\{\left(-\infty, \bar{X}_h^l + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha}\right] \mid h \in [0, 1]\right\}$$
$$\left\{\left(-\infty, \bar{X}_h^u + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha}\right] \mid h \in [0, 1]\right\}.$$

شکل ۳ نمودار فواصل اطمینان $\%(\alpha - 1)100$ یک‌طرفه راست را برای پارامترهای θ_h^l و θ_h^u نشان می‌دهد. مشابه ایده زیربخش‌های ۱.۳ و ۲.۳، می‌توان تعریف زیر را ارایه کرد.



شکل ۳. رده‌ی فواصل اطمینان $\%(\alpha - 1)100$ یک‌طرفه چپ.

تعریف ۴ فاصله اطمینان یک‌طرفه چپ فازی به‌صورت مجموعه فازی $\tilde{C}_L = \left\{(\tilde{\theta}, \tilde{C}_L(\tilde{\theta})) \mid \tilde{\theta} \in \mathcal{F}(\Theta)\right\}$ با تابع عضویت $\tilde{C}_L(\tilde{\theta}) = \frac{W}{W+S}$ تعریف می‌شود. که در آن

$$K_{\tilde{\theta};\alpha}^l = \left\{h \in [0, 1] \mid \theta_h^l \leq \bar{X}_h^l + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha}\right\},$$
$$K_{\tilde{\theta};\alpha}^u = \left\{h \in [0, 1] \mid \theta_h^u \leq \bar{X}_h^u + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha}\right\},$$

$$\begin{aligned} S &= \int_{h \in C_{\tilde{\theta};\alpha}^l} \left[\theta_h^l - \bar{X}_h^l - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha}\right] dh \\ &\quad + \int_{h \in C_{\tilde{\theta};\alpha}^u} \left[\theta_h^u - \bar{X}_h^u - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha}\right] dh, \\ W &= \int_{h \in K_{\tilde{\theta};\alpha}^l} \left[\bar{X}_h^l + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha} - \theta_h^l\right] dh \\ &\quad + \int_{h \in K_{\tilde{\theta};\alpha}^u} \left[\bar{X}_h^u + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha} - \theta_h^u\right] dh. \end{aligned}$$

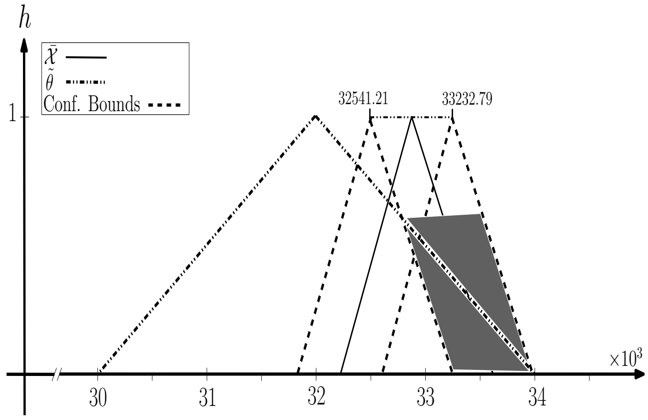
و $C_{\tilde{\theta};\alpha}^l = \left(K_{\tilde{\theta}_\circ;\alpha}^l\right)^c$، $C_{\tilde{\theta};\alpha}^u = \left(K_{\tilde{\theta};\alpha}^u\right)^c$.

۴ مثال‌های عددی

مثال ۱ یک شرکت لاستیک‌سازی می‌خواهد متوسط عمر لاستیکی را که به تازه‌گی تولید کرده است برآورد کند. ۲۴ لاستیک مورد آزمایش واقع می‌شوند. به‌دلیل برخی محدودیت‌ها و نیز عدم تعریف دقیقی برای طول عمر لاستیک، طول عمر لاستیک‌ها (مسافت طی شده بر حسب مایل) به‌صورت اعداد فازی مثلثی زیر گزارش شده‌اند (داده‌ها برگرفته از مرجع [٦] می‌باشند)

(۳۲٦۱۷, ۵۲۴, ٦۳۸)$_T$	(۳۳۹۷۸, ۷۱۲, ۹۱۱)$_T$
(۳۲٦۱۱, ۸۹۱, ۸۸٦)$_T$	(۳۳۰۵۲, ۴٦۷, ۷۳۵)$_T$
(۳۲۴۵۵, ۴۷۸, ۵۷۹)$_T$	(۳۳۴۱۸, ٦۱۲, ۴۹۰)$_T$
(۳۲۴٦٦, ۵۲۳, ۷۴٦)$_T$	(۳۳۴٦۳, ۳٦۸, ٦٦۸)$_T$
(۳۳۰۷۰, ۹۰۱, ۸۹۸)$_T$	(۳۱٦۲۴, ۸۸۱, ۸۳٦)$_T$
(۳۳۵۴۳, ٦۴۳, ۷۹۲)$_T$	(۳۳۱۲۷, ۷۱۲, ۹۴۵)$_T$
(۳۰۸۸۱, ۵۵۴, ۵٦۴)$_T$	(۳۳۲۲۴, ۵۳۷, ٦۸۴)$_T$
(۳۱۵٦۵, ۳۷۸, ٦۷۲)$_T$	(۳۲۵۹۷, ۴۱۲, ۵۸۹)$_T$
(۳۴۰۵۳, ۸۴۵, ۸۲۳)$_T$	(۳۴۰۳٦, ٦۱۳, ۷۳۵)$_T$
(۳۱۸۳۸, ۸۹۳, ۹۰۱)$_T$	(۳۲۵۸۴, ۹۴۵, ۹۵۸)$_T$
(۳۲۸۰۰, ۸٦٦, ٦۴۵)$_T$	(۳۲۲۹۰, ۷۷۹, ۷۷۴)$_T$
(۳۴۱۵۷, ٦۹۳, ۸۱۷)$_T$	(۳۳۸۴۴, ۷۸۴, ٦۰۵)$_T$

با توجه به نتایج و تجربیات قبلی می‌توان فرض کرد که داده‌ها از یک توزیع نرمال فازی با میانگین فازی $\tilde{\theta}$ واریانس ۷۴۷۰۰۰ هستند. می‌خواهیم، برای مثال، میزان عضویت عدد فازی $\tilde{\theta} = (۳۲۰۰۰, ۲۰۰۰, ۲۰۰۰)_T$ را در فواصل اطمینان دوطرفه، یک‌طرفه راست و یک‌طرفه چپ فازی در سطح اطمینان ۹۵٪ به‌دست آوریم.



شکل ۴. توابع عضویت مجموعه‌های فازی در مثال ۱ (حالت دوطرفه).

با استفاده از حساب اعداد فازی، داریم

$$\bar{\mathcal{X}} = (۳۲۸۸۷, ۶۶۷, ۷۴۵)_T,$$

$$\bar{\mathcal{X}}_h = [۳۲۲۲۰ + ۶۶۷h, ۳۳۶۳۲ - ۷۴۵h],$$

$$\tilde{\theta}_h = [۳۰۰۰۰ + ۲۰۰۰h, ۳۴۰۰۰ - ۲۰۰۰h].$$

۱) فاصله اطمینان دوطرفه فازی در سطح اطمینان ۹۵٪

فواصل اطمینان ۹۵٪ دوطرفه برای پارامترهای θ_h^l و θ_h^u به‌ترتیب برابرند با $[۳۱۸۷۴/۲۱ + ۶۶۷h, ۳۲۵۶۵/۷۹ + ۶۶۷h]$ و $[۳۳۲۸۶/۲۱ - ۷۴۵h, ۳۳۹۷۷/۷۹ - ۷۴۵h]$. با توجه به زیربخش ۱.۳، داریم

$$\begin{array}{ll} K^l_{\tilde{\theta};۰/۰۵} = \emptyset, & K^u_{\tilde{\theta};۰/۰۵} = [۰/۰۲, ۰/۵۷], \\ C^l_{۱;\tilde{\theta};۰/۰۵} = [۰, ۱], & C^l_{۲;\tilde{\theta};۰/۰۵} = \emptyset, \\ C^u_{۱;\tilde{\theta};۰/۰۵} = (۰/۵۷, ۱], & C^u_{۲;\tilde{\theta};۰/۰۵} = [۰, ۰/۰۲). \end{array}$$

$$\begin{aligned} S^l &= \int_۰^۱ (۱۸۷۴/۲۱ - ۱۳۳۳h)\, dh = ۱۲۰۷/۷۱, \\ S^u &= \int_{۰/۵۶۸}^۱ (۱۲۵۵h - ۷۱۳/۷۹)\, dh \\ &\quad + \int_۰^{۰/۰۱۸} (۲۲/۲۱ - ۱۲۵۵h)\, dh \\ &= ۱۱۶/۹۰, \end{aligned}$$

$$S = ۱۳۲۴/۶۱ \ , \ W^l = ۰ \ ,$$

$$W^u = ۳۸۰/۳۷ \ , \ W = ۳۸۰/۳۷.$$

بنابراین براساس مشاهدات حاصله، در سطح ۹۵٪، میزان عضویت پارامتر فازی $\tilde{\theta} = (۳۲۰۰۰, ۲۰۰۰, ۲۰۰۰)_T$ در فاصله اطمینان دوطرفه فازی برابر با $\tilde{C}_T(\tilde{\theta}) = ۰/۲۲$ است. به سخن دیگر، بر اساس داده‌های نادقیق فوق و در سطح اطمینان ۹۵٪، به میزان ۲۲٪ امکان دارد (می‌برازد) که مقدار میانگین فازیِ واقعی جامعه، حدوداً ۳۲۰۰۰ (به تعبیر عدد فازی مثلثی بالا) باشد. دقت کنید که میزان عضویت $\tilde{\theta}$ در فاصله اطمینان دوطرفه فازی با توجه به ناحیه خاکستری رنگ نشان داده شده در شکل ۴، منطقی به‌نظر می‌رسد. این ناحیه، آن دسته از θ_h^lها و θ_h^uها (نقاط ابتدایی و انتهایی h–برش‌های پارامتر فازی $\tilde{\theta}$) را مشخص می‌کند که فواصل اطمینان ۹۵٪ آن‌ها را شامل می‌شوند.

۲) فاصله اطمینان یک‌طرفه‌راست فازی درسطح اطمینان ۹۵٪

فواصل اطمینان ۹۵٪ یک‌طرفه راست برای پارامترهای θ_h^l و θ_h^u به‌ترتیب برابراند با $[۳۱۹۲۹/۷۸ + ۶۶۷h, \infty)$ و $[۳۳۳۴۱/۷۸ - ۷۴۵h, \infty)$. با توجه به زیربخش ۲.۳، داریم

$$\begin{array}{ll} K^l_{\tilde{\theta};۰/۰۵} = \emptyset, & K^u_{\tilde{\theta};۰/۰۵} = [۰, ۰/۵۲۴], \\ C^l_{\tilde{\theta};۰/۰۵} = [۰, ۱], & C^u_{\tilde{\theta};۰/۰۵} = (۰/۵۲۴, ۱], \\ S = ۱۴۰۵/۱۷, & W = ۱۷۲/۶۱. \end{array}$$

بنابراین $\tilde{C}_R(\tilde{\theta}) = ۰/۱۱$. یعنی براساس مشاهدات حاصله، در سطح ٪۹۵ میزان عضویت $\tilde{\theta} = (۳۲۰۰۰, ۲۰۰۰, ۲۰۰۰)_T$ در فاصله اطمینان یک‌طرفه راست فازی برابر با ۰/۱۱ است.

۳) **فاصله اطمینان یک‌طرفه چپ فازی در سطح اطمینان ٪۹۵**

فواصل اطمینان ٪۹۵ یک‌طرفه چپ برای پارامترهای θ_h^l و θ_h^u به‌ترتیب برابراند با $(-\infty, ۳۲۵۱۰/۲۲ + ۶۶۷h]$ و $(-\infty, ۳۳۹۲۲/۲۲ - ۷۴۵h]$. با توجه به زیربخش ۳.۳، داریم

$$K^l_{\tilde{\theta};۰/۰۵} = [۰,۱], \qquad K^u_{\tilde{\theta};۰/۰۵} = [۰/۰۶۲,۱],$$
$$C^l_{\tilde{\theta};۰/۰۵} = \emptyset, \qquad C^u_{\tilde{\theta};۰/۰۵} = [۰,۰/۰۶۲),$$
$$S = ۲/۴۱, \qquad W = ۱۷۲۹/۳۵.$$

بنابراین $\tilde{C}_L(\tilde{\theta}) = ۰/۹۹۹$. یعنی براساس مشاهدات حاصله، در سطح ٪۹۵ میزان عضویت $\tilde{\theta} = (۳۲۰۰۰, ۲۰۰۰, ۲۰۰۰)_T$ در فاصله اطمینان یک‌طرفه چپ فازی برابر با ۰/۹۹۹ است.

مثال ۲ فرض کنید داده‌های زیر مشاهدات یک نمونه تصادفی فازی از توزیع نرمال فازی $N(\tilde{\theta}, ۶۴)$ باشند (داده‌ها برگرفته از مرجع [۷] است). می‌خواهیم یک فاصله اطمینان دوطرفه فازی ٪۹۰، برای میانگین فازی جامعه، یعنی $\tilde{\theta}$، به‌دست آوریم.

$(۶۴,۷,۵)_T$	$(۵۱,۵,۵)_T$	$(۴۵,۵,۶)_T$
$(۴۹,۸,۵)_T$	$(۴۸,۶,۵)_T$	$(۵۲,۳,۶)_T$
$(۴۱,۳,۶)_T$	$(۵۳,۵,۵)_T$	$(۶۲,۸,۵)_T$
$(۴۷,۶,۶)_T$	$(۵۹,۶,۵)_T$	$(۴۲,۵,۶)_T$
$(۵۷,۶,۴)_T$	$(۵۵,۸,۴)_T$	$(۴۹,۷,۷)_T$
$(۴۴,۶,۳)_T$	$(۳۹,۵,۵)_T$	$(۴۱,۴,۷)_T$
$(۵۶,۶,۷)_T$	$(۵۷,۵,۵)_T$	$(۴۶,۶,۵)_T$
$(۵۱,۵,۶)_T$	$(۶۴,۸,۵)_T$	$(۶۱,۷,۵)_T$
$(۵۷,۵,۵)_T$	$(۴۹,۶,۵)_T$	$(۴۷,۶,۷)_T$
$(۵۹,۵,۶)_T$	$(۶۱,۵,۶)_T$	$(۴۸,۶,۵)_T$
$(۴۳,۷,۷)_T$	$(۴۶,۶,۸)_T$	$(۶۰,۷,۶)_T$
$(۵۸,۶,۵)_T$	$(۴۱,۵,۶)_T$	$(۴۰,۵,۸)_T$

با استفاده از حساب اعداد فازی داریم

$$\bar{\mathcal{X}} = (۵۱/۱۷, ۵/۸۱, ۵/۶۱)_T,$$
$$\bar{\mathcal{X}}_h = [۴۵/۳۶ + ۵/۸۱h, ۵۶/۷۸ - ۵/۶۱h],$$

فواصل اطمینان دوطرفه ٪۹۰ برای پارامترهای θ_h^l و θ_h^u به‌ترتیب برابراند با $[۴۳/۱۷ + ۵/۸۱h, ۴۷/۵۵ + ۵/۸۱h]$ و $[۵۴/۵۹ - ۵/۶۱h, ۵۸/۹۷ - ۵/۶۱h]$. اکنون می‌خواهیم، برای مثال، میزان عضویت پارامتر فازی $\tilde{\theta} = (۴۸/۹۸, ۵/۹۸, ۵/۶۱)_T$ را در فاصله اطمینان دوطرفه فازی ٪۹۰ به‌دست آوریم. با توجه به محاسبات زیربخش ۱.۳، و براساس مشاهدات حاصله، میزان عضویت $\tilde{\theta}$ در فاصله اطمینان فازی فوق برابر است با $\tilde{C}_T(\tilde{\theta}) = ۰/۹۸$. لذا بر اساس داده‌های نادقیق فوق و در سطح اطمینان ٪۹۰، به میزان ٪۹۸ امکان دارد (می‌برازد) که مقدار میانگین واقعی جامعه $\tilde{\theta}$ باشد.

در روش وو [۷] برای تعیین فاصله اطمینان فازی برای پارامتر فازی $\tilde{\theta}$، بازه $[\tilde{L}(\underline{\mathcal{X}}), \tilde{U}(\underline{\mathcal{X}})]$ حاصل می‌شود. نقاط ابتدایی و انتهایی بازه فوق، یعنی $\tilde{L}(\underline{\mathcal{X}})$ و $\tilde{U}(\underline{\mathcal{X}})$، دو عدد فازی با h-برش‌هایی به‌صورت زیر هستند

$$\tilde{L}(\underline{\mathcal{X}})_h = [۴۳/۱۷ + ۵/۸۱h, ۵۴/۵۹ - ۵/۶۱h],$$
$$\tilde{U}(\underline{\mathcal{X}})_h = [۴۷/۵۵ + ۵/۸۱h, ۵۸/۹۷ - ۵/۶۱h].$$

لذا

$$\tilde{L}(\underline{\mathcal{X}}) = (۴۸/۹۸, ۵/۸۱, ۵/۶۱)_T,$$
$$\tilde{U}(\underline{\mathcal{X}}) = (۵۳/۳۶, ۵/۸۱, ۵/۶۱)_T$$

بنابراین، وو پارامتر فازی $\tilde{\theta}$ را عضو مجموعه زیر برآورد می‌کند

$$\tilde{\mathcal{C}} = [\tilde{L}(\underline{\mathcal{X}}), \tilde{U}(\underline{\mathcal{X}})] = \left\{\tilde{\theta} \mid \tilde{L}(\underline{\mathcal{X}}) \preceq \tilde{\theta} \preceq \tilde{U}(\underline{\mathcal{X}})\right\},$$

که در آن $\preceq$، یک رابطه ترتیب جزیی بین مجموعه‌های فازی است، که به‌صورت تعریف می‌شود

$$A \preceq B \Leftrightarrow A_h^l \leq B_h^l,\ A_h^u \leq B_h^u,\ \forall h \in [۰, ۱]. \qquad (۶)$$

استفاده از رابطه ترتیب جزیی $\preceq$، باعث محدودیت زیادی در عضویت مقادیر مختلفِ پارامتر فازی $\tilde{\theta}$ در مجموعه $\tilde{C}$ می‌شود. به‌عنوان مثال، پارامتر فازی $\tilde{\theta} = (۴۸/۹۸, ۵/۹۸, ۵/۶۱)_T$، که بسیار شبیه و نزدیک عدد فازی $\tilde{L}(\underline{\mathcal{X}}) = (۴۸/۹۸, ۵/۸۱, ۵/۶۱)_T$ است، در مجموعه $\tilde{C}$ هیچ عضویتی ندارد. در حالی که میزان عضویت پارامتر فازی $\tilde{\theta}$ در فاصله اطمینان دوطرفه فازی پیشنهاد شده در این مقاله به میزان ۰/۹۸ است. این موضوع، منعطف بودن شیوه تصمیم‌گیری در روش پیشنهادی را نسبت به روش وو نشان می‌دهد. به روش وو در زیر بخش ۲.۵ به‌طور خلاصه اشاره شده است.

۵ مقایسه با رویکردهای دیگر

هم‌چنان که تاکنون آشکار شده است، روش پیشنهاد شده در این مقاله حالتی را در نظر می‌گیرد که پارامتر فازی است و داده‌ها نیز مشاهدات مربوط به متغیرهای تصادفی فازی هستند. روشی که در ساخت فواصل اطمینان فازی در این مقاله معرفی شد، بر اساس فواصل اطمینان برای نقاط ابتدایی و انتهایی h−برش‌های پارامتر فازی است. در این بخش، روش پیشنهادی خود را با چند رویکرد دیگر مقایسه می‌کنیم.

۱.۵ رویکرد فیتل

فیتل [۵] شیوه‌ای را بر پایه اصل گسترش برای برآورد (نقطه‌ای و فاصله‌ای) پارامتر حقیقی مقدار θ بر پایه داده‌های فازی مطرح نموده است. در این روش، وی ابتدا برآوردگر $\hat{\theta}(\underline{X})$ را بر مبنای نمونه تصادفی $\underline{X}$ از توزیع f_θ به‌دست می‌آورد. سپس با استفاده از اصل گسترش و برآوردگر حقیقی مقدار $\hat{\theta}(\underline{X})$ برای θ، برآوردگرهای تعمیم یافته (فازی) را برای θ و بر پایه داده‌های فازی $\underline{\tilde{X}}$ با تابع عضویت $\xi(\underline{x})$، به‌صورت زیر معرفی می‌کند

$$\varphi(\theta) = \begin{cases} \sup\{\xi(\underline{x}) : \underline{x} \in \mathbb{R}^n, \hat{\theta}(\underline{X}) = \theta\} & if \hat{\theta}^{-۱}(\theta) \neq \emptyset, \\ ۰ & if \hat{\theta}^{-۱}(\theta) = \emptyset. \end{cases}$$

وی برای ساختن فاصله اطمینان فازی برای θ، با استفاده از فاصله اطمینان $۱۰۰(۱-\alpha)\%$ $C(\underline{x})$ برای θ، ناحیه اطمینان تعمیم یافته (فازی) را برای θ به‌صورت زیر معرفی می‌کند

$$\varphi(\theta) = \begin{cases} \sup\{\xi(\underline{x}) : \underline{x} \in \mathbb{R}^n, \theta \in C(\underline{x})\} & if \exists \underline{x} : \theta \in C(\underline{x}) \\ ۰ & if \not\exists \underline{x} : \theta \in C(\underline{x}) \end{cases}$$

این فاصله اطمینان، یک مجموعه فازی از فضای پارامتر Θ است.

از جمله خصوصیات این روش می‌توان به تعمیم برآوردگرهای نقطه‌ای و فاصله‌ای در محیط فازی اشاره کرد. لازم به ذکر است که طبق روش وی، که مبتنی بر اصل گسترش است، به‌دست آوردن توابع عضویت برآوردگرهای تعمیم یافته در حالت کلی ممکن است دشوار باشد و احتیاج به دیگر روش‌ها، از جمله روش‌های تقریبی و حساب بازه‌ای، در تعیین توابع عضویت مربوطه است. هم‌چنین در روش ما پارامتر مورد نظر، فازی است، در حالی که فیتل استنباط را برای یک پارامتر حقیقی مقدار انجام می‌دهد.

۲.۵ رویکرد وو

وو [۷] روشی را برای ساختن فاصله اطمینان فازی برای پارامتر فازی $\tilde{\theta}$ بر اساس متغیرهای تصادفی فازی مستقل و هم‌توزیع $\mathcal{X}_۱, \ldots, \mathcal{X}_n$ ارایه کرده است. وی نخست بر پایه نمونه‌های تصادفی $\underline{X}_h^l = (X_{۱h}^l, \ldots, X_{nh}^l)$ و $\underline{X}_h^u = (X_{۱h}^u, \ldots, X_{nh}^u)$ فواصل اطمینان $۱۰۰(۱-\alpha)\%$ دوطرفه $[L(\underline{X}_h^l), U(\underline{X}_h^l)]$ و $[L(\underline{X}_h^u), U(\underline{X}_h^u)]$ را به‌ترتیب

برای پارامترهای θ_h^l و θ_h^u به‌دست می‌آورد. بر اساس فواصل اطمینان به‌دست آمده، دو فاصله زیر به‌دست می‌آیند

$$A_h^L = [\min\{L(\underline{X}_h^l), L(\underline{X}_h^u)\}, \max\{L(\underline{X}_h^l), L(\underline{X}_h^u)\}],$$

$$A_h^U = [\min\{U(\underline{X}_h^l), U(\underline{X}_h^u)\}, \max\{U(\underline{X}_h^l), U(\underline{X}_h^u)\}].$$

وی بر اساس این فواصل اطمینان دوطرفه، فاصله $[\tilde{L}(\underline{\mathcal{X}}), \tilde{U}(\underline{\mathcal{X}})]$ را به‌عنوان یک فاصله اطمینان فازی برای پارامتر $\tilde{\theta}$ معرفی می‌کند. نقاط ابتدایی و انتهایی در این فاصله اطمینان، مجموعه‌های فازی با توابع عضویت زیر هستند

$$\begin{aligned} \tilde{L}(\underline{\mathcal{X}})(r) &= \sup_{0<h\leq 1} h \times I_{A_h^L}(r), \\ \tilde{U}(\underline{\mathcal{X}})(r) &= \sup_{0<h\leq 1} h \times I_{A_h^U}(r). \end{aligned}$$

وو در ساخت فاصله اطمینان فازی از ترتیب فازی $\preceq$ (۶) استفاده می‌کند که یک ترتیب کلی نیست. وی بر اساس این فاصله اطمینان فازی، فاصله $[r^L, r^U]$ را به‌عنوان یک فاصله اطمینان $100(1-\alpha)\%$ برای پارامتر حقیقی θ با درجات باور (l,u) معرفی می‌کند. l و u به‌ترتیب میزان عضویت r^L و r^U در مجموعه‌های فازی $\tilde{L}(\underline{\mathcal{X}})$ و $\tilde{U}(\underline{\mathcal{X}})$ هستند. لازم به ذکر است که ارایه دو مقدار (l,u) برای فاصله اطمینان فوق، تا حدودی استنباط مربوطه را دچار ابهام می‌کند. همچنین وو در روش پیشنهادی خود فقط به بررسی فاصله اطمینان دوطرفه فازی می‌پردازد.

در روش ارایه شده در این مقاله علاوه بر فاصله اطمینان دوطرفه فازی، دو نوع یک‌طرفه راست و یک‌طرفه چپ نیز تعریف شدند. به‌علاوه، ما در تعریف و ساخت فواصل اطمینان فازی از هیچ رابطه ترتیب بین اعداد فازی استفاده نکرده‌ایم. هم‌چنین، با معرفی معیاری، میزان عضویت هر پارامتر فازی را در این فواصل اطمینان معین نموده‌ایم.

۳.۵ رویکرد رمضانی و همکاران

رمضانی و همکاران [۳] در مطالعه‌ای در زمینه کنترل کیفیت، با استفاده از حدود مشخصه فازی (SLهای فازی) چهار ناحیه اطمینان را برای $\tilde{C}_{pm}$ تعریف می‌کنند. معیار $\tilde{C}_{pm}$، یک شاخص فازی عملکرد فرآیند (PCI) است و به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\tilde{C}_{pm} = (\frac{a_u - c_l}{6\sigma_T}, \frac{b_u - b_l}{6\sigma_T}, \frac{c_u - a_l}{6\sigma_T})_T,$$

که $L\tilde{S}L = (a_l, b_l, c_l)_T$ و $U\tilde{S}L = (a_u, b_u, c_u)_T$ دو عدد فازی مثلثی و نمایان‌گر SL های فازی هستند، و $\sigma_T = \sqrt{E(X-T)^2}$ که T مقدار هدف است. آن‌ها دو برآوردگر برای $\tilde{C}_{pm}$ به‌صورت زیر تعریف کرده‌اند

$$\hat{\tilde{C}}_{pm(k)} = (\frac{a_u - c_l}{6S_{T_k}}, \frac{b_u - b_l}{6S_{T_k}}, \frac{c_u - a_l}{6S_{T_k}})_T, \quad k = n-1, n,$$

که در آن، $S_{T_k} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n}(X_i - T)^2$. آن‌ها از این برآوردگرها برای به‌دست آوردن فاصله اطمینان برای $\tilde{C}_{pm}$ استفاده می‌کنند. در تعیین این فاصله اطمینان از رابطه ترتیب $\leq_R$ بین مجموعه‌های فازی استفاده می‌کنند، که عبارت است از: $\tilde{A} \leq_R \tilde{B}$، اگر و فقط اگر $R(\tilde{A}) \leq R(\tilde{B})$، که در آن $R(\tilde{A}) = \frac{1}{2}\int_0^1 (\inf \tilde{A}_\alpha + \sup \tilde{A}_\alpha) d\alpha$ [۱]. سپس، آن‌ها ناحیه فازی $[\tilde{A}, \tilde{B}]$ را به‌صورت زیر تعریف کردند

$$[\tilde{A}, \tilde{B}] = \{\tilde{C} \in F_T(\mathbb{R}) \mid \tilde{A} \leq_R \tilde{C} \leq_R \tilde{B}\}.$$

در انتها، ناحیه فازی $[k_1 \otimes \tilde{T}, k_2 \otimes \tilde{T}]$ را به‌عنوان یک ناحیه اطمینان $100(1-\alpha)\%$ برای $X \otimes \tilde{T}$، تعریف می‌کنند، هرگاه $Pr\{k_1 \leq X \leq k_2\} = 1-\alpha$.

سرانجام آن‌ها بر اساس برآوردگر $\hat{\tilde{C}}_{pm(n)}$، چهار ناحیه اطمینان مجانبی فازی به‌صورت زیر ارایه دادند

$$\hat{\tilde{C}}_{pm(n)} \otimes (\sqrt{\frac{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},\nu_n}}{\nu_n}}, \sqrt{\frac{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},\nu_n}}{\nu_n}}),$$

$$
\begin{aligned}
\hat{\tilde{C}}_{pm(n)} &\otimes \left(1 \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{1}{2\nu_n}}\right),\\
\hat{\tilde{C}}_{pm(n)} &\otimes \left(1 - \frac{2}{9\nu_n} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{2}{9\nu_n}}\right)^{\frac{3}{2}},\\
\hat{\tilde{C}}_{pm(n)} &\otimes \left(1 \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sqrt{2s_{n-1}^2(s_{n-1}^2+2(\bar{x}-T)^2)/n}}{S_{T_n}^2}\right)^{-\frac{1}{2}},
\end{aligned}
$$

که در آن‌ها $\nu_n = \frac{n(1+(\frac{\bar{x}-T}{s_n})^2)^2}{(1+2(\frac{\bar{x}-T}{s_n})^2)}$ و $s_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$.
از جمله خصوصیات این روش می‌توان به محاسبات ساده آن اشاره کرد. از آن‌جا که این فواصل به‌طور مجانبی تعریف شده‌اند، لذا در عمل به حجم نمونه نسبتا بالایی احتیاج است تا این فواصل از دقت کافی برخوردار باشند.

۴.۵ رویکرد اسکریانس

اسکریانس [۴] روشی برای یافتن بازه‌های اطمینان برای مدل‌های فازی با تاکید بر کاربرد آن‌ها در کنترل فرآیند و تشخیص خطا ارایه داده است که مبتنی بر مدل‌های اگر—آن‌گاه فازی و برخی شیوه‌های آماری است. به‌منظور تعیین فاصله اطمینان برای یک مدل فازی، وی به تعیین توابع $\underline{f}$ و $\bar{f}$، می‌پردازد که در شرط $\underline{f}(z_i) \leq g(z_i) \leq \bar{f}(z_i)$، برای هر z_i صدق می‌کنند، که در آن $y_i = g(z_i)$، و $Y = \{y_1, \ldots, y_M\}$ داده‌های خروجی و $Z = \{z_1, \ldots, z_M\}$ داده‌های ورودی هستند.

برای تعیین توابع $\underline{f}$ و $\bar{f}$ ابتدا کمیت‌های زیر محاسبه می‌شوند

$$
\begin{aligned}
\underline{f}_j(z_i) &= g_j(z_i) - t_{1-2\alpha;M-n}\sqrt{Cov(y_j-\hat{y}_j)},\\
\bar{f}_j(z_i) &= g_j(z_i) + t_{1-2\alpha;M-n}\sqrt{Cov(y_j-\hat{y}_j)}.
\end{aligned}
$$

سرانجام توابع $\underline{f}$ و $\bar{f}$ به‌صورت $\underline{f}(z_i) = \sum_{j=1}^{m}\underline{f}_j(z_i)$ و $\bar{f}(z_i) = \sum_{j=1}^{m}\bar{f}_j(z_i)$ تعیین می‌شوند.

در تفاوت روش اسکریانس با روش‌های متداول آماری در تشکیل فاصله اطمینان، باید گفت که در روش‌های پارامتری آماری، هدف تشکیل فاصله اطمینان برای پارامتر مورد نظر یا تابعی از آن است. در حالی که در روش اسکریانس، فاصله اطمینان به‌صورت نواری برای مدل فازی پیش‌بینی شده به‌دست می‌آید.

۶ نتیجه‌گیری

در این مقاله، روش جدیدی برای ساختن فواصل اطمینان بر اساس مشاهدات متغیرهای تصادفی فازی ارایه شد. روش معرفی شده، بر پایه‌ی استفاده از روش‌های متداول برآوردیابی فاصله‌ای در آمار کلاسیک استوار است. طبق این روش، یک مجموعه فازی از کلاس مجموعه‌های فازی بر فضای پارامتر، به‌عنوان یک فاصله اطمینان فازی برای پارامتر فازی تعریف شد. این روش، علاوه بر این‌که تعبیر و تفسیر منطقی و شهودی دارد، از لحاظ محاسباتی نیز بر روش‌هایی که در آن‌ها از روش‌های عددی استفاده می‌شود ارجحیت دارد.
این مطلب را اشاره می‌کنیم که همان‌طور که در آمار کلاسیک فاصله اطمینان و آزمون فرضیه‌های آماری رابطه مستقیم و یک به یک با یکدیگر دارند، لذا ارایه روش‌هایی برای آزمون فرضیه‌های فازی بر اساس نتایج فوق می‌تواند از مباحث تحقیقی آینده باشد.

سپاسگزاری

نویسنده مقاله، از داوران محترم به‌خاطر مطالعه متن اولیه مقاله و ارایه نظرات و پیشنهادات مفید که منجر به بهبود مقاله حاضر گردید، تشکر می‌نماید.

مراجع

[1] Fortemps, P., and Roubense, M. (1996), *Ranking and defuzzification*, Fuzzy Sets and Systems, 82: 319-330.

[2] Puri, M.L., and Ralescu, D.A. (1986), *Fuzzy random variables*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 114: 409-422.

[3] Ramezani, Z., Parchami, A., and Mashinchi, M. (2010), *Fuzzy confidence regions for the Taguchi capability index*, International Journal of Systems Science, 42: 977-987.

[4] Skrjanc, I. (2009), *Confidence interval of fuzzy models: An example using a waste-water treatment plant*, Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems, 96: 182-187.

[5] Viertl, R. (2006), *Univariate statistical analysis with fuzzy data*, Computational Statistics & Data Analysis 51: 133-147.

[6] Wu, H.C. (2005), *Statistical hypotheses testing for fuzzy data*, Information Sciences, 175: 30-57.

[7] Wu, H.C. (2009), *Statistical confidence intervals for fuzzy data*, Expert Systems with Applications, 36: 2670-2676.

[8] Zimmermann, H.J. (2001), *Fuzzy Set Theory and Its Applications*, 4th ed., Kluwer, Boston.