

## مقایسه چند توزیع از خانواده نمایی و ارائه ویژگی‌ها و کاربردهای آنها

آنیته عبدالهی نانواپیشه<sup>۱</sup>

تاریخ دریافت: ۱۳۹۵/۲/۷

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۶/۸/۱

چکیده:

در این مقاله ابتدا تابع چگالی احتمال و تابع نرخ شکست چند خانواده از توزیع‌های نمایی را بررسی می‌کنیم. سپس ویژگی‌های آنها از جمله امیدریاضی، واریانس، گشتاورها و برآورد درست‌نمایی را ارائه می‌کنیم و انعطاف‌پذیرترین توزیع را با توجه به نمودار تابع چگالی احتمال و تابع نرخ شکست آنها مشخص نموده و در نهایت، مثالهایی کاربردی از آنها را ارائه می‌کنیم. **واژه‌های کلیدی:** توزیع نمایی تک‌پارامتری، دوپارامتری و سه پارامتری، توزیع پواسون-وایبل نمایی شده، برآورد درست‌نمایی ماکسیمم، گشتاورها.

### ۱ مقدمه

### ۱.۱ توزیع نمایی تک‌پارامتری

متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی احتمال  $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ ,  $0 < x < \infty$  برای هر  $\lambda > 0$ ، متغیر تصادفی نمایی با پارامتر  $\lambda$  است. تابع توزیع تجمعی آن به صورت

$$F(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x > 0 \quad (1)$$

است. به سادگی ثابت می‌شود که میانگین، واریانس، ضریب تغییرات، ضریب چولگی (معیاری برای اندازه میزان انحراف از تقارن توزیع) و ضریب برجستگی (معیاری برای اندازه میزان برجستگی توزیع فراوانی) و تابع مولد گشتاور این متغیر تصادفی به صورت

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}, \quad var(X) = \frac{1}{\lambda^2}, \quad Cv(X) = 1, \quad \gamma_1(X) = 2, \\ \gamma_2(X) = 6, \quad M_x(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right), \quad t < \lambda. \quad (2)$$

است. که در آن  $\gamma_1(X)$ ،  $\gamma_2(X)$  و  $Cv(X)$  به ترتیب ضریب چولگی، ضریب برجستگی و ضریب تغییرات است. برآورد درست‌نمایی ماکسیمم پارامتر  $\lambda$  برابر  $\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{x}}$  است.

در میان همه مدل‌های پارامتری، توزیع نمایی شاید بیشترین کاربرد را در میان توزیع‌های آماری در زمینه‌های مختلف دارد. یکی از دلایل اهمیت این توزیع آن است که تابع نرخ شکست آن ثابت است. بعلاوه این مدل، اولین مدل طول عمر در بین همه مدل‌های آماری است که به طور گسترده در منابع موجود است. جالب اینست که مارشال و الکین [۱] بیان کرده‌اند که یکی از مهمترین خانواده‌های پارامتری از توزیع عمر، خانواده توزیع‌های نمایی است. تا این اندازه اهمیت منجر به این واقعیت می‌شود که چندین خانواده رایج پر کاربرد از توزیع‌های عمر، بسط‌هایی دو یا سه پارامتری از توزیع‌های نمایی هستند. در مقاله حاضر، ابتدا چند توزیع از خانواده نمایی که در مدل‌بندی داده‌های بقا، مسائل قابلیت اطمینان و مطالعات فرسودگی کاربرد دارند ارائه خواهد شد و سپس کاربردهایی تجربی از مدل‌های ارائه شده با استفاده از داده‌های واقعی برای نشان دادن اهداف مقاله ارائه می‌گردد.

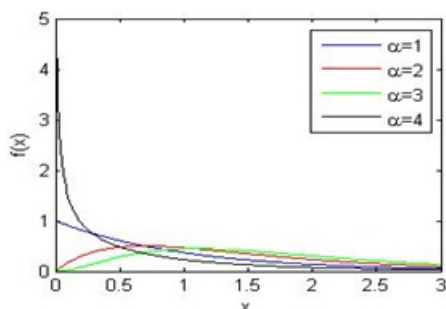
<sup>۱</sup> دانش‌آموخته کارشناسی ارشد آمار، دانشگاه علامه طباطبایی، ایران

در این صورت توزیع EE به توزیع نمایی تبدیل می‌شود. تابع چگالی احتمال و تابع نرخ شکست توزیع EE به ترتیب به صورت

$$g(x) = \alpha \lambda e^{-\lambda x} (1 - e^{-\lambda x})^{\alpha-1},$$

$$h(x) = \frac{\alpha \lambda e^{-\lambda x} (1 - e^{-\lambda x})^{\alpha-1}}{1 - (1 - e^{-\lambda x})^\alpha} \quad (5)$$

است. در شکل‌های ۳ و ۴ به ترتیب نمودارهای تابع چگالی احتمال و نرخ شکست توزیع EE برای مقادیر مختلف  $\alpha$  و  $\lambda = 1$  نشان داده شده است.



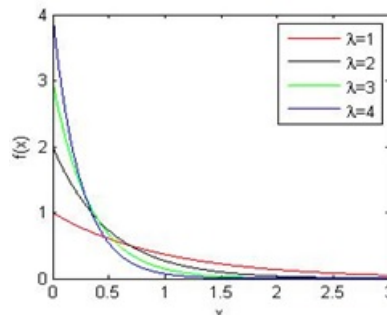
**شکل ۳.** تابع چگالی احتمال توزیع EE برای مقادیر مختلف  $\alpha$  و  $\lambda = 1$ .

تابع نرخ شکست توزیع EE می‌تواند افزایشی (برای  $\alpha > 1$ ) یا کاهشی (برای  $\alpha < 1$ ) باشد. اگر  $\alpha = 1$  باشد تابع نرخ شکست ثابت می‌شود. گوپتا و کاندو [۳] خاطر نشان کردند که تابع نرخ شکست توزیع EE همانند تابع نرخ شکست توزیع گاما است و می‌تواند در بسیاری از موقعیت‌ها به جای توزیع گاما و وایبل به کار گرفته شود. توزیع EE در سالهای اخیر توسط بسیاری از محققان مورد توجه قرار گرفته است. به طور مثال راکاب و احسن‌الله [۴]، راکاب [۵]، زنگ [۶]، گوپتا و کاندو [۷، ۸ و ۹] راکاب و مادی [۱۰]، کاندو و گوپتا [۱۱، ۱۲]، کاندو و همکاران [۱۳]، سرهان [۱۴]، میترا و کاندو [۱۵]، پرادهان و کاندو [۱۶]، عبدالحمید و آل حسینی [۱۷]، کنان و همکاران [۱۸]، اسلام و همکاران [۱۹] و ناداراجا [۲۰]، تعدادی از این نویسندگان هستند. تعمیمی از توزیع نمایی که حالتی خاص از توزیع‌های EE و وایبل است اخیراً توسط ناداراجا و حقیقی [۲۱] ارائه شد که تابع تجمعی آن به صورت

$$G(x) = 1 - \exp\{1 - (1 + \lambda x)^\alpha\}, \quad x > 0 \quad (6)$$

است.

شکل تابع چگالی احتمال توزیع نمایی تنها وابسته به پارامتر  $\lambda$  است که در نمودارهای زیر این تابع چگالی برای مقادیر مختلف  $\lambda$  در محیط نرم‌افزار متلب<sup>۲</sup> نشان داده شده است.

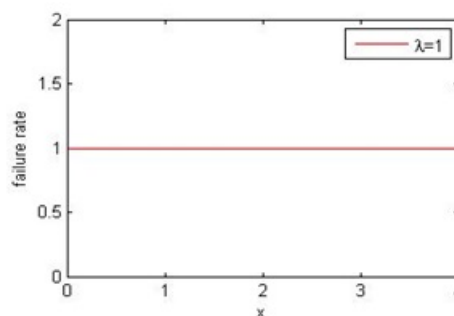


**شکل ۱.** تابع چگالی احتمال توزیع نمایی به ازای مقادیر مختلف پارامتر  $\lambda$

تابع نرخ شکست توزیع نمایی به صورت

$$h(t) = \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}} = \lambda \quad (3)$$

است.



**شکل ۲.** نرخ شکست توزیع نمایی برای  $\lambda = 1$  تابعی ثابت است.

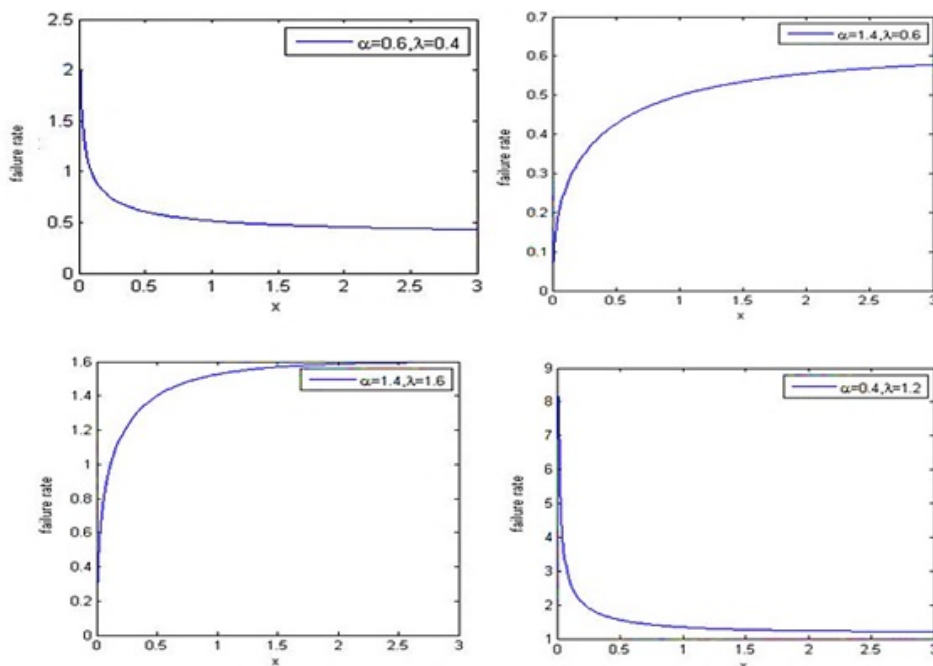
## ۲.۱ توزیع نمایی دو پارامتری

گویم  $X$  دارای توزیع نمایی دو پارامتری است (EE)<sup>۳</sup> اگر تابع توزیع تجمعی آن به صورت

$$G(x) = (1 - e^{-\lambda x})^\alpha, \quad t > 0 \quad (4)$$

باشد. که  $\alpha > 0$  پارامتر شکل و  $\lambda > 0$  پارامتر مقیاس است. اگر  $T$  دارای تابع توزیع تجمعی فوق باشد، آن را به صورت  $X \sim EE(\alpha, \lambda)$  نمایش می‌دهیم. توزیع EE حالت خاصی از توزیع وایبل نمایی شده سه پارامتری است [۲]. اگر  $\alpha = 1$  باشد

<sup>۲</sup> Exponentiated Exponential



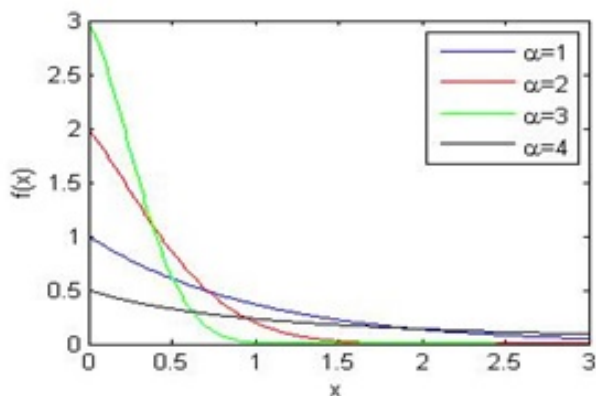
شکل ۴. نرخ شکست توزیع نمایی دو پارامتری EE

به دست می آیند. که  $\psi(\cdot)$  تابع گاماست و  $\psi'$  و  $\psi''$  به ترتیب مشتقات مرتبه اول تا سوم تابع گاماست. با استفاده از رابطه (۱۰)، میانگین و واریانس  $X$  به صورت

$$E(X) = \psi(\alpha + 1) - \psi(1), \quad V(X) = \psi'(1) - \psi'(\alpha + 1)$$

است. این تابع یک مد در  $\ln \alpha$  برای  $\alpha > 1$  دارد و میانه آن در نقطه  $-\ln(1 - (0.5)^{1/\alpha})$  است.

در شکل های ۵ و ۶ نمودارهای تابع چگالی احتمال و نرخ شکست این توزیع برای مقادیر مختلف  $\alpha$  و  $\lambda = 1$  نشان داده شده است.



شکل ۵. تابع چگالی احتمال توزیع NH برای مقادیر مختلف  $\alpha$  و  $\lambda = 1$

که  $\alpha > 0$  پارامتر شکل و  $\lambda > 0$  پارامتر مقیاس است. اگر  $X$  از توزیع ناداراجا-حقیقی پیروی کند، آن را به صورت  $X \sim NH(\alpha, \lambda)$  نشان می دهیم. زمانی که  $\alpha = 1$  باشد توزیع نمایی حاصل می شود. تابع چگالی و تابع نرخ شکست متناظر با رابطه (۶) به صورت

$$g(x) = \alpha \lambda (1 + \lambda x)^{\alpha-1} \exp\{1 - (1 + \lambda x)^\alpha\},$$

$$h(x) = \frac{\alpha \lambda (1 + \lambda x)^{\alpha-1} \exp\{1 - (1 + \lambda x)^\alpha\}}{1 - (1 - \exp\{1 - (1 + \lambda x)^\alpha\})} \quad t > 0.$$

(۷)

است. تابع مولد گشتاور توزیع EE برای  $\lambda = 1$  به صورت

$$M(t) = Ee^{tx} = \frac{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(1 - x)}{\Gamma(\alpha - x + 1)} \quad (۸)$$

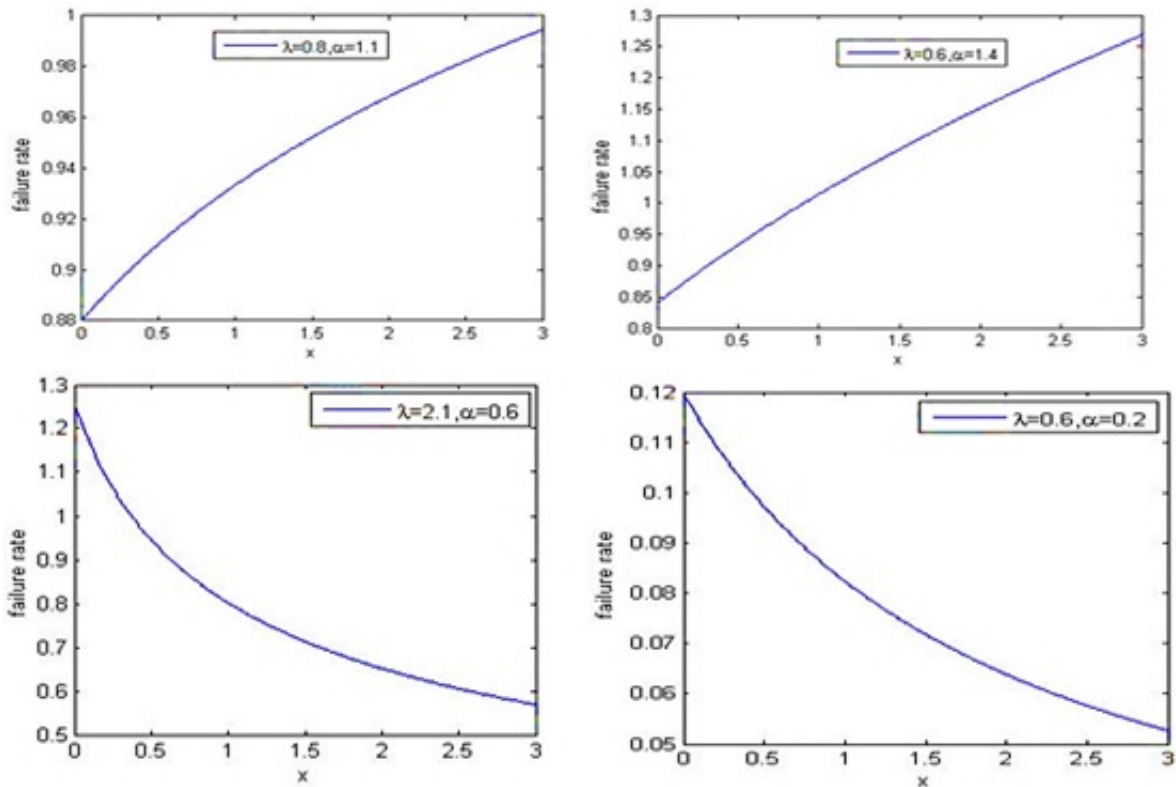
است. برای  $|x| < 1$  تابع مولد تجمعی  $X$  به صورت

$$K(t) = \ln(M(t)) = \ln(\Gamma(\alpha + 1)) + \ln(\Gamma(1 - x)) - \ln(\Gamma(\alpha - x + 1)) \quad (۹)$$

است. با استفاده از (۹) گشتاورهای تجمعی به صورت

$$k_1 = \psi(\alpha + 1) - \psi(1), \quad k_2 = \psi'(1) - \psi'(\alpha + 1) \quad (۱۰)$$

$$k_3 = \psi''(\alpha + 1) - \psi''(1), \quad k_4 = \psi'''(1) - \psi'''(\alpha + 1) \quad (۱۱)$$



شکل ۶. نرخ شکست توزیع NH برای مقادیر مختلف  $\alpha$  و  $\lambda = 1$

توزیع NH نمایی شده (ENH) در آوریم. اگر متغیر تصادفی  $T \sim ENH(\alpha, \lambda, \beta)$  دارای توزیع ENH باشد آن را به صورت  $\beta = 1$  اگر  $\beta = 1$  باشد توزیع نمایش می‌دهیم. مشخص است که اگر  $\alpha = 1$  باشد توزیع ENH به توزیع NH تبدیل می‌شود و اگر  $\alpha = \beta = 1$  باشد توزیع نمایی EE به دست می‌آید. زمانی که  $\alpha = \beta = 1$  باشد توزیع نمایی حاصل می‌شود. اگر  $T \sim ENH(\alpha, \gamma, \beta)$  باشد در این صورت  $KT \sim ENH(\alpha, \lambda^*, \beta)$  که  $\lambda^* = K^{-1}\lambda$  و  $K > 0$  است؛ یعنی کلاسهای توزیع ENH تحت تبدیلات مقیاسی بسته است. اکنون یک ویژگی جدید از توزیع ENH معرفی می‌شود. فرض کنید  $b > 0$  و اعداد صحیح  $T_1, T_2, \dots, T_\beta$  نمونه تصادفی با اندازه  $\beta$  از توزیع NH باشند. تعریف می‌کنیم  $X = \max\{X_i\}_{i=1}^\beta$  که منجر به تبدیل آن به توزیع ENH می‌شود. تابع چگالی متناظر با رابطه (۶) به صورت

$$f(x) = \alpha\beta\lambda \frac{(1 + \lambda x)^{\alpha-1} \exp\{1 - (1 + \lambda x)^\alpha\}}{[1 - \exp\{1 - (1 + \lambda x)^\alpha\}]^{1-\beta}} \quad \alpha > 0, \beta > 0, x > 0 \quad (13)$$

است. تابع چگالی احتمال توزیع ENH در

برآورد ماکسیمم درست‌نمایی  $\alpha$  و  $\lambda$  با حل معادلات

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = \frac{n}{\alpha} + \sum_{i=1}^n \ln(1 + e^{-\lambda x_i}) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda} + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \frac{x_i e^{-\lambda x_i}}{1 - e^{-\lambda x_i}} - \sum_{i=1}^n x_i = 0$$

به دست می‌آیند. که

$$\hat{\alpha}(\lambda) = -\frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln(1 - e^{-\lambda x_i})}$$

$\hat{\lambda}$  نیز به طریق مشابه به دست می‌آید.

### ۳.۱ توزیع نمایی سه پارامتری

این خانواده از توزیع‌ها، نسبتاً ساده بوده و با به توان رساندن تابع جمعی معادله (۶) به یک توان اختیاری  $\beta > 0$  ساخته می‌شود. تابع جمعی ایجاد شده به صورت

$$F(x) = [1 - \exp\{1 - (1 + \lambda x)^\alpha\}]^\beta \quad x > 0 \quad (12)$$

است. که  $\alpha > 0$  و  $\beta > 0$  پارامتر شکل و  $\lambda > 0$  پارامتر مقیاس هستند. می‌خواهیم توزیع ارائه شده در رابطه (۱۲) را به صورت

$S(x)$  بر این دلالت می کند که توزیع  $ENH$  به طور کامل در تحلیل داده های طول عمر با حضور داده های سانسور شده مورد استفاده قرار می گیرد. تابع نرخ شکست توزیع  $ENH$  به صورت

$$h(x) = \alpha\beta\lambda(1 + \lambda x)^{\alpha-1} \exp\{1 - (1 + \lambda x)^\alpha\} \times \frac{[1 - \exp\{1 - (1 + \lambda x)^\alpha\}]^{\beta-1}}{1 - [1 - \exp\{1 - (1 + \lambda x)^\alpha\}]^\beta}, \quad x > 0. \quad (14)$$

است. شکل تابع نرخ شکست توزیع  $ENH$  در شکل ۸ نشان داده شده است.

نرخ شکست معکوس توزیع  $ENH$  به صورت

$$r(x) = \alpha\beta\lambda \frac{(1 + \lambda x)^{\alpha-1} \exp\{1 - (1 + \lambda x)^\alpha\}}{1 - \exp\{1 - (1 + \lambda x)^\alpha\}}, \quad x > 0. \quad (15)$$

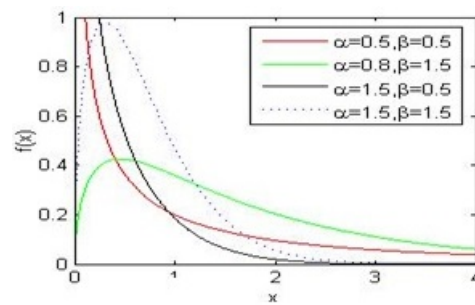
است. دقت کنید که برای  $x > 0$   $r(x) = \beta r_{NH}(x)$  که  $r_{NH}(x)$  معرف تابع نرخ شکست معکوس توزیع  $NH$  است. بنا بر این مقدار  $r(x)$  نسبت به  $r_{NH}(x)$  برابر با مقدار ثابت احتمال  $\beta$  است. به قضیه زیر دقت کنید.

**قضیه ۲.۱.** برای هر  $\lambda > 0$  توزیع  $ENH$  برای  $\alpha > 1$  و  $\beta > 1$  دارای تابع نرخ شکست افزایشی و برای  $\alpha < 1$  و  $\beta < 1$  دارای نرخ شکست کاهشی است. تابع نرخ شکست در صورتی که  $\alpha = \beta = 1$  باشد، مقداری ثابت است [۲۲].

**برهان.** نتیجه با استفاده از شکل تابع چگالی به دست می آید. برای ارائه ویژگی های گشتاوری، فرض کنید  $X \sim ENH(\alpha, \lambda, \beta)$  باشد.  $s$ -امین گشتاور  $X$  به صورت  $\mu'_s = E(X^s) = \int_0^\infty x^s f(x) dx$  است. بعد از انجام یک سری محاسبات، داریم  $\mu'_s = \beta \lambda^{-s} J_s(\alpha, \beta)$  که در آن

$$J_s(\alpha, \beta) = \int_0^1 \{[1 - \log(1 - u)]^{1/\alpha} - 1\}^s u^{\beta-1} du \quad (16)$$

نیاز به محاسبات عددی دارد. این انتگرال به آسانی، به طور عددی با استفاده از نرم افزارهایی مانند *MATLAB*، محاسبه می شود. گشتاورهای  $T$  همچنین می توانند به صورت فرم بسته ای از سری ها به دست آیند که متناهی یا نامتناهی وابسته به مقدار پارامتر  $\beta$  هستند. ابتدا دقت کنید که برای  $x > 0$ ،  $e^{1-(1+\lambda x)^\alpha} < 1$ .



شکل ۷. تابع چگالی احتمال توزیع  $ENH$  برای مقادیر مختلف  $\lambda = 1$  و  $\beta, \alpha$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \begin{cases} \infty & \beta < 1 \\ \alpha\lambda & \beta = 1 \\ 0 & \beta > 1 \end{cases}$$

نشان داده شده است.  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$  محاسبات نشان می دهد که

$$\frac{d \log[f(x)]}{dx} = \frac{(\alpha - 1)\lambda - \alpha\lambda(1 + \lambda x)^\alpha}{1 + \lambda x} + \frac{\alpha\lambda(\beta - 1)(1 + \lambda x)^{\alpha-1} e^{1-(1+\lambda x)^\alpha}}{1 - e^{1-(1+\lambda x)^\alpha}}$$

تابع چگالی احتمال رابطه (۱۳) ممکن است دارای مد باشد. مقدار  $x$  یعنی  $x^*$  که همان مد تابع چگالی است از رابطه  $[\frac{d \log[f(x)]}{dx}]_{x=x^*} = 0$  به دست می آید. همان طور که در شکل ۷ نشان داده شده است با افزایش  $\beta$  مد از نقطه صفر دور می شود. حال به قضیه زیر دقت کنید.

**قضیه ۱.۱.** تابع چگالی  $ENH$  محدب است اگر  $\alpha < 1$  و  $\beta < 1$  و مقعر است اگر  $\alpha > 1$  و  $\beta > 1$  [۲۲].

**برهان.** فرض کنید  $Z = (1 + \lambda x)^\alpha$ . این دلالت بر آن دارد که برای  $x > 0$ ،  $Z > 1$  است. قرار می دهیم  $x = \frac{(Z^{1/\alpha} - 1)}{\lambda}$ . حال تابع چگالی  $ENH$  از  $Z$  را که به صورت  $\xi(Z)$  است، بازنویسی می کنیم. داریم

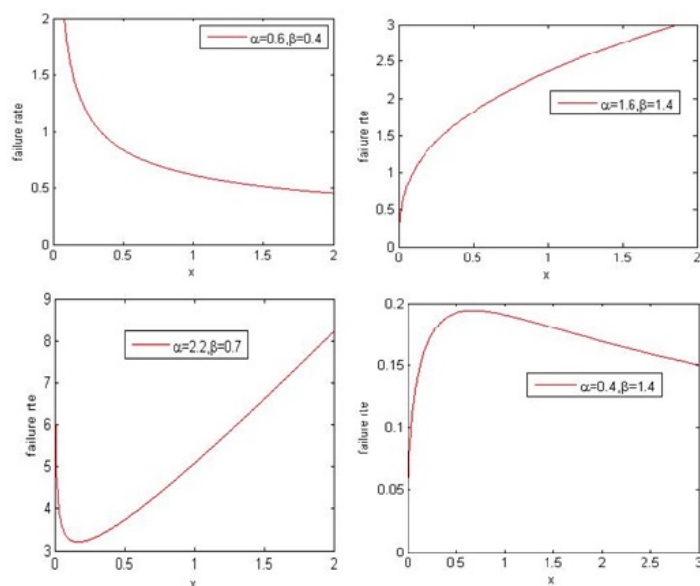
$$\xi(Z) = f(Z^{1/\alpha} - 1/\lambda) = \alpha\lambda\beta \frac{z^{(\alpha-1)/\alpha} \exp(1-z)}{[1 - \exp(1-z)]^{1-\beta}}, \quad Z > 1.$$

نتیجه زیر با استفاده از مشتق دوم از  $\log[\xi(Z)]$  به دست می آید.

$$\frac{d^2 \log[\xi(Z)]}{dz^2} = - \left[ \frac{(\alpha - 1)}{\alpha z^2} + \frac{(\beta - 1)e^{1-z}}{[1 - e^{1-z}]^2} \right].$$

تابع بقا برای  $x > 0$  به صورت

$$S(x) = 1 - [1 - \exp\{1 - (1 + \lambda x)^\alpha\}]^\beta$$



شکل ۸. نرخ شکست توزیع ENH برای مقادیر مختلف  $\alpha$  و  $\beta$  و  $\lambda = 1$

که  $\Gamma(\alpha, x) = \int_x^\infty z^{\alpha-1} e^{-z} dz$  مکمل تابع گامای ناکامل

است، که با استفاده از نرم‌افزار *MATLAB*، محاسبه می‌شود، بنا بر این  $s$ -امین گشتاور  $X$  به صورت

$$\mu'_S = \beta \lambda^{-s} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^s \binom{\beta-1}{j} \binom{s}{i} \times \frac{(-1)^{s+j-i} e^{-(j+1)}}{(j+1)^{i/\alpha+1}} \Gamma\left(\frac{i}{\alpha} + 1, j+1\right) \quad (21)$$

بیان می‌شود. برای عدد صحیح  $\beta > 0$  گشتاورهای رابطه (۲۱) به صورت

$$\mu'_S = \beta \lambda^{-s} \sum_{j=0}^{\beta-1} \sum_{i=0}^s \binom{\beta-1}{j} \binom{s}{i} \times \frac{(-1)^{s+j-i} e^{-(j+1)}}{(j+1)^{i/\alpha+1}} \Gamma\left(\frac{i}{\alpha} + 1, j+1\right) \quad (22)$$

بیان می‌شوند. به علاوه عبارت بالا برای  $\beta = 1$  به صورت

$$\mu'_S = \frac{e}{\lambda^s} \sum_{i=0}^s \binom{s}{i} (-1)^{s-i} \Gamma\left(\frac{i}{\alpha} + 1, 1\right) \quad (23)$$

تبدیل می‌شود. که با گشتاورهای به دست آمده توسط ناداراجا و حقیقی [۲۱] مطابقت دارد. گشتاورهای مرکزی  $K_s$  و گشتاورهای تجمعی  $\mu_S$  از توزیع ENH به ترتیب از رابطه (۲۱)

با استفاده از بسط سری دو جمله‌ای داریم

$$\left[1 - \exp\{1 - (1 + \lambda x)^\alpha\}\right]^{\beta-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\beta-1}{j} (-1)^j e^{j[1 - (1 + \lambda x)^\alpha]} \quad (17)$$

از این رو می‌توانیم بنویسیم

$$\mu'_S = \alpha \lambda \beta \int_0^\infty x^s (1 + \lambda t)^{\alpha-1} \times \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\beta-1}{j} (-1)^j e^{-(j+1)[1 - (1 + \lambda x)^\alpha]} dt \quad (18)$$

چون کمیت‌های درونی این مجموع به طور مطلق انتگرال پذیر هستند، انتگرال و سیگما می‌توانند تعویض شوند بنا بر این

$$\mu'_S = \alpha \lambda \beta \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\beta-1}{j} (-1)^j e^{-(j+1)} \times \int_0^\infty x^s (1 + \lambda x)^{\alpha-1} e^{-(j+1)(1 + \lambda x)^\alpha} dx \quad (19)$$

برای عدد صحیح  $S > 0$  داریم

$$\int_0^\infty x^s (1 + \lambda x)^{\alpha-1} e^{-(j+1)(1 + \lambda x)^\alpha} dx = \alpha^{-1} \lambda^{-s-1} \sum_{i=0}^s \binom{s}{i} \frac{(-1)^{s-i}}{(j+1)^{i/\alpha+1}} \Gamma\left(\frac{i}{\alpha} + 1, j+1\right) \quad (20)$$

(یا رابطه ۲۲) به دست می آیند.

$$\frac{\partial l(\theta)}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda} + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n x_i (1 + \lambda x_i)^{-1} - \alpha \sum_{i=1}^n x_i (1 + \lambda x_i)^{\alpha-1} \\ + \alpha(\beta - 1) \sum_{i=1}^n \frac{x_i (1 + \lambda x_i)^{\alpha-1} e^{-(1+\lambda x_i)^\alpha}}{(1 - e^{-(1+\lambda x_i)^\alpha})}$$

$$\frac{\partial l(\theta)}{\partial \beta} = \frac{n}{\beta} + \sum_{i=1}^n \log(1 - e^{-(1+\lambda x_i)^\alpha}).$$

$$\mu_s = \sum_{k=0}^s \binom{s}{k} (-1)^k \mu_1' \mu_{s-k}',$$

$$K_s = \mu_s' - \sum_{k=1}^{s-1} \binom{s-1}{k-1} k \mu_{s-k}',$$

است. برآورد درست‌نمایی ماکسیم  $\theta = (\hat{\alpha}, \hat{\lambda}, \hat{\beta})^T$  با استفاده از حل همزمان معادلات درست‌نمایی

$$\frac{\partial l(\theta)}{\partial \alpha} = \frac{\partial l(\theta)}{\partial \lambda} = \frac{\partial l(\theta)}{\partial \beta} = 0.$$

به دست می آیند. عبارتی به فرم بسته برای برآورد ماکسیم درست‌نمایی موجود نیست و بنا بر این به طور عددی با استفاده از الگوریتم بهینه‌سازی غیرخطی محاسبه می‌شود. روش تسلسلی نیوتن-رافسون برای حل معادلات درست‌نمایی و به دست آوردن  $\hat{\theta}$  به طور عددی به کار گرفته می‌شود. می‌توان نشان داد که از معادلات درست‌نمایی برای  $\alpha$  و  $\lambda$  به دست آمده، برآورد درست‌نمایی  $\beta$  به صورت

$$\hat{\beta}(\alpha, \lambda) = - \frac{n}{\sum_{i=1}^n \log(1 - e^{-(1+\lambda x_i)^\alpha})}$$

است. با جایگزینی  $\beta$  توسط  $\hat{\beta}(\alpha, \lambda)$  در معادله (۲۴) لگاریتم تابع درست‌نمایی را برای  $\alpha$  و  $\lambda$  به صورت

$$l_p(\alpha, \lambda) = n \log(n) + n \log(\alpha \lambda) \\ + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \log(1 + \lambda x_i) - \sum_{i=1}^n (1 + \lambda x_i)^\alpha \\ - \sum_{i=1}^n \log(1 - e^{-(1+\lambda x_i)^\alpha}) \\ - n \log \left[ \sum_{i=1}^n \log(1 - e^{-(1+\lambda x_i)^\alpha}) \right].$$

به دست می‌آید. همچنین می‌توان برآوردهای ماکسیم درست‌نمایی  $\alpha$  و  $\lambda$  را با استفاده از ماکسیم‌سازی تابع  $l_p(\alpha, \lambda)$  به ترتیب نسبت به  $\alpha$  و  $\lambda$  به دست آورد. معادلات درست‌نمایی

که  $K_1 = \mu_1'$  بنا بر این  $K_2 = \mu_2' - \mu_1'^2$ ،  $K_3 = \mu_3' - 3\mu_2'\mu_1' + 2\mu_1'^3$ ،  $K_4 = \mu_4' - 4\mu_3'\mu_1' - 3\mu_2'^2$  و  $K_5 = \mu_5' - 5\mu_4'\mu_1' - 4\mu_3'\mu_2' - 6\mu_2'\mu_1'^2$  به دست می‌آیند. بعلاوه چولگی و کشیدگی از سومین و چهارمین مجموع استاندارد شده به ترتیب به صورت  $\gamma_3 = k_3/k_2^3$  و  $\gamma_4 = k_4/k_2^4$  هستند.

در این بخش برآورد پارامترهای نامشخص توزیع  $ENH$  با استفاده از روش ماکسیم درست‌نمایی ارائه می‌شوند. فرض کنید  $x_1, x_2, \dots, x_n$  نمونه‌ای تصادفی با اندازه  $n$  از توزیع  $ENH(\alpha, \lambda, \beta)$  باشند. فرض کنید  $\theta = (\alpha, \lambda, \beta)^T$  بردار پارامتر باشد. لگاریتم تابع درست‌نمایی برای  $\theta$  روی یک نمونه تصادفی به صورت

$$l(\theta) = n + n \log(\alpha, \lambda, \beta) + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \log(1 + \lambda x_i) \\ - \sum_{i=1}^n (1 + \lambda x_i)^\alpha \\ + (\beta - 1) \sum_{i=1}^n \log(1 - e^{-(1+\lambda x_i)^\alpha}) \quad (24)$$

به دست می‌آید. برآوردهای ماکسیم درست‌نمایی پارامترهای نامشخص، با استفاده از ماکسیم‌سازی لگاریتم تابع درست‌نمایی در رابطه (۲۴) نسبت به  $\theta$  به دست می‌آیند. معادلات درست‌نمایی که با استفاده از انحرافات جزئی از  $l(\theta)$  نسبت به پارامترها به دست می‌آیند به صورت

$$\frac{\partial l(\theta)}{\partial \alpha} = \frac{n}{\alpha} + \sum_{i=1}^n \log(1 + \lambda x_i) - \sum_{i=1}^n (1 + \lambda x_i)^\alpha \log(1 + \lambda x_i) \\ + (\beta - 1) \sum_{i=1}^n \frac{(1 + \lambda x_i)^\alpha \log(1 + \lambda x_i) e^{-(1+\lambda x_i)^\alpha}}{(1 - e^{-(1+\lambda x_i)^\alpha})}$$

به صورت

$$h(y) = \frac{\alpha \gamma^\beta \beta^\gamma y^{\gamma-1} e^{-(\beta y)^\gamma} (1 - e^{-(\beta y)^\gamma})^{\alpha-1} e^{\theta(1 - e^{-(\beta y)^\gamma})^\alpha}}{e^\theta - e^{\theta(1 - e^{-(\beta y)^\gamma})^\alpha}} \quad (28)$$

هستند. نمودارهای تابع چگالی و نرخ مخاطره از توزیع پواسون- وایبل نمایی شده برای  $\beta = 1$  و مقادیر مختلف  $(\alpha, \gamma, \theta)$  به ترتیب در شکل‌های ۹ و ۱۰ ارائه شده‌اند.

حال در این بخش تابع مولد گشتاور توزیع  $EWP$  را به دست می‌آوریم. فرض کنید که  $Y \sim EWP(\alpha, \beta, \gamma, \theta)$  و  $i = 1, 2, 3, \dots, n$  باشد که برای  $X_{(n)} = \max(X_1, \dots, X_n)$   $X_i \sim EW(\alpha, \beta, \gamma)$  در این صورت

$$\begin{aligned} M_Y(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} p(N=n) M_{X_{(n)}}(t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} p(N=n) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} n \alpha \beta^{-k} \Gamma\left(\frac{k}{\gamma} + 1\right) \\ &\quad \times \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{n\alpha - 1}{j} (j+1)^{-((k/\gamma)+1)} \\ &= \frac{\alpha \theta}{(e^\theta - 1)} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} (-1)^j \frac{\theta^{n-1}}{(n-1)!} \frac{t^k \beta^k}{k!} \\ &\quad \times \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{n\alpha - 1}{j} (j+1)^{-((k/\gamma)+1)} \Gamma\left(\frac{k}{\gamma} + 1\right) \end{aligned} \quad (29)$$

با استفاده از  $M_Y(t)$  می‌توان گشتاور مرتبه  $k$ -ام حول صفر از توزیع  $EWP$  را به دست آورد. داریم

$$\begin{aligned} E[Y^k] &= \sum_{n=1}^{\infty} p(N=n) E[X_{(n)}^k] \quad (30) \\ &= \frac{\alpha \theta}{\beta^K (e^\theta - 1)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta^{n-1}}{(n-1)!} \alpha \beta^{-k} \\ &\quad \times \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{n\alpha - 1}{j} (j+1)^{-((k/\gamma)+1)} \Gamma\left(\frac{k}{\gamma} + 1\right) \\ &= \frac{\alpha \theta \Gamma\left(\frac{k}{\gamma} + 1\right)}{\beta^K (e^\theta - 1)} \\ &\quad \times \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{n\alpha - 1}{j} \frac{\theta^{n-1}}{(n-1)!} (j+1)^{-((k/\gamma)+1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial l_p(\alpha, \lambda)}{\partial \alpha} &= \frac{n}{\alpha} + \sum_{i=1}^n \log(1 + \lambda x_i) \\ &\quad - \sum_{i=1}^n (1 + \lambda x_i)^\alpha \log(1 + \lambda x_i) \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \frac{(1 + \lambda x_i)^\alpha \log(1 + \lambda x_i) e^{1 - (1 + \lambda x_i)^\alpha}}{(1 - e^{1 - (1 + \lambda x_i)^\alpha})} \\ &\quad \times \left[ \sum_{i=1}^n \log(1 - e^{1 - (1 + \lambda x_i)^\alpha}) \right]^{-1} \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \frac{(1 + \lambda x_i)^\alpha \log(1 + \lambda x_i) e^{1 - (1 + \lambda x_i)^\alpha}}{(1 - e^{1 - (1 + \lambda x_i)^\alpha})} \\ \frac{\partial l_p(\alpha, \lambda)}{\partial \lambda} &= \frac{n}{\lambda} + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n x_i (1 + \lambda x_i)^{-1} \\ &\quad - \alpha \sum_{i=1}^n x_i (1 + \lambda x_i)^{\alpha-1} \\ &\quad - n \alpha \sum_{i=1}^n \frac{x_i (1 + \lambda x_i)^{\alpha-1} e^{1 - (1 + \lambda x_i)^\alpha}}{(1 - e^{1 - (1 + \lambda x_i)^\alpha})} \\ &\quad \times \left[ \sum_{i=1}^n \log(1 - e^{1 - (1 + \lambda x_i)^\alpha}) \right]^{-1} \\ &\quad - \alpha \sum_{i=1}^n \frac{x_i (1 + \lambda x_i)^{\alpha-1} e^{1 - (1 + \lambda x_i)^\alpha}}{(1 - e^{1 - (1 + \lambda x_i)^\alpha})} \end{aligned}$$

هستند. که  $\hat{\alpha}$  و  $\hat{\lambda}$  با استفاده از ماکسیم سازی تابع  $l_p(\alpha, \lambda)$  با حل دستگاه معادلات

$$\frac{\partial l_p(\alpha, \lambda)}{\partial \alpha} = \frac{\partial l_p(\alpha, \lambda)}{\partial \lambda} = 0$$

به دست می‌آیند.

#### ۴.۱ توزیع پواسون- وایبل نمایی شده

گوییم  $Y$  دارای توزیع پواسون- وایبل نمایی شده است هرگاه تابع توزیع تجمعی آن به صورت

$$F(y) = \frac{e^{\theta(1 - e^{-(\beta y)^\gamma})^\alpha} - 1}{e^\theta - 1} \quad (25)$$

باشد و آن را به صورت  $EWP(\alpha, \beta, \gamma, \theta)$  نمایش دهیم [۲۲].

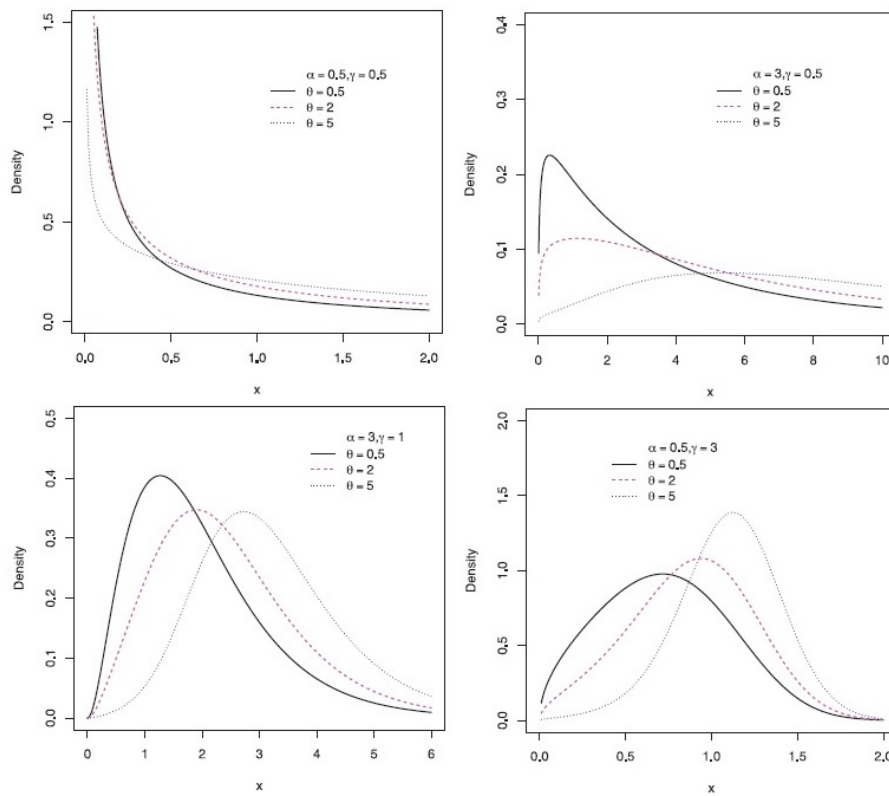
تابع چگالی احتمال توزیع  $EWP$  به صورت

$$f(y) = \frac{\alpha \gamma^\beta \beta^\gamma y^{\gamma-1} e^{-(\beta y)^\gamma} (1 - e^{-(\beta y)^\gamma})^{\alpha-1}}{e^\theta (1 - e^{-(\beta y)^\gamma})^\alpha} \quad (26)$$

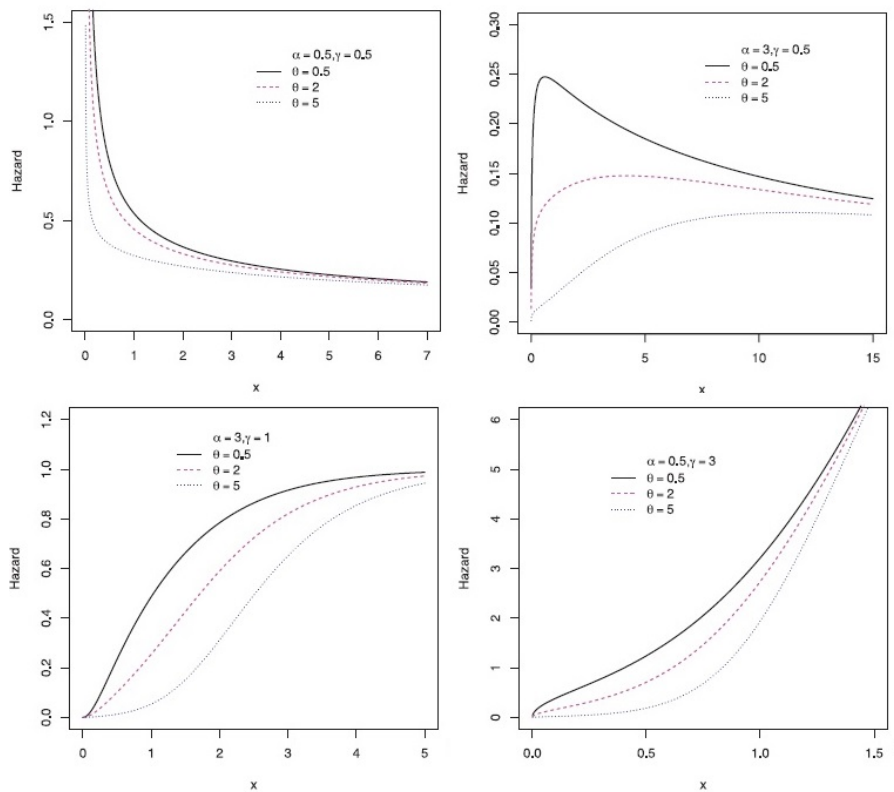
است. که  $\alpha, \beta, \gamma, \theta > 0$  هستند. تابع‌های بقا و نرخ مخاطره از توزیع پواسون- وایبل نمایی شده به ترتیب به صورت

$$S(y) = 1 - \frac{e^{\theta(1 - e^{-(\beta y)^\gamma})^\alpha} - 1}{e^\theta - 1} \quad (27)$$





شکل ۹. تابع چگالی احتمال توزیع EWP برای  $\beta = 1$  و مقادیر مختلف از  $(\alpha, \gamma, \theta)$



شکل ۱۰. تابع نرخ مخاطره توزیع EWP برای  $\beta = 1$  و مقادیر مختلف از  $(\alpha, \gamma, \theta)$

با استفاده از تغییر متغیر  $i = n - 1$  فرمول دیگری برای ارائه می‌شود که

$$\frac{\partial l(n)}{\partial \alpha} = \frac{n}{\alpha} + \sum_{i=1}^n \log(1 - e^{-(\beta y_i)^\gamma}) + \theta \sum_{i=1}^n \log(1 - e^{-(\beta y_i)^\gamma})(1 - e^{-(\beta y_i)^\gamma})^\alpha, \quad E[Y^k] \text{ به صورت}$$

$$E[Y^k] = \frac{\alpha \theta \Gamma(\frac{k}{\gamma} + 1)}{\beta^k (e^\theta - 1)} \quad (31)$$

$$\times \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{\alpha(i+1)-1}{j} \frac{\theta^i}{i!} (j+1)^{-((k/\gamma)+1)}$$

ارائه می‌شود. میانگین و واریانس توزیع *EWP* به ترتیب به صورت

$$E[Y] = \frac{\alpha \theta \Gamma((\frac{1}{\gamma}) + 1)}{\beta (e^\theta - 1)} \quad (32)$$

$$\times \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{\theta^{n-1}}{(n-1)!} \binom{n\alpha-1}{j} (j+1)^{-((1/\gamma)+1)},$$

$$Var[Y] = \frac{\alpha \theta \Gamma((\frac{2}{\gamma}) + 1)}{\beta^2 (e^\theta - 1)} \quad (33)$$

$$\times \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{\theta^{n-1}}{(n-1)!} \binom{n\alpha-1}{j} (j+1)^{-((2/\gamma)+1)}$$

$$- E^2(Y),$$

هستند. توجه کنید که برای مقادیر صحیح مثبت از  $\alpha$ ، اندیس  $j$  در معادله‌های ۲۹ تا ۳۳ در  $n\alpha - 1$  متوقف می‌شود.

در این بخش، برآورد پارامترهای توزیع *EWP* ارائه می‌شود. فرض کنید  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  یک نمونه تصادفی با مقادیر مشاهده شده  $y_1, y_2, \dots, y_n$  توزیع *EWP* با پارامترهای  $\alpha, \beta, \gamma$  و  $\theta$  باشند. فرض کنید  $\Theta = (\alpha, \beta, \gamma, \theta)^T$  بردار پارامتر باشد. تابع کلی لگاریتم درست‌نمایی از رابطه

$$\begin{aligned} l_n &= l_n(y; \Theta) \\ &= -n \log[e^\theta - 1] + n[\log \theta + \log \alpha + \log \gamma + \gamma \log \beta] \\ &\quad + (\gamma - 1) \sum_{i=1}^n \log y_i - \sum_{i=1}^n (\beta y_i)^\gamma \\ &\quad + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \log(1 - e^{-(\beta y_i)^\gamma}) \\ &\quad + \theta \sum_{i=1}^n (1 - e^{-(\beta y_i)^\gamma})^\alpha \end{aligned}$$

به دست می‌آید. تابع محاسبه‌ای مربوط، به صورت

$$u_n(\Theta) = \left( \frac{\partial l_n}{\partial \alpha}, \frac{\partial l_n}{\partial \beta}, \frac{\partial l_n}{\partial \gamma}, \frac{\partial l_n}{\partial \theta} \right)^T$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial l(n)}{\partial \beta} &= \frac{n\gamma}{\beta} - \gamma \beta^{\gamma-1} \sum_{i=1}^n y_i^\gamma \\ &\quad + (\alpha - 1) \gamma \beta^{\gamma-1} \sum_{i=1}^n \frac{y_i^\gamma e^{-(\beta y_i)^\gamma}}{1 - e^{-(\beta y_i)^\gamma}} \\ &\quad + \theta \gamma \alpha \beta^{\gamma-1} \sum_{i=1}^n y_i^\gamma e^{-(\beta y_i)^\gamma} (1 - e^{-(\beta y_i)^\gamma})^{\alpha-1}, \end{aligned}$$

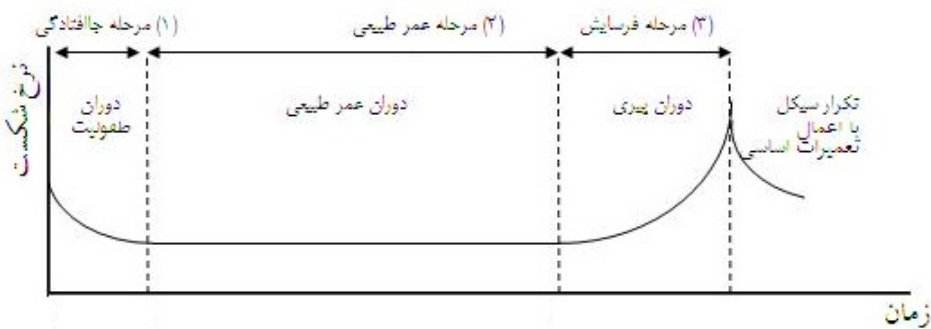
$$\begin{aligned} \frac{\partial l(n)}{\partial \gamma} &= \frac{n}{\gamma} + n \log \beta + \sum_{i=1}^n \log y_i \\ &\quad - \sum_{i=1}^n (\beta y_i)^\gamma \log(\beta y_i) \\ &\quad + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \frac{(\beta y_i)^\gamma \log(\beta y_i) e^{-(\beta y_i)^\gamma}}{1 - e^{-(\beta y_i)^\gamma}} \\ &\quad + \theta \alpha \sum_{i=1}^n (\beta y_i)^\gamma \log(\beta y_i) e^{-(\beta y_i)^\gamma} (1 - e^{-(\beta y_i)^\gamma})^{\alpha-1}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial l(n)}{\partial \theta} = \frac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^n (1 - e^{-(\beta y_i)^\gamma})^\alpha - \frac{n}{1 - e^{-\theta}}$$

برآورد ماکسیم درست‌نمایی پارامتر  $\Theta$ ؛ یعنی  $\hat{\Theta}$  با استفاده از حل تابع غیرخطی  $u_n(\Theta) = 0$  به دست می‌آید. این تابع غیرخطی دارای فرم بسته‌ای نیست. برای ارائه برآورد بازه‌ای و آزمون فرض روی پارامترها، نیاز به ماتریس اطلاع داریم. ماتریس اطلاع مشاهده شده  $4 \times 4$  به صورت

$$J_n(\Theta) = - \begin{bmatrix} J_{\alpha\alpha} & J_{\alpha\beta} & J_{\alpha\gamma} & J_{\alpha\theta} \\ J_{\alpha\beta} & J_{\beta\beta} & J_{\beta\gamma} & J_{\beta\theta} \\ J_{\alpha\gamma} & J_{\beta\gamma} & J_{\gamma\gamma} & J_{\gamma\theta} \\ J_{\alpha\theta} & J_{\beta\theta} & J_{\gamma\theta} & J_{\theta\theta} \end{bmatrix},$$

است. که درایه‌های آن در پیوست *A* ارائه شده‌اند. با استفاده از یک تقریب بزرگ نمونه‌ای رایج، برآوردهای ماکسیم درست‌نمایی  $\Theta$ ؛ یعنی  $\hat{\Theta}$  تقریباً به صورت  $n\hat{\Theta}(\Theta)^{-1}$  است که  $J_n(\Theta) = E[I_n(\Theta)]$  است. تحت شرایطی که برای پارامترها در داخل فضای پارامتر برقرار است اما در کرانه‌ها برقرار نیست، توزیع مقارن  $\sqrt{n}(\hat{\Theta} - \Theta)$  به صورت  $n\hat{\Theta}(\Theta)^{-1}$  است که  $K_n(\Theta) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} J_n(\Theta)$  ماتریس اطلاع واحد است.



شکل ۱۱. دوران طول عمر انسان

علت داشتن نرخ شکست ثابت است.

اولین مجموعه از داده‌های واقعی، زمان‌های بهبودی بیماری (در ماه) یک نمونه تصادفی، از ۱۲۸ بیمار دارای سرطان خون است [۲۳].

دومین مجموعه از داده‌های واقعی مربوط به تجاوز از حد اکثر طغیان آب رودخانه ویتون در قلمرو یوکان است که ۷۲ داده در سال‌های ۱۹۵۸ تا ۱۹۸۴ را شامل می‌شود که با تقریب یک رقم اعشار گرد شده‌اند [۲۴].

در بسیاری از کاربردها، اطلاعاتی کیفی در باره نمودارهای نرخ شکست وجود دارد که می‌تواند در انتخاب یک مدل مشخص ما را یاری کنند. یک روش آزمون بسیار مفید، استفاده از نمودار  $(TTT)$  است [۲۵].

نمودار  $TTT$  با استفاده از نمودار

$$T\left(\frac{r}{n}\right) = \left[\sum_{i=1}^n y_{i:n} + (n-r)y_{r:n}\right] / \sum_{i=1}^n y_{i:n}$$

در برابر  $\frac{r}{n}$  به دست می‌آید که  $r = 1, \dots, n$  و  $i = 1, \dots, n$  آماره‌های ترتیبی از نمونه است. برای تابع نرخ شکست ثابت، نمودار قطری مورب، برای نرخ شکست کاهشی، نمودار محدب و برای نرخ شکست افزایشی، نمودار مقعر است. اگر تابع نرخ شکست  $u$  شکل باشد، نمودار ابتدا مقعر و سپس محدب است. نمودارهای  $TTT$  مربوط به داده‌های بهبودی بیماری و تجاوز از حد اکثر طغیان در شکل ۱۲ نشان داده شده‌اند که نمودارهای داده‌های بهبودی بیماری در شکل (a) ۱۲ نشان‌دهنده یک تابع نرخ شکست  $u$  است در حالی که نمودار  $TTT$  برای تجاوز از حد اکثر طغیان رودخانه در شکل (b) ۱۲ دارای تابع نرخ شکست  $u$  شکل معکوس است.

این رفتار تقارنی زمانی معتبر است که  $K(\theta)$  با ماتریس اطلاع میانگین نمونه که در  $\hat{\theta}$  محاسبه شد؛ یعنی  $n^{-1}J_n(\hat{\theta})$  جایگزین شود. برآورد توزیع چندمتغیره متقارن  $n\pi(\cdot, K_n(\theta))^{-1}$  از  $\hat{\theta}$  برای ایجاد بازه‌های اطمینان تقریبی برای پارامترها و برای تابع نرخ مخاطره مورد استفاده قرار می‌گیرد. یک بازه اطمینان  $(1-\gamma)100\%$  درصدی برای هر پارامتر  $\theta_r$  به صورت

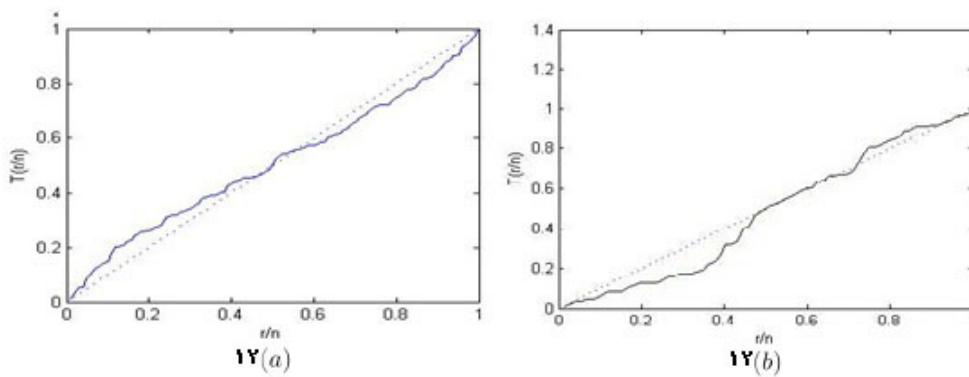
$$ACI_r = (\hat{\theta}_r - Z_{\frac{\gamma}{2}}\sqrt{\hat{I}^{rr}}, \hat{\theta}_r + Z_{\frac{\gamma}{2}}\sqrt{\hat{I}^{rr}})$$

است. که  $\hat{I}^{rr}$ ، زوج  $(r, r)$ ، عناصر روی قطر  $I_n(\hat{\theta})^{-1}$  برای  $r = 1, 2, 3, 4$  و  $Z_{\frac{\gamma}{2}}$  چندک  $1 - \frac{\gamma}{2}$  از توزیع نرمال استاندارد است.

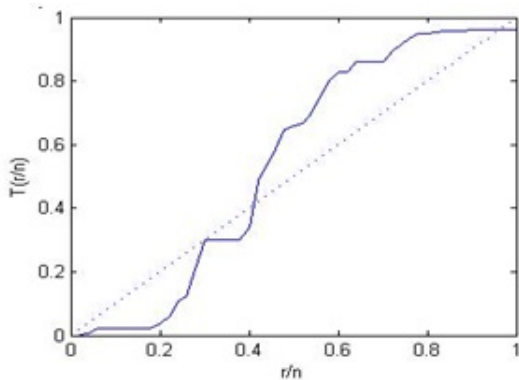
## ۲ مثال‌های تجربی از توزیع‌های ارائه شده

در ادامه مثال‌هایی کاربردی از توزیع‌های ارائه شده با استفاده از داده‌های واقعی برای بیان هدف‌های مقاله ارائه می‌شود. این کاربردها انعطاف‌پذیری هر توزیع را نسبت به مدل‌های دیگر در مدل‌بندی داده‌های مثبت برای مجموعه داده‌های ارائه شده نشان می‌دهند. همان‌طور که می‌دانیم دوره زندگی انسان‌ها دارای نرخ مخاطره  $U$  شکل و شامل سه دوره؛ دوره عمر اولیه، دوره عمر مفید (طبیعی) و دوره پیری است که در دوره عمر مفید، طول عمر ثابت است. شکل ۱۱ این سه دوره را بر روی منحنی  $U$  شکل نشان می‌دهد. بهترین توزیع برای برازش به دوران عمر طبیعی توزیع نمایی به

<sup>۴</sup> total time on test (TTT)

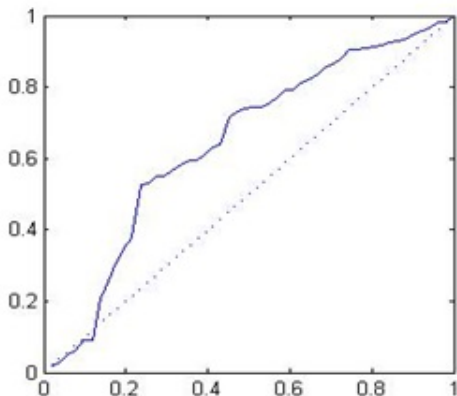


شکل ۱۲. نمودارهای  $TTT$  مربوط به داده‌های بهبود بیماری و تجاوز از حد اکثر طغیان



شکل ۱۴. نمودار  $TTT$  مربوط به زمان خرابی ۵۰ دستگاه

است. مناسب‌ترین توزیع برای برازش به این داده‌ها توزیع  $EWP$  بر اساس بالاترین مقدار  $p$ -value است. پنجمین مجموعه از داده‌ها مربوط به نرخ تورم سال‌های ۱۳۹۳-۱۳۴۲ در مناطق شهری ایران است [۲۷]، که نمودار  $TTT$  داده‌ها به صورت



شکل ۱۵. نمودار  $TTT$  مربوط به نرخ تورم سال‌های

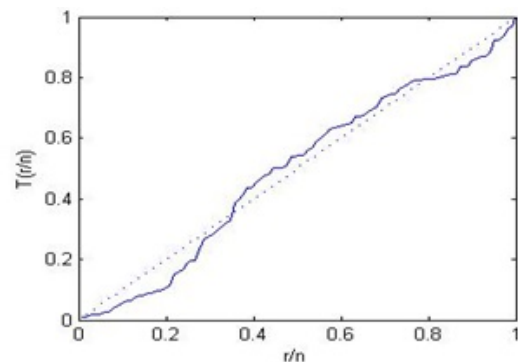
۱۳۹۳-۱۳۴۲ در مناطق شهری ایران

است. با توجه به نمودار  $TTT$  داده‌ها و با توجه به شکل تابع

از آن‌جا که نمودار تابع نرخ شکست دو توزیع  $ENH$  و  $EWP$  به صورت  $u$  شکل و  $u$  شکل معکوس است بنا بر این دو توزیع نام‌برده برای این مجموعه از داده‌ها مناسب هستند. مناسب‌ترین توزیع برای برازش به این داده‌ها توزیع  $ENH$  بر اساس بالاترین مقدار  $p$ -value است.

سومین مجموعه از داده‌ها مربوط به داده‌های ۶۳ مقدار ثبت‌شده از مقاومت فایبرگلاس‌های ۱.۵ سانتی‌متری که در آزمایشگاه فیزیک ملی در انگلستان اندازه‌گیری شده است، است [۲۶].

نمودار  $TTT$ ، مربوط به این داده‌ها به صورت



شکل ۱۳. نمودار  $TTT$  مربوط به داده‌های مقاومت

فایبرگلاس‌های ۱.۵ سانتی‌متری

است. مناسب‌ترین توزیع برای برازش به این داده‌ها توزیع  $EWP$  است.

چهارمین مجموعه از داده‌ها، مربوط به زمان خرابی ۵۰ دستگاه در آزمون طول عمر در زمان صفر است [۲۵].

نمودار  $TTT$  مربوط به این داده‌ها به صورت

۱. با بررسی نمودار  $TTT$  داده‌ها، از آنجا که تابع نرخ شکست توزیع نمایی تک پارامتری ثابت است لذا این توزیع مدلی مناسب برای برازش به داده‌هایی با نرخ شکست ثابت، مانند دوران عمر طبیعی است.

۲. توزیع‌های  $EE$  و  $NH$  برای داده‌هایی که نرخ شکست آنها افزایشی و گاه‌گاهشی است، مناسب است.

۳. به‌طور خلاصه توزیع سه پارامتری  $ENH$  نسبت به دیگر مدل‌های موجود در منابع، برای مدل‌بندی داده‌های واقعی مثبت بسیار کاربرد دارد.

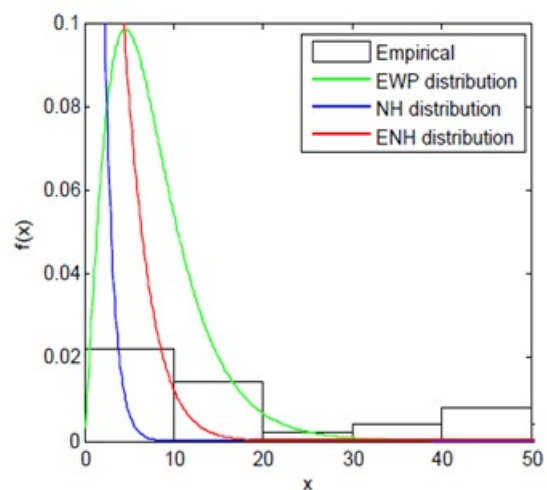
۴. یکی از ویژگی‌های توزیع  $EWP$  این است که تابع نرخ مخاطره آن دارای شکل‌های هندسی گاه‌گاهی، افزایشی،  $U$  شکل و تک نمایی با توجه به مقادیر پارامترهای آن است. مناسب بودن مدل  $EWP$  برای دو مجموعه از داده‌های واقعی، انعطاف‌پذیری و متعارف بودن توزیع پیشنهادی را در مدل‌بندی داده‌ها نشان می‌دهد. از شکل‌های تابع نرخ شکست و تابع چگالی احتمال متوجه می‌شویم که این توزیع می‌تواند مدل پیشنهادی مناسبی در تحلیل‌های قابلیت اطمینان، سیستم‌های بیولوژیکی، هیدرولوژیکی، مدل‌بندی داده‌ها و زمینه‌های مرتبط با آنها باشد.

به‌عنوان نتیجه کلی، می‌توان گفت که توزیع‌های ارائه شده مکانیسم نسبتاً انعطاف‌پذیری برای برازش طیف وسیعی از مجموعه داده‌های واقعی مثبت فراهم می‌کند و امیدواریم این توزیع‌ها جایگزینی برای مدل‌های موجود دیگر در منابع، برای مدل‌بندی داده‌های واقعی در زمینه‌های مهندسی، تحلیل بقا، هیدرولوژی، اقتصاد و غیره باشد. چند ویژگی و بسط‌هایی از این توزیع‌ها از جمله در این مقاله ارائه نشده است که امیدواریم در تحقیقات آینده مورد بررسی قرار گیرند: آماره‌های ترتیبی، گشتاورهای آماره ترتیبی، گشتاورهای مرتبه  $L$  ام، توزیع مقارنی از آماره‌های ترتیبی اکسترمم، آماره‌های ترتیبی تصادفی، آنتروپی تجمعی باقیمانده، توزیع نسبت دو متغیر تصادفی، برآوردهای موضوعی (برآورد بیزی، برآورد بیزی تجربی، برآورد ناریب با کمترین واریانس، برآوردهایی با استفاده از حد اقل مربعات وزنی) و...

نرخ شکست توزیع‌های  $EE$  و  $NH$ ، از آنجا که نرخ شکست توزیع‌های  $EE$  و  $NH$  به‌زای مقادیر مختلف، افزایشی و گاه‌گاهی است بنا بر این برای این مجموعه از داده‌ها بهترین توزیع‌ها، توزیع‌های  $EE$  و  $NH$  هستند.

با توجه به مثالهای ارائه شده و با توجه به نرخ شکست داده‌ها، توزیع  $EWP$  انعطاف‌پذیرتر از سایر توزیع‌ها بوده و مدل مناسب‌تری برای مجموعه داده‌های واقعی است. برای نشان دادن مناسب بودن این توزیع نسبت به سایر توزیع‌ها برای داده‌های مربوط به زمان خرابی ۵۰ دستگاه از آماره‌های آزمون کلموگروف اسمیرنوف استفاده گردید. در جدول زیر برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامترها و آزمون نیکویی برازش کلموگروف- اسمیرنوف برای توزیع‌های  $ENH$ ،  $NH$  و  $EWP$ ، به ترتیب برای این مجموعه از داده‌های واقعی ارائه شده است.

در شکل ۱۶ بافت‌نگاشت و نمودار تابع چگالی احتمال چندین توزیع جهت انتخاب بهترین توزیع برای برازش به داده‌ها رسم شده است. همان‌طور که از شکل‌ها مشخص است مدل  $EWP$ ، نسبت به سایر مدل‌ها، برازش بهتری را روی این مجموعه از داده‌ها فراهم می‌کند.



شکل ۱۶. مقایسه تابع چگالی احتمال چندین توزیع جهت یافتن بهترین توزیع برای برازش به داده‌های واقعی

### ۳ نتیجه‌گیری و پیشنهادات

به‌طور کلی نتایج به‌دست آمده از این تحقیق عبارتند از

جدول ۱. برآورد درست‌نمایی ماکسیمم پارامترها و آزمون نیکویی برازش برای مجموعه داده‌های واقعی

مجموعه	مدل ارائه شده	برآوردها					(K - s)
		$\alpha$	$\beta$	$\lambda$	$\theta$	$\gamma$	
مجموعه IV	ENH	۰/۶۳۷۲	۱/۶۸۸۴	۰/۳۴۴۴	-	-	۰/۷۹۹۳
	NH	۰/۸۴۱۳	-	۰/۱۰۹۴	-	-	۰/۶۸۷۶
	EWP	۰/۸۴۸	۰/۶۳۸	-	۲/۷۸۲	۵/۴۱۲	۰/۵۱۸۰

### پیوست A

$$J_{\lambda\lambda} = \frac{-n}{\lambda^\gamma} - (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n t_i^\gamma (\lambda + \lambda t_i)^{-\gamma}$$

$$- \alpha(\alpha - 1) \sum_{i=1}^n t_i^\gamma (\lambda + \lambda t_i)^{\alpha-\gamma}$$

$$+ \alpha^\gamma (\beta - 1) \sum_{i=1}^n \frac{t_i^\gamma (\lambda + \lambda t_i)^{\alpha-\gamma} e^{-(\lambda + \lambda t_i)^\alpha}}{1 - e^{-(\lambda + \lambda t_i)^\alpha}}$$

$$- \alpha^\gamma (\beta - 1) \sum_{i=1}^n \frac{t_i^\gamma (\lambda + \lambda t_i)^{\gamma(\alpha-1)} e^{-(\lambda + \lambda t_i)^\alpha}}{[1 - e^{-(\lambda + \lambda t_i)^\alpha}]^\gamma}$$

$$J_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^n \frac{(\lambda + \lambda t_i)^\alpha \log(\lambda + \lambda t_i) e^{-(\lambda + \lambda t_i)^\alpha}}{1 - e^{-(\lambda + \lambda t_i)^\alpha}}$$

$$J_{\lambda\beta} = \alpha \sum_{i=1}^n \frac{t_i (\lambda + \lambda t_i)^{\alpha-1} e^{-(\lambda + \lambda t_i)^\alpha}}{1 - e^{-(\lambda + \lambda t_i)^\alpha}}$$

$$J_{\beta\beta} = \frac{-n}{\beta^\gamma}$$

$$J_{\alpha\alpha} = \frac{-n}{\alpha^\gamma} - \sum_{i=1}^n (\lambda + \lambda t_i)^\alpha [\log(\lambda + \lambda t_i)]^\gamma$$

$$+ (\beta - 1) \sum_{i=1}^n \frac{(\lambda + \lambda t_i)^\alpha [\log(\lambda + \lambda t_i)]^\gamma e^{-(\lambda + \lambda t_i)^\alpha}}{[1 - e^{-(\lambda + \lambda t_i)^\alpha}]^\gamma}$$

$$J_{\alpha\lambda} = \sum_{i=1}^n t_i (\lambda + \lambda t_i)^{-1} [1 - (\lambda + \lambda t_i)^\alpha]$$

$$- \alpha \sum_{i=1}^n t_i (\lambda + \lambda t_i)^{\alpha-1} \log(\lambda + \lambda t_i)$$

$$+ (\beta - 1) \sum_{i=1}^n \frac{t_i (\lambda + \lambda t_i)^{\alpha-1} e^{-(\lambda + \lambda t_i)^\alpha}}{1 - e^{-(\lambda + \lambda t_i)^\alpha}}$$

$$\times \{1 + \alpha \log(\lambda + \lambda t_i)\} - \alpha(\beta - 1)$$

$$\times \sum_{i=1}^n \frac{t_i (\lambda + \lambda t_i)^{\gamma\alpha-1} \log(\lambda + \lambda t_i) e^{-(\lambda + \lambda t_i)^\alpha}}{[1 - e^{-(\lambda + \lambda t_i)^\alpha}]^\gamma}$$

### پیوست B

رفرنس	داده‌ها
[23]	0.08, 2.09, 3.48, 4.87, 6.94, 8.66, 13.11, 23.63, 0.20, 2.23, 3.52, 4.98, 6.97, 9.02, 13.29, 0.40, 2.26, 3.57, 5.06, 7.09, 9.22, 13.80, 25.74, 0.50, 2.46, 3.64, 5.09, 7.26, 9.47, 14.24, 25.82, 0.51, 2.54, 3.70, 5.17, 7.28, 9.74, 14.76, 26.31, 0.81, 2.62, 3.82, 5.32, 7.32, 10.06, 14.77, 32.15, 2.64, 3.88, 5.32, 7.39, 10.34, 14.83, 34.26, 0.90, 2.69, 4.18, 5.34, 7.59, 10.66, 15.96, 36.66, 1.05, 2.69, 4.23, 5.41, 7.62, 10.75, 16.62, 43.01, 1.19, 2.75, 4.26, 5.41, 7.63, 17.12, 46.12, 1.26, 2.83, 4.33, 5.49, 7.66, 11.25, 17.14, 79.05, 1.35, 2.87, 5.62, 7.87, 11.64, 17.36, 1.40, 3.02, 4.34, 5.71, 7.93, 11.79, 18.10, 1.46, 4.40, 5.85, 8.26, 11.98, 19.13, 1.76, 3.25, 4.50, 6.25, 8.37, 12.02, 2.02, 3.31, 4.51, 6.54, 8.53, 12.03, 2.02, 2.02, 3.36, 6.76, 12.07, 21.73, 2.07, 3.36, 6.93, 8.65, 12.63, 22.69
[24]	1.7, 2.2, 14.4, 1.1, 0.4, 20.6, 5.3, 0.7, 1.9, 13.0, 12.0, 9.3, 1.4, 18.7, 8.5, 25.5, 11.6, 14.1, 22.1, 1.1, 2.5, 14.4, 1.7, 37.6, 0.6, 2.2, 39.0, 0.3, 15.0, 11.0, 7.3, 22.9, 1.7, 0.1, 1.1, 0.6, 9.0, 1.7, 7.0, 20.1, 0.4, 2.8, 14.1, 9.9, 10.4, 10.7, 30.0, 3.6, 5.6, 30.8, 13.3, 4.2, 25.5, 3.4, 11.9, 21.5, 27.6, 36.4, 2.7, 6.4, 0.1, 5.2, 5.2, 27.4, 1.0, 27.1, 20.2, 16.8, 5.3, 9.7, 27.5, 2.5, 27.0
[26]	0.01, 0.24, 0.80, 1.45, 0.01, 0.24, 0.80, 1.50, 0.02, 0.29, 0.83, 1.51, 0.02, 0.34, 0.85, 1.52, 0.02, 0.35, 0.90, 1.53, 0.03, 0.36, 0.92, 1.54, 0.03, 0.38, 0.95, 1.54, 0.04, 0.40, 0.99, 1.55, 0.05, 0.42, 1.00, 1.58, 0.06, 0.43, 1.01, 1.60, 0.07, 0.52, 1.02, 1.63, 0.07, 0.54, 1.03, 1.64, 0.08, 0.56, 1.05, 1.80, 0.09, 0.60, 1.10, 1.80, 0.09, 0.60, 1.10, 1.81, 0.10, 0.63, 1.11, 2.02, 0.10, 0.65, 1.15, 2.05, 0.11, 0.67, 1.18, 2.14, 0.11, 0.68, 1.20, 2.17, 0.12, 0.72, 1.29, 2.33, 0.13, 0.72, 1.31, 3.03, 0.18, 0.72, 1.33, 3.03, 0.19, 0.73, 1.34, 3.34, 0.20, 0.79, 1.40, 4.20, 0.23, 0.79, 1.43, 4.69, 7.89
[25]	0.1, 0.2, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 6, 7, 11, 12, 18, 18, 18, 18, 18, 21, 32, 36, 40, 45, 46, 47, 50, 55, 60, 63, 63, 67, 67, 67, 67, 72, 75, 79, 82, 82, 83, 84, 84, 84, 85, 85, 85, 85, 85, 86, 86
[27]	11.4, 15.8, 15.6, 15.2, 10.4, 11.9, 18.4, 25.4, 10.8, 12.4, 21.5, 30.5, 34.7, 15.6, 20.7, 24.4, 22.9, 35.2, 49.4, 23.2, 17.3, 18.1, 20.1, 12.6, 1.4, 5.0, 3.0, 8.0, 0.5, 1.5, 3.6, 1.5, 5.5, 6.3, 11.2, 15.5, 9.9, 16.6, 25.1, 10, 11.4, 23.5, 22.8, 14.8, 19.2, 10.4, 6.9, 23.7, 27.7, 28.9, 17.4

## مراجع

- [1] Marshall, A.W., Olkin, I., (2007). *Life Distributions: Structure of Nonparametric, Semi parametric, and Parametric Families*. In: Springer Series in Statistics, New York.
- [2] Mudholkar, G.S., Srivastava, D.K., (1993). Exponentiated Weibull family for analyzing bathtub failure-rate data. *IEEE Transactions on Reliability*, **42**, 299–302.
- [3] Gupta, R.D., Kundu, D., (2001). Exponentiated exponential family: an alternative to gamma and Weibull distributions, *Biometrical Journal*, **33**, 117–130.
- [4] Raqab, M.Z., Ahsanullah, M., (2001). Estimation of the location and scale parameters of generalized exponential distribution based on order statistics, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **69**, 109–124.
- [5] Raqab, M.Z., (2002). Inferences for generalized exponential distribution based on record statistics, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **104**, 339–350.
- [6] Zheng, G., (2002). Fisher information matrix in type-II censored data from exponentiated exponential family, *Biometrical Journal*, **44**, 353–357.
- [7] Gupta, R.D., Kundu, D., (2003). Discriminating between the Weibull and the GE distributions, *Computational Statistics and Data Analysis*, **43**, 179–196.
- [8] Gupta, R.D., Kundu, D., (2006). On comparison of the Fisher information of the Weibull and GE distributions, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **136**, 3130–3144.
- [9] Gupta, R.D., Kundu, D., (2007). Generalized exponential distribution: existing methods and recent developments, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **37**, 3537–3547.
- [10] Raqab, M.Z., Madi, M.T., (2005). Bayesian inference for the generalized exponential distribution, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **75**, 841–852.
- [11] Kundu, D., Gupta, R.D., (2005). Estimation of  $P(Y < X)$  for generalized exponential distribution, *Metrika*, **61**, 291–308.
- [12] Kundu, D., Gupta, R.D., (2008). Generalized exponential distribution: Bayesian estimations, *Computational Statistics and Data Analysis*, **52**, 1873–1883.
- [13] Kundu, D., Gupta, R.D., Manglick, A., (2005). Discriminating between the log-normal and generalized exponential distribution, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **127**, 213–227.

- [14] Sarhan, A.M., (2007). Analysis of incomplete, censored data in competing risks models with generalized exponential distributions, *IEEE Transactions on Reliability*, **56**, 132–138.
- [15] Mitra, S., Kundu, D., (2008). Analysis of the left censored data from the generalized exponential distribution, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **78**, 669–679.
- [16] Pradhan, B., Kundu, D., (2009). On progressively censored generalized exponential distribution, *Test*, **18**, 497–515.
- [17] Abdel-Hamid, A.H., Al-Hussaini, E.K., (2009). Estimation in step-stress accelerated life tests for the exponentiated exponential distribution with type-I censoring, *Computational Statistics and Data Analysis*, **53**, 1328–1338.
- [18] Kannan, N., Kundu, D., Nair, P., Tripathi, R.C., (2010). The generalized exponential cure rate model with covariates, *Journal of Applied Statistics*, **37**, 1625–1636.
- [19] Aslam, M., Kundu, D., Ahmad, M.M., (2010). Time truncated acceptance sampling plans for generalized exponential distribution, *Journal of Applied Statistics*, **37**, 555–566.
- [20] Nadarajah, S., (2011). The exponentiated exponential distribution: a survey. *AStA Advances in Statistical Analysis*, **95**, 219–251.
- [21] Nadarajah, S., Haghghi, F., (2011). An extension of the exponential distribution, *Statistics*, **45**, 543–558.
- [22] Mahmoudi, E., Sepahdar, A., (2013). Exponentiated weibull-poisson distribution: model, properties and applications, *Mathematics and computers in simulation*, **92**, 76-97.
- [23] Lee, E.T., Wang, J.W., (2003). *Statistical Methods for Survival Data Analysis*, third ed. Wiley, New York.
- [24] Choulakian, V., Stephens, M.A., (2001). Goodness-of-fit for the generalized Pareto distribution, *Technometrics* **43**, 478–484.
- [25] Aarset, M.V., (1987). How to identify bathtub hazard rate, *IEEE Transactions on Reliability*, **36**, 106–108.
- [26] Barreto-Souza, Santos, W. A.H.S., Cordeiro, G.M., (2010). The beta generalized exponential distribution, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **80**, 159–172.