

کاربردی از کاهش اریبی بی پاسخی با روش‌های امتیاز تمایل

مریم شکرسی،^۱ حمیدرضا نواب‌پور^۲

تاریخ دریافت: ۱۳۹۴/۹/۲۰

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۶/۲/۲

چکیده:

در بسیاری از آمارگیری‌ها، برخی از واحدهای نمونه به تعدادی از پرسش‌ها یا همه آنها پاسخ نمی‌دهند. این امر موجب بروز بی پاسخی می‌شود. اریبی و تورم واریانس، دو اثر مهم بی پاسخی بر آماره‌های آمارگیری هستند. اگرچه افزایش اندازه نمونه از تورم واریانس برآوردها جلوگیری می‌کند، لزوماً اثری بر کاهش اریبی آماره‌ها ندارد. از این رو روش‌های مختلفی برای تعدیل اریبی بی پاسخی مورد استفاده قرار می‌گیرد. هنگامی که ساختار گم‌شدگی تصادفی باشد، تعدیل موزون برای جبران اثر بی پاسخی واحد آماری مناسب است. یکی از روش‌های وزندهی، روش امتیاز تمایل است. تخصیص وزن در روش امتیاز تمایل، بر مبنای برآورد احتمال پاسخ واحدهای نمونه‌ای انجام می‌شود. این برآوردها با برازش مدل‌های پارامتری مناسب به دست می‌آیند. در این مقاله روش امتیاز تمایل و برآوردهای تعدیل‌شده حاصل از آن معرفی می‌شوند. سپس به مقایسه عمل کرد سه برآوردگر تعدیل‌شده امتیاز تمایل پرداخته می‌شود. در آخر با استفاده از مجموعه داده‌های آمارگیری هزینه و درآمد خانوارهای شهری مرکز آمار ایران در سال ۱۳۹۰، برآوردهای تعدیل‌شده امتیاز تمایل از نظر معیارهای ریشه دوم میانگین توان دوم خطای نسبی و کارایی نسبی با هم مقایسه می‌شوند.

واژه‌های کلیدی: رگرسیون خطی فاصله‌ای، فاصله‌های فازی، شمول کل، تشخیص مدل، برنامه‌ریزی خطی.

۱ مقدمه

آماري به کار می‌روند. روش امتیاز تمایل^۴ یک روش وزندهی است که در آن از متغیرهای کمکی برای محاسبه احتمال پاسخ واحد نمونه استفاده می‌شود.

جامعه متناهی N عضوی را که با U نشان داده می‌شود، در نظر بگیرید. برای هر واحد i در جامعه هدف، مقدار متغیر مورد بررسی، Y ، و x_i بردار $1 \times k$ از متغیرهای کمکی است. هدف، برآورد میانگین، $\theta = N^{-1} \sum_{i=1}^N y_i$ ، متغیر مورد بررسی است. جامعه متناهی

$$F_N = \{(y_1, x'_1), (y_2, x'_2), \dots, (y_N, x'_N)\}$$

یک نمونه تصادفی به اندازه N از توزیع ابرجامعه‌ای $F(y, x)$ فرض می‌شود.

فرض می‌شود نمونه احتمالاتی A به اندازه n از جامعه هدف U مطابق با یک طرح نمونه‌گیری احتمالاتی گزینش شده است.

به‌طور کلی بی پاسخی نتیجه تلاشی ناموفق در به دست آوردن پاسخ برای چند پرسش یا همه پرسش‌های آمارگیری از یک واحد واجد شرایط است. خطای بی پاسخی بر دقت آماره‌های آمارگیری تأثیر دارد و باعث اریبی برآوردها و تورم واریانس^۳ آن‌ها می‌شود. بی پاسخی را نمی‌توان به‌طور کامل برطرف کرد، اما می‌توان با بکارگیری روش‌های مختلف برای جبران اثرهای آن در آمارگیری‌ها اقدام کرد. روش‌های مختلفی برای تعدیل اثر بی پاسخی وجود دارد. این روش‌ها را می‌توان در سه مرحله طراحی آمارگیری، گردآوری داده‌ها و پس از گردآوری داده‌ها به کار گرفت. روش‌های وزندهی از جمله شیوه‌هایی هستند که پس از گردآوری داده‌ها برای تعدیل اثر بی پاسخی مورد استفاده قرار می‌گیرند. این روش‌ها برای جبران اثر بی پاسخی واحد

^۱ دانش‌آموخته کارشناس ارشد آمار اقتصادی و اجتماعی، دانشگاه علامه طباطبایی تهران

^۲ دانشیار گروه آمار دانشگاه علامه طباطبایی تهران

^۳ variance inflation

^۴ propensity score

مدل‌های پارامتری مناسب از قبیل مدل رگرسیون لوژیستیک و مدل رگرسیون خطی به‌دست می‌آیند. برآورد احتمال پاسخ به دلیل شباهت به نظریه امتیاز تمایل [۱۶] برای مطالعه‌های مشاهده‌ای^۷، امتیاز تمایل (تمایل به پاسخ‌گویی) نامیده می‌شود [۴]. با استفاده از این مفهوم برآوردگرهای تعدیل‌شده امتیاز تمایل معرفی می‌شوند.

از برآوردگرهای امتیاز تمایل برای کاهش اریبی بی‌پاسخی به‌طور گسترده در آمارگیری‌ها استفاده می‌شود. مثال‌هایی در خصوص کاربرد برآوردگرهای امتیاز تمایل در آمارگیری‌ها را می‌توان در مطالعه‌های فولر و همکاران [۸] و ریزو و همکاران [۱۴] ملاحظه کرد. نظریه امتیاز تمایل برای اولین بار توسط روزن‌بوم و روبین [۱۶] مطرح شد. آنها از نظریه امتیاز تمایل در مطالعه‌های مشاهده‌ای استفاده کردند. روزن‌بوم [۱۵] استفاده از روش امتیاز تمایل را برای برآورد اثرهای تیماری در مطالعه‌های مشاهده‌ای پیشنهاد کرد. لیتل [۱۳] به‌صورت گسترده‌تر به مطالعه در مورد روش امتیاز تمایل برای کنترل واحدهای بی‌پاسخ در آمارگیری‌های نمونه‌ای پرداخت. استفاده از یک مدل رگرسیونی برای برآورد احتمال پاسخ را می‌توان در مطالعه‌های آلهو [۱] و ای‌خولم و لاکسونن [۶] ملاحظه کرد. فالسام [۷] و ایاناکیچون و همکاران [۹] یک مدل رگرسیونی لوژیستیک را برای برآورد احتمال پاسخ به کار بردند. دو آگوستینو [۳] ضرورت استفاده از امتیاز تمایل را برای کاهش اریبی در مطالعه‌های مشاهده‌ای مطرح کرد. وی امتیاز تمایل را در روش‌های مختلف تعدیل اریبی نظیر جورسازی، طبقه‌بندی و تعدیل رگرسیونی به کار برد. کاربرد این نظریه تنها به مطالعه‌های مشاهده‌ای محدود نمی‌شود. دانکن و استسنی [۵] از رهیافت امتیاز تمایل برای کنترل اریبی همپوشانی در آمارگیری‌های تلفنی استفاده کردند. لی [۱۲] روش امتیاز تمایل را برای آمارگیری وی‌پانلی داوطلبانه^۸ به کار برد.

داسیلوا و اوپسومر [۴] از روش‌های ناپارامتری برای به‌دست آوردن برآوردگرهای امتیاز تمایل کمک گرفتند. کیم و کیم [۱۰] ویژگی‌های مجانبی برآوردگرها را در این روش بررسی کردند. آنها نشان دادند که برآوردگر امتیاز تمایل با استفاده از برآورد احتمال پاسخ کاراتر از برآوردگری با احتمال پاسخ معلوم

در صورت پاسخ‌گویی همه اعضای نمونه، از برآوردگر هورویتز-تامپسون^۵، $\hat{\theta}_{HT} = N^{-1} \sum_{i \in A} w_i y_i$ ، برای برآورد میانگین جامعه‌ای استفاده می‌شود. در این برآوردگر، w_i وزن طرحی است که با توجه به طرح نمونه‌گیری احتمالاتی به‌دست می‌آید. در صورتی که در نمونه انتخابی واحدهای بی‌پاسخ وجود داشته باشند، برآوردگر هورویتز-تامپسون برای برآورد میانگین متغیر مورد بررسی مناسب نیست و باعث اریبی برآورد می‌شود. در این صورت برای تعدیل اثر بی‌پاسخی می‌توان از برآوردگر کامل مورد استفاده کرد. این برآوردگر به‌صورت

$$\hat{\theta}_{cc} = \frac{\sum_{i \in A} w_i r_i y_i}{\sum_{i \in A} w_i r_i}$$

تعریف می‌شود، که در آن r_i متغیر نشانگر پاسخ است. در صورت پاسخ‌گویی واحد i مقدار r_i برابر با ۱ و در غیر این صورت مقدار آن برابر با صفر است. متغیر نشانگر پاسخ بازای هر واحد جامعه مقدار می‌پذیرد. با توجه به متغیر نشانگر پاسخ r_i ، احتمال این که یک واحد گزینش شده (واحد i) پاسخ دهد، به‌صورت $p_i = Pr(r_i = 1 | x_i, y_i)$ تعریف می‌شود. در واقع این احتمال، تمایل به پاسخ‌گویی واحد i را نشان می‌دهد. برآوردگر کامل مورد در احتمال به $E(Y | r = 1)$ همگرا است. در صورتی که ساختار بی‌پاسخی، کاملاً تصادفی باشد، برآوردگر کامل مورد ناریب است. در غیر این صورت، این برآوردگر اریب می‌باشد [۱۱]. برای تصحیح اریبی برآوردگر کامل مورد از برآوردگر کامل مورد موزون استفاده می‌شود. این برآوردگر به‌صورت زیر و ناریب است.

$$\hat{\theta}_{wcc} = N^{-1} \sum_{i \in A} \frac{w_i r_i y_i}{p(x_i, y_i)}$$

زیرا

$$E\left\{N^{-1} \sum_{i \in A} w_i \frac{r_i y_i}{p(x_i, y_i)} \mid F_N\right\} = E\left\{N^{-1} \sum_{i=1}^N \frac{r_i y_i}{p(x_i, y_i)} \mid F_N\right\} = N^{-1} \sum_{i=1}^N y_i.$$

برآوردگر کامل مورد موزون هنگامی به کار برده می‌شود که احتمال پاسخ $p(x, y)$ معلوم باشد. در صورتی که احتمال پاسخ نامعلوم باشد، باید آن را برآورد کرد. این برآوردها با برازش

^۵ Horvitz-Thompson estimator

^۶ complete-case estimator

^۷ observational studies

^۸ volunteer panel web survey

برآوردگر در

$$\sqrt{n}(\hat{\phi} - \phi) = O_p(1)$$

صدق می‌کند، که در آن $g_n = O_p(1)$ نشان می‌دهد که g_n در احتمال کران‌دار است. با استفاده از این برآوردگر می‌توان احتمال پاسخ برای واحد نام را به شکل $\hat{p}_i = p(x_i, y_i, \hat{\phi})$ برآورد کرد. در این صورت برآوردگر تعدیل‌شده امتیاز تمایل^۹ (PSA) عبارت است از [۱۱]:

$$\hat{\theta}_{PSA} = N^{-1} \sum_{i \in A} w_i \frac{r_i}{\hat{p}_i} y_i. \quad (1)$$

تعریف نمادهای w_i و r_i همان است که در قبل بیان شد.

برای معرفی واریانس مجانبی برآوردگرهای PSA، فرض می‌کنیم که ساختار پاسخ به متغیر y وابسته نیست (گم‌شدگی تصادفی). بنا بر این، برابری زیر برای هر $\phi \in \Omega$ برقرار است:

$$p(r = 1 | x, y) = p(r = 1 | x) = p(x; \phi). \quad (2)$$

با توجه به رابطه ۲، مدل احتمال پاسخ با پارامتر ϕ شناخته می‌شود. برای برآورد احتمال پاسخ باید برآوردگرهای \sqrt{n} سازگار برای ϕ را در نظر گرفت. برآوردگر \sqrt{n} سازگار برای ϕ در رابطه ۲، با حل معادله برآورد زیر بر حسب ϕ به دست می‌آید.

$$\hat{U}_h(\phi) \equiv \sum_{i \in A} w_i \{r_i - p_i(\phi)\} h_i(\phi) = 0. \quad (3)$$

در این رابطه $p_i(\phi) = p(x_i; \phi)$ است و تابع $h_i(\phi) = h(x_i; \phi)$ یک تابع هموار از متغیر کمکی x_i و پارامتر ϕ است. با حل معادله ۳ بر حسب ϕ ، برآوردگر $\hat{\phi}$ به دست می‌آید. بنا بر این جواب رابطه ۳ به انتخاب صحیح تابع $h_i(\phi)$ وابسته است.

در عبارت ۲، هر برآوردگر \sqrt{n} سازگار برای پارامتر ϕ با حل معادله ۳ بر حسب ϕ به دست می‌آید. بنا بر این انتخاب مناسب تابع هموار $h_i(\phi)$ در عبارت ۳، میزان کارایی برآوردگرهای PSA را تعیین می‌کند [۲].

قضیه ۱.۲ برخی از ویژگی‌های مجانبی برآوردگر PSA را معرفی می‌کند. با استفاده از این قضیه یک معادل مجانبی برای $\hat{\theta}_{PSA}$ به دست می‌آید. قبل از بیان قضیه، دو فرض زیر را در نظر می‌گیریم [۱۱]:

الف) در ساختار گم‌شدگی تصادفی، احتمال پاسخ $P(x; \phi)$ در ϕ پیوسته و دارای مشتق مرتبه اول و مرتبه دوم پیوسته

است. کیم و ریدلز [۱۱] نیز ویژگی‌های مجانبی برآوردگرهای امتیاز تمایل را مورد بحث قرار دادند و بر اساس یک مدل رگرسیونی، برآوردگر بهین را معرفی کردند. آنها همچنین برآوردگرهای متفاوت امتیاز تمایل را معرفی کردند و به مقایسه آنها و انتخاب برآوردگر بهین پرداختند.

در این مقاله، در ابتدا به معرفی سه برآوردگر تعدیل‌شده امتیاز تمایل می‌پردازیم. اغلب برآوردگرها در روش امتیاز تمایل به طور مجانبی ناریب هستند. برآوردگر تعدیل‌شده امتیاز تمایل بهین با استفاده از یک مدل امتیاز تمایل افزوده به دست می‌آید. سپس با توجه به ویژگی‌های مجانبی برآوردگرهای امتیاز تمایل، کران پایین واریانس مجانبی آنها معرفی می‌شود. در نهایت، با انجام دادن یک مطالعه شبیه‌سازی و با استفاده از مجموعه داده‌های آمارگیری هزینه و درآمد خانوارهای شهری مرکز آمار ایران در سال ۱۳۹۰، برآوردگرهای مورد نظر با یک برآوردگر بهین مقایسه می‌شوند. سپس اثر نرخ بی‌پاسخی و اندازه نمونه بر کارایی این برآوردگرها بررسی و یافته‌های مطالعه تشریح می‌شوند.

۲ روش امتیاز تمایل

اساس فرایند وزن‌دهی تمایل بر مبنای افزایش وزن‌های نمونه‌ای پاسخگویان در نمونه است. وزن‌های نمونه‌ای با استفاده از برآورد احتمال تمایل پاسخگویی واحدهای نمونه به آمارگیری محاسبه می‌شوند. این احتمال، امتیاز تمایل نامیده می‌شود [۱۶]. همانطور که بیان شد، برآورد احتمال پاسخ با برازش مدل‌های پارامتری از قبیل مدل رگرسیونی لوژستیکی و مدل رگرسیونی خطی و با استفاده از متغیرهای کمکی مشاهده‌شده در نمونه به دست می‌آید. در صورتی که مدل پارامتری تعیین شده برای برآورد احتمال پاسخ بدرستی انتخاب نشود، برآوردگرهای تعدیل‌یافته حاصل از روش امتیاز تمایل اریب خواهند شد. در ادامه شکل کلی برآوردگرهای تعدیل‌شده امتیاز تمایل معرفی می‌شوند.

در عمل، احتمال پاسخ $p(x, y)$ نامعلوم است و نیاز به برآورد آن با استفاده از داده‌های نمونه‌ای است. در این صورت، احتمال پاسخ را به صورت یک مدل پارامتری $p(x, y, \phi)$ در نظر می‌گیریم، که در آن $\phi \in \Omega$. برای برآورد احتمال پاسخ، برآوردگر \sqrt{n} سازگار $\hat{\phi}$ برای پارامتر ϕ را در نظر بگیرید. این

^۹ propensity score adjusted estimator

واریانس $\tilde{\theta}_{PSA,h}$ به شکل زیر به دست می آید.

$$\begin{aligned} V(\tilde{\theta}_{PSA,h}) &= V(\hat{\theta}_{HT}) + \frac{1}{N^2} E\left\{ \sum_{i \in A} w_i^2 \left(\frac{1}{p_i} - 1 \right) (y_i - p_i h'_i \gamma_h^*) \right\} \\ &= V(\hat{\theta}_{HT}) + \frac{1}{N^2} E\left\{ \sum_{i \in A} w_i^2 \left(\frac{1}{p_i} - 1 \right) (y_i - E(Y|x_i)) \right. \\ &\quad \left. + E(Y|x_i) - p_i h'_i \gamma_h^* \right\} \\ &= V(\hat{\theta}_{HT}) + \frac{1}{N^2} E\left\{ \sum_{i \in A} w_i^2 \left(\frac{1}{p_i} - 1 \right) V(Y|x_i) \right\} \\ &\quad + \frac{1}{N^2} E\left\{ \sum_{i \in A} w_i^2 \left(\frac{1}{p_i} - 1 \right) \{E(Y|x_i) - p_i h'_i \gamma_h^*\}^2 \right\}. \end{aligned} \quad (V)$$

متغیر y_i با شرطی کردن بر x_i مستقل از $p_i h'_i \gamma_h^*$ است. این نکته باعث می شود که به برابری آخر در رابطه ۷ دست یابیم. از آن جا که عبارت آخر در ۷ نامنفی است، نابرابری ۵ را خواهیم داشت. علاوه بر این، فرض کنید $E(Y|x_i) = p_i h'_i \alpha$ که در آن $\alpha = E(\gamma_h^* | x_i)$ بنا بر این، با توجه به

$$\begin{aligned} E(Y|x_i) - p_i h'_i \gamma_h^* &= p_i h'_i \alpha - p_i h'_i \gamma_h^* \\ &= p_i h'_i \{ \alpha - \gamma_h^* | x_i \} = o_p(1) \end{aligned}$$

عبارت آخر در ۷ قابل چشم پوشی است و داریم:

$$\begin{aligned} V(\tilde{\theta}_{PSA,h}) &= V(\hat{\theta}_{HT}) \\ &\quad + \frac{1}{N^2} E\left\{ \sum_{i \in A} w_i^2 \left(\frac{1}{p_i} - 1 \right) \{E(Y|x_i) - p_i h'_i \gamma_h^*\}^2 \right\} \\ &= V(\hat{\theta}_{HT}) + \frac{1}{N^2} E\left\{ \sum_{i \in A} w_i^2 \left(\frac{1}{p_i} - 1 \right) V(Y|x_i) \right\}. \end{aligned}$$

همان گونه که قبلاً بیان شد، با برقراری برابری بالا شرط ۶ نیز برقرار می شود (برای اثبات به [۱۱] مراجعه شود).

قضیه ۱.۲. نشان می دهد که $\hat{\theta}_{PSA}$ به طور مجانبی با $\tilde{\theta}_{PSA,h}$ معادل است و $E(\tilde{\theta}_{PSA,h} | F_N) = \theta$

در عبارت ۵، V_i کران پایین واریانس مجانبی برآوردگرهای PSA به شکل رابطه ۱ است. هر برآوردگر امتیاز تمایل که دارای واریانس مجانبی V_i باشد، برآوردگر بهین است. به عبارت دیگر، برآوردگر تعدیل شده امتیاز تمایل بهین دارای کمترین واریانس در رده برآوردگرهای PSA است.

با استفاده از روش امتیاز تمایل، برآوردگرهای متفاوتی برای پارامتر جامعه معرفی می شوند. همه این برآوردگرها در رده برآوردگرهای PSA قرار دارند. این برآوردگرها ممکن است از لحاظ مقدار آریبی و کارایی با یکدیگر متفاوت باشند. بنا

در یک ناحیه باز شامل ϕ است. همچنین پاسخها از هم مستقل هستند. به عبارت دیگر، $Cov(r_i, r_j | x) = 0$ ، $i \neq j$ هر

(ب) تابع برآورد $\hat{U}_h(\phi)$ در احتمال به

$$U_h(\phi) = \sum_{i=1}^N \{r_i - p_i(\phi)\} h_i(\phi)$$

همگرا است. همچنین مشتق جزئی $\partial\{\hat{U}_h(\phi)\}/\partial\phi$ در احتمال به $\partial\{U_h(\phi)\}/\partial\phi$ همگرا است. در حالت کلی با حل معادله $U_h(\phi) = 0$ بر حسب ϕ ، ϕ_N به دست می آید. تحت ساختار گم شدگی تصادفی، ϕ_N در عبارت $\sqrt{N}(\phi_N - \phi) = O_p(1)$ صدق می کند.

قضیه ۱.۲. با فرض برقراری فرض های الف و ب و تحت توزیع توأم ساختار نمونه گیری و ساختار پاسخ، برآوردگر تعدیل شده امتیاز تمایل در عبارت زیر صدق می کند:

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_{PSA} - \tilde{\theta}_{PSA,h}) = o_p(1),$$

که در آن

$$\tilde{\theta}_{PSA,h} = \frac{1}{N} \sum_{i \in A} w_i \{p_i h'_i \gamma_h^* + \frac{r_i}{p_i} (y_i - p_i h'_i \gamma_h^*)\}$$

و

$$\gamma_h^* = \left(\sum_{i=1}^N r_i z_i p_i h'_i \right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^N r_i z_i y_i \right). \quad (4)$$

در رابطه ۴، $\phi_i = p(x_i; \phi)$ ، $z_i = \partial\{p^{-1}(x_i; \phi)\}/\partial\phi$ ، $h_i = h(x_i; \phi)$ ، علاوه بر این، اگر جامعه متناهی یک نمونه تصادفی از مدل ابرجامعه ای h باشد، واریانس مجانبی برآوردگر PSA به شکل زیر معرفی می شود:

$$\begin{aligned} Var(\tilde{\theta}_{PSA,h}) &\geq V_i \equiv V(\hat{\theta}_{HT}) \\ &\quad + \frac{1}{N^2} E\left\{ \sum_{i \in A} w_i^2 \left(\frac{1}{p_i} - 1 \right) V(Y|x_i) \right\} \end{aligned} \quad (5)$$

در صورتی برابری برقرار می شود که $\hat{\phi}$ در شرط زیر صدق کند:

$$\sum_{i \in A} w_i \left\{ \frac{r_i}{p(x_i; \hat{\phi})} \right\} E(Y|x_i) = 0. \quad (6)$$

برآوردگر تعدیل شده امتیاز تمایل کالیبدنی^{۱۲} (PSA.CAL) برای برآورد پارامتر مورد نظر به شکل رابطه ۱ است، که در آن برآورد احتمال پاسخ با استفاده از شرط کالیبدنی به دست می آید.

برآوردگر تعدیل شده امتیاز تمایل افزوده

فرض کنید $E(Y|x) = m(x; \beta)$ ، که در آن $m(x; \cdot)$ تابعی معلوم از بردار x است که با بردار پارامترهای β مشخص می شود. مدل فرض شده، مدلی ابرجامعه ای است. با استفاده از $m(x_i; \beta)$ در مدل پاسخ برای واحد نام، می توان یک برآوردگر امتیاز تمایل معرفی کرد. فرض کنید $\hat{m}_i = m(x_i; \hat{\beta})$ و $\hat{p}_i = p(\hat{\phi})$ و $\hat{h}_i = h_i(\hat{\phi})$ که در آن $\hat{\phi}$ از معادله برآورد ۳ به دست می آید. در این صورت مدل احتمال پاسخ به شکل

$$p_i^*(\hat{\phi}, \lambda) \equiv \frac{\hat{p}_i}{\hat{p}_i + (1 - \hat{p}_i) \exp(\lambda + \lambda_1 \hat{m}_i)} \quad (9)$$

گسترش می یابد، که در آن $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1)'$ بردار ضریب های نامعلوم لاگرانژ است. اگر $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1)' = 0$ باشد، احتمال پاسخ افزوده به \hat{p}_i تبدیل خواهد شد.

با استفاده از مدل پاسخ ۹ برآوردگر تعدیل شده امتیاز تمایل افزوده^{۱۳} (PSA.AUG) به صورت زیر به دست می آید:

$$\hat{\theta}_{PSA} = N^{-1} \sum_{i \in A} w_i \frac{r_i}{p_i^*(\hat{\phi}, \hat{\lambda})} y_i. \quad (10)$$

در برآوردگر امتیاز تمایل افزوده، $\hat{\phi}$ با استفاده از روش های ماکسیمم درست نمایی محاسبه می شود. همچنین $\hat{\lambda}$ در رابطه زیر صدق می کند.

$$\sum_{i \in A} w_i \left(\frac{r_i}{p_i^*(\hat{\phi}, \hat{\lambda})} \right) (1, \hat{m}_i) = \sum_{i \in A} w_i (1, \hat{m}_i).$$

تحت مدل پاسخ ۲، $(\hat{\phi}, \hat{\lambda})$ در رابطه ۱۰ در احتمال به (ϕ, \cdot) همگرا است. بنا بر این امتیاز تمایل از مدل پاسخ افزوده (\hat{p}_i^*) به احتمال پاسخ (p_i) همگرا می شود. به دلیل این که $\hat{\lambda}$ در احتمال به صفر می گراید، انتخاب $\hat{\beta}$ در $\hat{m}_i = m(x_i; \hat{\beta})$ نقشی در ناریبی مجانبی برآوردگر PSA ندارد؛ اما واریانس مجانبی با انتخاب $\hat{\beta}$ های مختلف تغییر می کند [۱۱].

بر این هر کدام از آنها که با یک برآوردگر بهین (که لزوماً برآوردگر PSA نیست) معادل باشد، کارایی بیش تری نسبت به سایر برآوردگرهای امتیاز تمایل دارد. استفاده از برآوردگر PSA بهین، آریبی بی پاسخی را تا حد امکان کاهش می دهد. در ادامه به معرفی مختصر برخی از برآوردگرهای تعدیل شده امتیاز تمایل می پردازیم، که می توان از آنها برای کاهش آریبی بی پاسخی در آمارگیری ها استفاده کرد.

برآوردگر تعدیل شده امتیاز تمایل ماکسیمم درست نمایی

شکل کلی برآوردگرهای امتیاز تمایل به صورت رابطه ۱ است. تنها تفاوت آن ها در روش برآورد احتمال پاسخ است. یکی از این برآوردگرها، برآوردگر تعدیل شده امتیاز تمایل ماکسیمم درست نمایی^{۱۱} (PSA.MLE) است. این برآوردگر PSA به شکل رابطه ۱ است که در آن $\hat{p}_i = p_i(\hat{\phi})$ برآوردگر $\hat{\phi}$ در مدل احتمال پاسخ، برآوردگر ماکسیمم درست نمایی برای ϕ است، که از حل معادله برآورد ۳ به دست می آید.

برآوردگر تعدیل شده امتیاز تمایل کالیبدنی

عبارت

$$\sum_{i \in A} w_i \left\{ \frac{r_i}{p(x_i; \hat{\phi}_h)} \right\} E(Y|x_i) = 0$$

راهی برای معرفی یکی دیگر از برآوردگرهای امتیاز تمایل ارائه می دهد. به این صورت که در ابتدا مدل رگرسیونی $E(Y|x)$ به صورت $E(Y|x) = \beta_0 + \beta_1 x$ فرض می شود، که در آن β_0 عرض از مبدأ و β_1 بردار ضریب های رگرسیونی و x بردار متغیرهای کمکی است. بنا بر این امتیاز تمایل با حل معادله ۸ بر حسب ϕ به دست می آید.

$$\sum_{i \in A} w_i \frac{r_i}{p(\phi)} (1, x_i) = \sum_{i \in A} w_i (1, x_i) \quad (8)$$

با برآورد ϕ و جایگذاری این مقدار در مدل احتمال پاسخ می توان امتیاز تمایل را محاسبه کرد. رابطه ۸ در آمارگیری های نمونه ای شرط کالیبدنی نامیده می شود. در واقع \hat{p}_i در این نوع برآوردگر PSA، در شرط کالیبدنی صدق می کند. بنا بر این

^{۱۱} maximum likelihood propensity score adjusted estimator

^{۱۲} calibration propensity score adjusted estimator

^{۱۳} augmented propensity score adjusted estimator

برآورد گر بهین

۳ مطالعه شبیه سازی

در این بخش با اجرای یک مطالعه شبیه سازی، سه برآورد گر معرفی شده در بخش ۲ با هم مقایسه می شوند. معیارهای مقایسه برآورد گرهای تعدیل شده امتیاز تمایل، «ریشه دوم میانگین توان دوم خطای نسبی» و «کارایی نسبی» هستند. شایان ذکر است که مجموعه داده های استفاده شده در این مطالعه، داده های حاصل از طرح آمارگیری هزینه و درآمد خانوارهای شهری در سال ۱۳۹۰ می باشد که توسط مرکز آمار ایران اجرا شده است. این داده ها مربوط به ۱۸۷۰۷ خانوار شهری در کل کشور است، که ما آن را در این مطالعه به عنوان جامعه هدف فرض می کنیم.

در این مطالعه شبیه سازی، از جامعه هدف $N = 18707$ عضو $K = 10000$ بار نمونه های مستقل n تایی به روش نمونه گیری تصادفی ساده بدون جایگذاری گزینش می شوند. هدف این مطالعه بررسی اثر بی پاسخی بر عمل کرد برآورد گرها است. برای این منظور سه نرخ بی پاسخی ۵، ۱۰ و ۱۵ درصد در نظر گرفته می شوند. همچنین برای بررسی اثر اندازه نمونه بر روی عملکرد برآورد گرها، سه اندازه نمونه ۱۰۰، ۳۰۰ و ۵۰۰ در نظر گرفته می شوند. هر یک از نرخ های بی پاسخی در سه اندازه نمونه اعمال می شود. ساختار گم شدگی نیز تصادفی در نظر گرفته می شود. بنا بر این اگر y_i هزینه خالص برای خانوار i ام، متغیر کمکی x_{1i} هزینه غیر خوراکی برای خانوار i ام، و x_{2i} درآمد خانوار i ام (برای هر $i = 1, \dots, n$) باشند، بی پاسخی فقط برای متغیر y رخ می دهد که وابسته به متغیرهای کمکی است. برای محاسبه امتیاز تمایل، مدل رگرسیون لوژیستیک زیر در نظر گرفته می شود:

$$p(x; \phi) = \frac{\exp(\phi_0 + \phi_1 x_1)}{1 + \exp(\phi_0 + \phi_1 x_1)} \quad (12)$$

و برای دست یابی به برآورد گرهای PSA بی بهین مدل رگرسیون خطی به شکل

$$m(x; \beta) = \beta_0 + \beta_1 x_1 \quad (13)$$

در نظر گرفته می شود.

در برآورد گر PSA.AUG، برآورد گر $\hat{\phi}$ با روش ماکسیمم درست نمای محاسبه می شود. تحت مدل ۱۳، برآورد گر ماکسیمم درست نمای برای $\phi = (\phi_0, \phi_1)$ با حل معادله برآورد ۳ که در آن $h_i(\phi) = (1, x_{2i})$ محاسبه می شود. پارامترهای (β_0, β_1)

برای شناسایی بهترین برآورد گر امتیاز تمایل، می توان برآورد گرهای امتیاز تمایل مختلف را بر اساس معیارهای کارایی برآورد گرها مقایسه کرد. همچنین برای شناسایی این برآورد گر، یک برآورد گر بهین^{۱۴} (OPT) معرفی می شود. برآورد گر بهین دارای واریانس مجانبی V_I است، اما لزوماً به شکل برآورد گرهای امتیاز تمایل نیست. با در نظر گرفتن ویژگی های برآورد گر بهین می توان در باره کارایی برآورد گرهای امتیاز تمایل مختلف بحث کرد. در واقع هرچه برآورد گر امتیاز تمایل منطبق بر برآورد گر بهین مورد نظر باشد، کارایی بیش تری دارد.

با در نظر گرفتن یک مدل رگرسیونی برای $E(Y|x)$ ، برآوردگری با واریانس مجانبی V_I ساخته می شود. بنا بر این با استفاده از مدل $E(Y|x) = m(x; \beta)$ ، برآورد گر بهین عبارت است از:

$$\hat{\theta}_{opt} = \frac{1}{N} \sum_{i \in A} w_i \left\{ m(x_i; \hat{\beta}) + \frac{r_i}{p_i(\hat{\phi})} \{y_i - m(x_i; \hat{\beta})\} \right\}, \quad (11)$$

که در آن $\hat{\beta}$ برآورد گر \sqrt{n} سازگار برای پارامتر β تحت مدل $E(Y|x) = m(x; \beta)$ است. همچنین $\hat{\phi}$ برآورد گر \sqrt{n} سازگار برای پارامتر ϕ است، که با استفاده از معادله ۳ محاسبه می شود. قضیه زیر نشان می دهد که واریانس مجانبی برآورد گر بهین در رابطه ۱۱ برابر با V_I است.

قضیه ۲.۲. شرط های قضیه ۱.۲ را در نظر بگیرید. همچنین فرض کنید که $\hat{\beta}$ در عبارت $\hat{\beta} = \beta + O_p(n^{-1/2})$ صدق می کند و مدل ابرجامعه ای، $m(x; \beta)$ مشتق های جزئی پیوسته در ناحیه ای باز شامل β دارد. برآورد گر $\hat{\theta}_{opt}$ در رابطه زیر صدق می کند:

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_{opt} - \tilde{\theta}_{opt}^*) = o_p(1),$$

که در آن

$$\tilde{\theta}_{opt}^* = \frac{1}{N} \sum_{i \in A} w_i \left\{ m(x_i; \beta) + \frac{r_i}{p_i} \{y_i - m(x_i; \beta)\} \right\}.$$

واریانس برآورد گر $\tilde{\theta}_{opt}^*$ برابر با V_I ، حد پایین واریانس مجانبی، است (برای اثبات به [۱۱] مراجعه شود).

^{۱۴} optimal estimator

^{۱۵} ordinary least squares

کارا تر از دو برآوردگر PSA.MLE و PSA.CAL است؛ زیرا کارایی نسبی برای این برآوردگر در همه حالتها تقریباً برابر با ۱ است. این بدان معنی است که برآوردگر PSA.AUG دارای میانگین توان دوم خطاهای تقریباً برابر با MSE برآوردگر بهین می باشد. همچنین در جدول ۲ برآوردگر PSA.AUG مقدار معیار RRMSE کمتری نسبت به برآوردگرهای PSA.MLE و PSA.CAL دارد. بیشترین مقدار این معیار برای برآوردگر PSA.MLE است. با مقایسه مقادیرهای RRMSE در جدول ۲، تفاوت چندانی بین برآورد بهین و برآورد PSA.AUG مشاهده نمی شود. بنا بر این، برآوردگر PSA.AUG به طور مجانبی با برآوردگر بهین معادل است. از این رو، با وجود بی پاسخی در نمونه، برآوردگر امتیاز تمایل افزوده برای برآورد میانگین هزینه خالص خانوارهای شهری بهتر عمل کرده است.

کمترین مقدار معیار RRMSE برای هر چهار برآوردگر مورد نظر در هر سه نرخ بی پاسخی برای اندازه نمونه ۵۰۰ به دست آمده است. با کاهش اندازه نمونه این مقدار برای همه برآوردگرها افزایش می یابد. هم چنین با افزایش نرخ بی پاسخی در هر سه اندازه نمونه ای، شاهد افزایش معیار RRMSE و کاهش کارایی نسبی برآوردگرها هستیم. بیشترین مقدار RRMSE برای برآوردگر PSA.MLE برای نرخ بی پاسخی ۱۵ درصد و اندازه نمونه ۱۰۰ به دست آمده است. کمترین مقدار این معیار نیز برای برآوردگر PSA.AUG و برآوردگر OPT در اندازه نمونه ای ۵۰۰ با نرخ بی پاسخی ۵ درصد حاصل شده است. این نتیجه ها در شکل های ۱ تا ۶ قابل مشاهده اند.

خلاصه نتایج

نتیجه های حاصل از مطالعه شبیه سازی را به طور خلاصه می توان به شرح زیر برشمرد:

۱. برآوردگر PSA.CAL اندکی کارا تر از برآوردگر PSA.MLE است؛ زیرا با توجه به واریانس مجانبی برآوردگر PSA که به شکل

$$V(\hat{\theta}_{PSA,h}) = V(\hat{\theta}_{HT}) + \frac{1}{N^2} E \left\{ \sum_{i \in A} w_i^2 \left(\frac{1}{p_i} - 1 \right) V(Y|x_i) \right\} + \frac{1}{N^2} E \left[\sum_{i \in A} w_i^2 \left(\frac{1}{p_i} - 1 \right) \{E(Y|x_i) - p_i h_i^* \gamma_h^*\}^2 \right]$$

^{۱۶} root relative mean square error

^{۱۷} relative efficiency

در مدل رگرسیونی ۱۳ با استفاده از روش کمترین توان های دوم عادی ۱۵ و برازش مدل رگرسیونی y بر x برآورد می شوند.

۴ معیارهای مقایسه

برآوردگرهای معرفی شده در این مقاله با توجه به معیارهای ریشه دوم میانگین توان دوم خطای نسبی^{۱۶} و کارایی نسبی^{۱۷} در سه اندازه نمونه و سه نرخ بی پاسخی اشاره شده مقایسه می شوند. این معیارها در زیر تعریف می شوند.

۱.۴ ریشه دوم میانگین توان دوم خطای نسبی

معیار ریشه دوم میانگین توان دوم خطای نسبی (RRMSE) برای برآوردگر $\hat{\theta}$ به صورت زیر تعریف می شود.

$$RRMSE = \frac{\sqrt{MSE(\hat{\theta})}}{\theta}$$

۲.۴ کارایی نسبی

معیار کارایی نسبی (eff) برای مقایسه دو برآوردگر $\hat{\theta}_1$ و $\hat{\theta}_2$ به صورت زیر تعریف می شود.

$$eff(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) = \frac{MSE(\hat{\theta}_2)}{MSE(\hat{\theta}_1)} = \frac{MSE(\hat{\theta}_{OPT})}{MSE(\hat{\theta}_{PSA})}$$

هرچه میزان کارایی برآوردگر تعدیل شده امتیاز تمایل PSA نسبت به برآوردگر بهین (OPT) به مقدار ۱ نزدیک باشد، برآوردگر امتیاز تمایل، کارایی بیش تری دارد.

۵ یافته های مطالعه

با توجه به سه اندازه نمونه و سه نرخ بی پاسخی فرض شده، جدول ۱، کارایی نسبی (eff) و جدول ۲، میزان ریشه دوم میانگین توان دوم خطای نسبی (RRMSE) برای چهار برآوردگر مورد نظر را نشان می دهند. شایان ذکر است که در این جدولها مقادیرهای RRMSE تا چهار رقم اعشار و مقادیرهای eff تا دو رقم اعشار گرد شده اند. در جدول های ۱ و ۲ نماد nr نشان دهنده نرخ بی پاسخی است.

با توجه به مقادیرهای کارایی نسبی در جدول ۱، در هر سه اندازه نمونه و سه میزان بی پاسخی، برآوردگر PSA.AUG

رابطه ۱ است. این براوردگر با استفاده از مدل رگرسیونی ۱۳ که به‌درستی انتخاب شده است، ساخته می‌شود. بنا بر این براوردگر PSA.AUG به‌طور مجانبی با براوردگر بهین در عبارت ۱۱ معادل است.

است، عبارت آخر در واریانس مجانبی برای روش کالبدنی کوچک‌تر است؛ زیرا پیش‌بینی برای $E(Y|x_i) = \beta_0 + \beta_1 x_{1i}$ توسط یک تابع خطی از $(1, x_{2i})$ (شرط کالبدنی) بهتر از یک تابع خطی از $(\hat{p}_i, \hat{p}_i x_{2i})$ (معادله براورد) تقریب زده می‌شود.

۳. با کاهش اندازه نمونه و افزایش میزان بی‌پاسخی، از کارایی براوردگرها کاسته می‌شود.

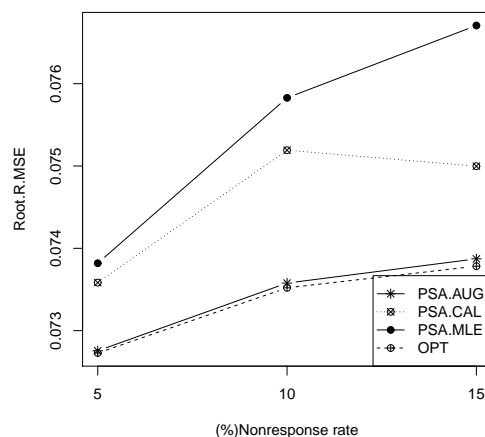
۲. براوردگر PSA.AUG کارتر از براوردگر PSA به‌شکل

جدول ۱. کارایی نسبی سه براوردگر تعدیل‌شده امتیاز تمایل نسبت به براوردگر بهین

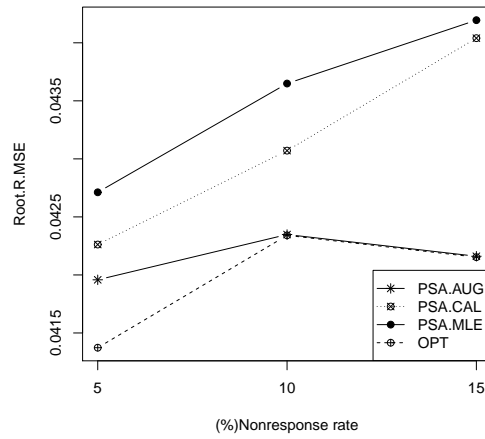
		$n = 500$			$n = 300$			$n = 100$		
بروردگر	$nr = 0.15$	$nr = 0.1$	$nr = 0.05$	$nr = 0.15$	$nr = 0.1$	$nr = 0.05$	$nr = 0.15$	$nr = 0.1$	$nr = 0.05$	
PSA.MLE	0.92	0.94	0.97	0.91	0.94	0.97	0.92	0.94	0.97	
PSA.CAL	0.96	0.96	0.98	0.91	0.96	0.98	0.96	0.96	0.98	
PSA.AUG	1.00	1.00	1.00	0.97	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	

جدول ۲. ریشه دوم میانگین توان دوم خطای نسبی چهار براوردگر

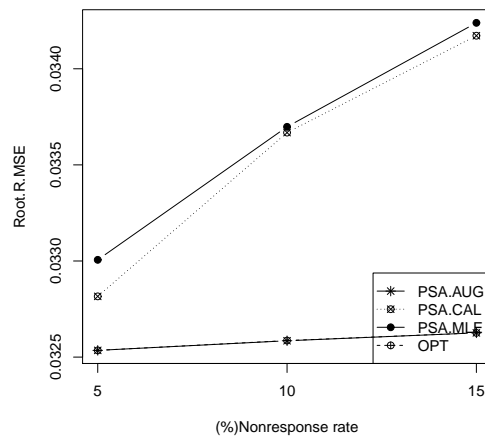
		$n = 500$			$n = 300$			$n = 100$		
بروردگر	$nr = 0.15$	$nr = 0.1$	$nr = 0.05$	$nr = 0.15$	$nr = 0.1$	$nr = 0.05$	$nr = 0.15$	$nr = 0.1$	$nr = 0.05$	
PSA.MLE	0.0767	0.0758	0.0738	0.0742	0.0736	0.0738	0.0742	0.0758	0.0738	
PSA.CAL	0.0750	0.0752	0.0736	0.0740	0.0731	0.0736	0.0740	0.0752	0.0736	
PSA.AUG	0.0739	0.0736	0.0727	0.0722	0.0723	0.0727	0.0722	0.0736	0.0727	
OPT	0.0738	0.0735	0.0727	0.0721	0.0723	0.0727	0.0721	0.0735	0.0727	



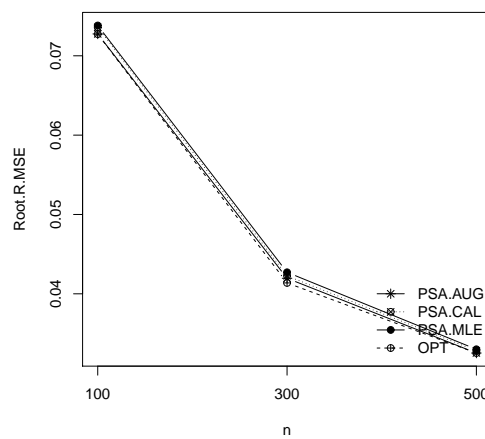
شکل ۱. اثر نرخ بی‌پاسخی بر عملکرد براوردگرها با اندازه نمونه ۱۰۰



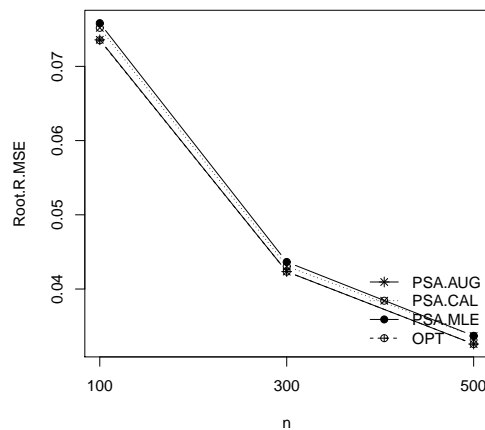
شکل ۲. اثر نرخ بی پاسخی بر عملکرد برآوردگرها با اندازه نمونه ۳۰۰



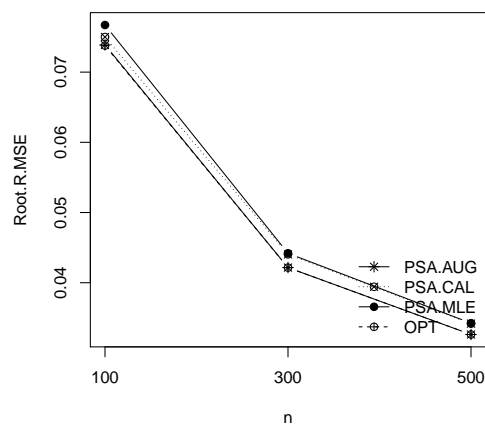
شکل ۳. اثر نرخ بی پاسخی بر عملکرد برآوردگرها با اندازه نمونه ۵۰۰



شکل ۴. اثر اندازه نمونه بر عملکرد برآوردگرها با نرخ بی پاسخی ۵ درصد



شکل ۵. اثر اندازه نمونه بر عملکرد برآوردگرها با نرخ بی‌پاسخی ۱۰ درصد



شکل ۶. اثر اندازه نمونه بر عملکرد برآوردگرها با نرخ بی‌پاسخی ۱۵ درصد

مراجع

- [1] Alho, J. M. (1990). Adjusting for nonresponse bias using logistic regression. *Biometrika*, 617-624.
- [2] Chamberlain, G. (1987). Asymptotic efficiency in estimation with conditional moment restrictions. *Journal of Econometrics*, **34**, 305-334.
- [3] D'Agostino, R. B. (1998). Propensity score methods for bias reduction in the comparison of a treatment to a non-randomize control group. *Statistics in Medicine*, **14**, 2265-2281.
- [4] Da Silva, D. N. and Opsomer, J. D. (2009). Nonparametric propensity weighting for survey nonresponse through local polynomial regression. *Survey Methodology*, **35**, 165-176.
- [5] Duncan, K. B. and Stasny, E. A. (2001). Using propensity scores to control coverage bias in telephone surveys. *Survey Methodology*, **27**, 121-130.
- [6] Ekholm, A. and Laaksonen, S (1991). Weighting via response Modeling in the Finnish household budget survey. *Journal of Official Statistics*, **7**, 325-337.

- [7] Folsom, R. E. (1991). Exponential and logistic weight adjustments for sampling and nonresponse error reduction. Proceedings of the Social Statistics Section, *American Statistical Association*, **7**, 197-202.
- [8] Fuller, W. A., Loughin, M. M. and Baker, H. D. (1994). Regression weighting in the presence of nonresponse with application to the 1987-1988 nationwide food consumption survey. *Survey Methodology*, **20**, 75-85.
- [9] Iannacchione, V. G., Milne, J. G. and Folsom, R. E. (1991). Response probability weight adjustments using logistic regression. Proceedings of the Survey Research Methods Section, *American Statistical Association*, **20**, 637-642.
- [10] Kim, J. K. and Kim, J. J. (2007). Nonresponse weighting adjustment using estimated response probability. *Canadian Journal of Statistics*, **35**, 501-514.
- [11] Kim, J. K. and Riddles, M. K. (2012). Some theory for propensity-score-adjustment estimators in survey sampling. *Survey Methodology*, **38**, 157-165.
- [12] Lee, S. (2006). Propensity score adjustment as a weighting scheme for volunteer panel web surveys. *Journal of Official Statistics*, **22**, 329-349.
- [13] Little, R. J. A. (1988). Missing-data adjustments in large surveys. *Journal of Business and Economic Statistics*, **6**, 287-296.
- [14] Rizzo, L., Kalton, G. and Brick, J. M. (1996). A comparison of some weighting adjustment methods for panel nonresponse. *Survey Methodology*, **22**, 43-53.
- [15] Rosenbaum, P. R. (1987). Model-based direct adjustment. *Journal of the American Statistical Association*, **82**, 387-394.
- [16] Rosenbaum, P. R. and Rubin, D. B. (1983). The central role of the propensity score in observational studies for causal effects. *Biometrika*, **70**, 41-55.