تولید نمونه تصادفی از توزیع گاما با استفاده از توزیع نمایی تعمیم‌یافته

صدیقه امیدوار شلمانی [۱]

چکیده:

استنباط آماری به مساله بررسی ویژگی‌های جامعه براساس نمونه‌های تصادفی تولید شده از توزیع آن جامعه می‌پردازد. از این رو تولید نمونه تصادفی از یک توزیع، نقشی مهم در تجزیه و تحلیل‌های آماری ایفا می‌کند. تولید نمونه تصادفی از توزیع گاما یکی از قدیمی‌ترین و مهم ترین مسائل آماری است. روش‌های متعددی برای تولید اعداد تصادفی از توزیع گاما وجود دارد. در این مقاله، به چگونگی تولید یک نمونه تصادفی از توزیع گاما با استفاده از توزیع نمایی تعمیم‌یافته می‌پردازیم.

واژه‌های کلیدی: آزمون کولموگروف ـ اسمیرونوف، برآوردگر Lـ گشتاوری، توزیع نمایی تعمیم‌یافته

۱ مقدمه

گاما و وایبل از مشهورترین توزیع‌ها در تحلیل داده‌های طول عمر هستند. هر دو توزیع وابسته به پارامتر شکل، دارای نرخ خطر افزایشی و یا کاهشی هستند. بنابراین نسبت به توزیع نمایی که دارای نرخ خطر ثابت است، محدوده گسترده‌تری از داده‌های طول عمر را تحت پوشش قرار می‌دهند. اما هر دو توزیع معایبی دارند. در توزیع گاما، اگر پارامتر شکل عددی صحیح نباشد، تابع توزیع یا تابع خطر به راحتی به دست نمی‌آید و برای به دست آوردن آن نیاز به روش‌های عددی داریم. در مقابل، توابع توزیع، بقا و خطر توزیع وایبل به راحتی به دست می‌آیند. بنابراین نسبت به توزیع گاما، به خصوص در حضور داده‌های سانسور شده، در تحلیل داده‌های طول عمر ترجیح داده می‌شود. اما توزیع وایبل نیز دارای معایبی است. برای مثال بین و انگلهارد (۱۹۹۱)، به این مطلب اشاره کرده‌اند که برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی توزیع وایبل ممکن است برای تمامی مقادیر پارامترها به خوبی عمل نکنند. از طرفی وقتی پارامتر شکل بزرگتر از یک باشد، تابع خطر هر دو توزیع گاما و وایبل تابعی افزایشی است. با این وجود در مورد توزیع گاما از صفر به یک عدد متناهی (عکس پارامتر مقیاس) و در توزیع وایبل از صفر به بی‌نهایت افزایش می‌یابد که این ویژگی توزیع وایبل ممکن است آنچنان مطلوب نباشد.

اخیراً گوپتا و کندو (۱۹۹۹)، حالت خاصی از توزیع وایبل نمایی شده را که توسط مودهولکار و همکاران (۱۹۹۵) معرفی شده بود، در نظر گرفتند و آن را توزیع نمایی تعمیم یافته(GE) نامیدند. آن‌ها نشان دادند که توزیع نمایی تعمیم یافته می‌تواند جایگزین مناسبی برای توزیع‌های گاما و وایبل و حتی لگ‌نرمال باشد. توزیع نمایی تعمیم یافته دو پارامتری دارای تابع چگالی احتمال به فرم زیر است:

$$f(x;\alpha,\sigma)=\frac{\alpha}{\sigma}\exp(-\frac{x}{\sigma})(1-\exp(-\frac{x}{\sigma}))^{\alpha-1}. \qquad (1)$$

که در آن $\sigma,\alpha>0$ به ترتیب پارامترهای شکل و مقیاس هستند. توزیع نمایی تعمیم یافته دارای نرخ خطر افزایشی، کاهشی و ثابت است. به ازای هر مقدار σ، اگر $\alpha>1$ نرخ خطر افزایشی، اگر $\alpha<1$ کاهشی و برای $\alpha=1$ ثابت است. این ویژگی توزیع نمایی تعمیم یافته آن را از توزیع نمایی که تنها داری نرخ خطر ثابت است متمایز می‌کند.

گوپتا و کندو(۲۰۰۱)، با استفاده از دو مثال عددی نشان دادند که توزیع نمایی تعمیم یافته می‌تواند جایگزینی مناسب برای توزیع‌های گاما و وایبل باشد. علاوه بر این ویژگی‌های مختلفی از قبیل رفتار دم‌های

[۱] کارشناس ارشد آمار، دانشگاه تهران

توزیع گاما و توزیع نمایی تعمیم‌یافته، یکنوایی توابع خطر ، رفتار توابع چگالی و رفتار حدی میانگین دو توزیع کاملاً مشابه هستند.

از آنجا که تابع توزیع گاما دارای فرم بسته‌ای نیست، تولید اعداد تصادفی از آن چندان ساده نیست. روش‌های متعددی برای تولید اعداد تصادفی از توزیع گاما وجود دارد. مشهورترین این روش‌ها عبارت است از: گرین وود[2] (۱۹۷۴)، فیشمن[3] (۱۹۷۶)، اهرنز و دیتر[4] (۱۹۷۴)، مارساجلیا[5] (۱۹۷۷)، آتکینسون (۱۹۷۷)، چنگ[6] (۱۹۷۷)، تدیکامالا[7] (۱۹۷۸)، چنگ و فست[8] (۱۹۸۰-۱۹۷۹) و دوروی (۱۹۸۲). این روش‌ها، الگوریتم‌های متفاوتی برای تولید نمونه تصادفی از توزیع گاما وقتی که پارامتر شکل، (α)، کمتر از یک و یا بیشتر از یک باشد ارائه می‌دهند و هیچ یک از آن‌ها برای کل مقادیری که پارامتر اختیار می‌کند خوب عمل نمی‌کنند.

نرم افزارهای متعددی برای تولید نمونه‌های تصادفی وجود دارند که به سادگی و در مدت زمانی کوتاه از هر توزیعی از جمله توزیع گاما نمونه تولید می‌کنند. از جمله این نرم افزارها می‌توان به مینیتب، $SPLUSS$، $SPSS$ و R اشاره کرد. الگوریتم تولید نمونه تصادفی در اکثر این نرم افزارها براساس روش ردـ پذیرش و با در نظر گرفتن روش‌های مختلف برای نواحی مختلف از فضای پارامتری است. به عنوان مثال در نرم افزار $SPSS$، برای $\alpha > ۱$ از روش اهرنز و دیتر (۱۹۷۴) و برای $\alpha < ۱$ از روش فیشمن (۱۹۷۶) و در نرم افزار R برای $\alpha < ۱$ از روش اهرنز و دیتر (۱۹۷۴) و برای $\alpha > ۱$ از روش اهرنز و دیتر (۱۹۸۲) استفاده می‌شود. بنابراین هیچ یک از این نرم افزارها برای نواحی مختلف پارامتری از روش یکسانی استفاده نمی‌کنند.

از آنجا که دو توزیع گاما و GE دارای ویژگی‌های مشترک زیادی هستند، انتظار می‌رود که برای یک توزیع گامای معین و حداقل برای مقادیر خاصی از پارامتر شکل، یک توزیع GE وجود داشته باشد که به توزیع گاما نزدیک باشد. اگر چنین توزیع نمایی تعمیم یافته‌ای وجود داشته باشد می‌توان در دو مورد از آن استفاده کرد:

- از آنجا که تولید اعداد تصادفی از توزیع گاما ساده نیست بنابراین می‌توان از مولد اعداد تصادفی GE برای تولید اعداد تصادفی گاما استفاده کرد.
- اگر توزیع گاما را بتوان به خوبی به یک مجموعه از داده‌های چوله مثبت برازش داد، انتظار می‌رود که توزیع نمایی تعمیم‌یافته را نیز بتوان به خوبی به آن مجموعه از داده‌ها برازش داد. و چون برآورد پارامترهای توزیع GE نسبت به گاما آسان تر است، می‌توانیم از توزیع GE به جای گاما استفاده کنیم.[9]

در این مقاله، ابتدا در بخش دوم، روش تولید نمونه‌های تصادفی گاما را با استفاده از توزیع نمایی تعمیم یافته بیان می‌کنیم و سپس در بخش سوم نتایج عددی را ارائه می‌دهیم.

۲ تولید نمونه تصادفی گاما با استفاده از توزیع نمایی تعمیم‌یافته

در این بخش چگونگی تقریب یک توزیع گاما را به وسیله توزیع GE نشان می‌دهیم.

تعریف ۱.۲. *به ازای $\alpha > ۰$، قرار دهید*

$$\Gamma(\alpha) = \int_{۰}^{\infty} t^{\alpha-۱} \exp(-t) dt$$

در آن صورت $\Gamma(\alpha)$ را تابع گاما می‌نامیم. همچنین اگر $\psi(\alpha) = \frac{d \ln(\Gamma(\alpha))}{d\alpha}$، آنگاه $\psi(.)$ را تابع دیگاما[10] یا تابع پسی می‌نامیم.

vspace۰.۹۵cm

[2] Greenwood

[3] Fishman

[4] Ahrens , Dieter

[5] Marsaglia

[6] Cheng

[7] Tadikamalla

[8] Cheng , Feast

[9] مطالب این قسمت از مراجع [۱۱] ,[۱۲] ,[۱۳] گرفته شده است.

[10] Digamma

قضیه ۲.۲. *اگر X دارای توزیع $GE(\alpha,\sigma)$ باشد، آنگاه با تعریف $\lambda=\frac{1}{\sigma}$ داریم:*

$$E_{\alpha,\lambda}(X) = \frac{1}{\lambda}(\psi(\alpha+1)-\psi(1))$$
$$Var_{\alpha,\lambda}(X) = \frac{1}{\lambda^2}(\psi'(1)-\psi'(\alpha+1))$$

تعریف ۳.۲. *اگر متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد*

$$f_{\alpha,\lambda}(x)=\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}\exp(-\lambda x)$$

که درآن $\alpha,\lambda>0$ ،به ترتیب پارامترهای مقیاس و مکان هستند، گوییم متغیر تصادفی X دارای توزیع گاما با پارامترهای α و λ است و آن را با نماد $X\sim\Gamma(\alpha,\lambda)$ یا $X\sim GA(\alpha,\lambda)$ نمایش می‌دهیم. اگر $X\sim\Gamma(\alpha,\lambda)$ آنگاه

$$E_{\alpha,\lambda}(X) = \frac{\alpha}{\lambda}$$
$$Var_{\alpha,\lambda}(X) = \frac{\alpha}{\lambda^2}$$

۱.۲ برآوردگرهای L ـ گشتاوری

اگرچه روش‌های گشتاوری یکی از قدیمی‌ترین روش‌های برآوردیابی است، اما تشخیص شکل توزیع با استفاده از گشتاورهای مرتبه سوم و بالاتر به راحتی امکان پذیر نیست. مقادیر عددی گشتاورهای نمونه، به خصوص برای اندازه نمونه کم، نسبت به گشتاورهای جامعه بسیار متفاوت است. پارامترهای برآورد شده به روش گشتاوری (MM) نسبت به روش‌های دیگر برآوردیابی از قبیل ML از دقت کمتری برخوردار است.

هاس کینگ[11] در سال ۱۹۹۰ روشی را با عنوان روش L ـ گشتاوری معرفی کرد. این روش مشابه روش MM است. اما پارامترهای توزیع بر اساس ترکیب خطی از آماره‌های ترتیبی برآورد می‌شوند. از جمله مزایای روش L ـ گشتاوری نسبت به روش MM عبارت است از:

۱. برآوردگرهای L ـ گشتاوری نسبت به روش‌های MM استوارتر[12] هستند.

۲. L ـ گشتاورها کمتر در معرض اریبی هستند و توزیع مجانبی آن‌ها دقیق‌تر است.

[14] برگرفته از مرجع [۱۳]

۳. برآوردگرهای پارامتری به روش L ـ گشتاوری، در برخی مواقع و برای اندازه نمونه نسبتاً کم، نسبت به برآوردگرهای ML دقیق‌تر هستند.

اهمیت Lـ گشتاورها نسبت به روش MM در قضیه زیر معلوم می‌شود.

قضیه ۴.۲. (*هاس کینگ*، ۱۹۹۰)

الف) Lـ گشتاورهای متغیر تصادفی X وجود دارند، اگر و فقط اگر میانگین X متناهی باشد.

ب) هر توزیع با میانگین متناهی، توسط Lـ گشتاورهایش مشخص می‌شود.

بر اساس قضیه ۲ ، حتی اگر برآورد پارامترها به روش گشتاوری وجود نداشته باشند، برآوردگرهای Lـ گشتاوری توزیع وجود دارند. علاوه بر این، Lـ گشتاورها یکتا هستند.

در این بخش، ابتدا Lـ گشتاورهای یک توزیع را معرفی و سپس با استفاده از دو مثال Lـ گشتاورهای توزیع گاما و نمایی تعمیم یافته را ارائه می‌کنیم.

تعریف ۵.۲. *فرض کنید X یک متغیر تصادفی حقیقی با تابع توزیع $F_X(x)$ و تابع چندک[13] $x(F)$ باشد. اگر برآوردگر Lـ گشتاوری F را با λ_r نشان دهیم، آنگاه برای هر $r=1,2,\dots$،*

$$\lambda_r=\int_0^1 x(F)P^*_{r-1}(F)dF$$

که درآن

$$P^*_r(F) = \sum_{k=0}^{r} p^*_{r,k}F^k$$
$$p^*_{r,k} = (-1)^{r-k}\binom{r}{k}\binom{r+k}{k}$$

[11] Hosking

[12] Robust

[13] Quantile Function

چند L- گشتاور اولیه توزیع F عبارتند از [۱۴]

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 &= \int_0^1 x(F)dF \\
\lambda_2 &= \int_0^1 x(F)(2F-1)dF \\
\lambda_3 &= \int_0^1 x(F)(6F^2-6F+1)dF \\
\lambda_4 &= \int_0^1 x(F)(20F^3-30F^2+12F-1)dF
\end{aligned} \qquad (2)
$$

مثال ۶.۲. *فرض کنید X دارای توزیع $GA(\alpha,\lambda)$ باشد، آنگاه با استفاده از رابطه (۲) داریم:*

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{\alpha}{\lambda} \\
\lambda_2 &= \frac{1}{\lambda}\left[\frac{\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\alpha)}\right]
\end{aligned}
$$

مثال ۷.۲. *فرض کنید X دارای توزیع $GE(\alpha,\lambda)$ باشد، آنگاه با استفاده از رابطه (۲) داریم:*

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{1}{\lambda}(\psi(\alpha+1)-\psi(1)) \\
\lambda_2 &= \frac{1}{\lambda}(\psi(2\alpha+1)-\psi(\alpha+1)) \\
\lambda_3 &= \frac{1}{\lambda}[2\psi(3\alpha+1)-3\psi(2\alpha+1)+\psi(\alpha+1)]
\end{aligned}
$$

۲.۲ تقریب توزیع گاما با استفاده از توزیع نمایی تعمیم یافته

در این بخش، چگونگی تقریب توزیع گاما را با استفاده از توزیع نمایی تعمیم یافته ارائه می‌دهیم و دقت تقریب مورد نظر را بررسی می‌کنیم. سپس با استفاده از مولد GE، نمونه‌های تصادفی از توزیع گاما تولید می‌کنیم.

اگر $X_1, X_2, ..., X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع GE باشد، آنگاه α^* و λ^* را باید طوری پیدا کنیم که توزیع‌های $GA(\alpha,\lambda)$ و $GE(\alpha^*,\lambda^*)$ به هم نزدیک باشند. از آنجا که هر دو توزیع GE و GA دارای دو پارامتر هستند، بنابراین انتظار داریم که حداقل میانگین و واریانس آن‌ها به هم نزدیک باشند. این کار به دو روش انجام می‌شود:

- **برابر قرار دادن میانگین و واریانس دو توزیع:**

به ازای یک α و λ معین از توزیع گاما، α^* و λ^* را طوری تعیین می‌کنیم که:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\lambda^*}(\psi(\alpha^*+1)-\psi(1)) &= \frac{\alpha}{\lambda} \\
\frac{1}{\lambda^{*2}}(\psi'(1)-\psi'(\alpha^*+1)) &= \frac{\alpha}{\lambda^2}
\end{aligned} \qquad (3)
$$

از رابطه (۳) داریم:

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \frac{(\psi(\alpha^*+1)-\psi(1))^2}{(\psi'(1)-\psi'(\alpha^*+1))} \\
\lambda^* &= \frac{\lambda}{\alpha}(\psi(\alpha^*+1)-\psi(1))
\end{aligned} \qquad (4)
$$

جفت α^* و λ^* که از (۴) به دست می‌آید را با $(\alpha_1^*, \lambda_1^*)$ نشان می‌دهیم.

- **برابر قرار دادن L- گشتاورهای دو توزیع:**

به ازای α و λ معین، α^* و λ^* را طوری تعیین می‌کنیم که

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\lambda^*}(\psi(\alpha^*+1)-\psi(1)) &= \frac{\alpha}{\lambda} \\
\frac{1}{\lambda^*}(\psi(2\alpha^*+1)-\psi(\alpha^*+1)) &= \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\Gamma(\alpha+1/2)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1/2)}\right)
\end{aligned} \qquad (5)
$$

جفت α^* و λ^* که از (۵) به دست می‌آید را با $(\alpha_2^*, \lambda_2^*)$ نشان می‌دهیم.

گوپتا و کندو (۲۰۰۱)، نشان دادند که با توجه به تقریب‌های فوق، اختلاف بین گاما و توزیع نمایی تعمیم‌یافته زمانی مینیمم می‌شود که $\alpha = 1$ باشد. در این حالت هر دو توزیع برابر توزیع نمایی می‌شوند. هر چه پارامتر α از یک دور شود، فاصله بین دو توزیع افزایش می‌یابد. به ازای $0 < \alpha < 2/5$ می‌توان توزیع GE را به گونه‌ای یافت که توزیع گاما را به خوبی تقریب بزند. همچنین $GE(\alpha_2^*, \lambda_2^*)$ نسبت به $GE(\alpha_1^*, \lambda_1^*)$ به توزیع گاما نزدیک‌تر است.

۳ نتایج عددی

در این بخش ابتدا تولید نمونه تصادفی از توزیع $GA(\alpha,1)$ را شرح می‌دهیم و سپس نتایج عددی برای آزمون نیکویی برازش ارائه می‌کنیم. اگر $U_1, U_2, ..., U_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع $U(0,1)$ باشد، آنگاه $X_1, X_2, ..., X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع $GE(\alpha^*,\lambda^*)$ است که در آن به ازای $i = 1, 2, ..., n$

$$X_i = -\frac{1}{\lambda^*}\ln(1-U_i^{1/\alpha^*})$$

بنابراین برای مقادیر خاصی از α $(۰ < \alpha < ۲/۵)$ تولید یک نمونه تصادفی از $GA(\alpha, ۱)$ همانند تولید یک نمونه تصادفی از $GE(\alpha_۱^*, \lambda_۱^*)$ و یا $GE(\alpha_۲^*, \lambda_۲^*)$ است. از آنجا که اگر $X \sim GA(\alpha, ۱)$ آنگاه $\frac{X}{\lambda} \sim GA(\alpha, \lambda)$، بنابر این تولید نمونه تصادفی از توزیع $GA(\alpha, \lambda)$ به راحتی امکان پذیر است. برای بررسی ادعا، آماره کولموگرف ـ اسمیرنوف را بین تابع توزیع تجربی و تابع توزیع تحت فرض $H_۰ : X_۱, X_۲, ..., X_n \sim GA(\alpha, ۱)$، برای سه آزمون زیر به دست می‌آوریم:

- آزمون ۱: یک نمونه تصادفی n تایی از $GA(\alpha, ۱)$ تولید کرده و فرض $H_۰$ را آزمون می‌کنیم.

- آزمون ۲: یک نمونه تصادفی n تایی از $GE(\alpha_۱^*, \lambda_۱^*)$ تولید کرده و فرض $H_۰$ را آزمون می‌کنیم.

- آزمون ۳: یک نمونه تصادفی n تایی از $GE(\alpha_۲^*, \lambda_۲^*)$ تولید کرده و فرض $H_۰$ را آزمون می‌کنیم.

در جدول‌های ۱، ۲ و۳ بر اساس ۱۰۰۰ بار تکرار و به ازای مقادیر $n = ۱۵, ۲۵, ۴۰, ۵۰$ و $\alpha = ۰/۴, ۱/۲, ۲/۵$، میانگین و انحراف استاندارد آماره کولموگروف ـ اسمیرنوف $(S.D.K - S, A.K - s)$ و میانگین و انحراف استاندارد P ـ مقدار $(S.D.P, A.P)$ آورده شده است.

با توجه به جدوال مربوطه، مشاهده می‌شود که در همه موارد، نتایج کاملاً مشابه هم هستند. همچنین مقادیر بالای P ـ مقدار نشان می‌دهد که نمی‌توانیم فرض صفر را رد کنیم. از نتایج آزمون‌های ۱ـ ۳ واضح است که اگر یک نمونه تصادفی از توزیع GE تولید کنیم، از دید آماری نمی‌توانیم فرض $H_۰$ را رد کنیم. علاوه بر این نتایج آزمون ۱ و آزمون‌های ۲ و ۳ بیان می‌کند که به ازای $۰ < \alpha < ۲/۵$ تولید نمونه تصادفی از توزیع GE، همانند تولید نمونه تصادفی از توزیع گاما است.[۱۵]

[۱۵] برگرفته از مرجع [۱۳]

جدول ۱. مقادیر $K - S$ و Pـ مقدار برای آزمون‌های ۲ ،۱ و ۳ به ازای $\alpha = ۰/۴$

n	آماره‌ها	آزمون ۱	آزمون ۲	آزمون ۳
۱۵	$A.P$	۶۷/۰	۰/۶۷	۶۸/۰
	$S.D.P$	۱۹۸/۰	۱۹۶/۰	۱۹۵/۰
	$A.K - S$	۱۷۰۸/۰	۷۰۴/۰	۷۰۲/۰
	$S.D.K - S$	۱۰۶/۰	۱۰۵/۰	۱۰۴/۰
۲۵	$A.P$	۶۴۷/۰	۶۵۸/۰	۶۶/۰
	$S.D.P$	۱۷۰/۰	۱۶۶/۰	۱۶۶/۰
	$A.K - S$	۷۰۳/۰	۶۹۷/۰	۶۹۵/۰
	$S.D.K - S$	۰۸۸/۰	۰۸۶/۰	۰۸۶/۰
۴۰	$A.P$	۶۳۳/۰	۰/۶۳۸	۶۴/۰
	$S.D.P$	۱۴۲/۰	۱۴۵/۰	۱۴۴/۰
	$A.K - S$	۷۰۰/۰	۰۶۹۷/۰	۶۹۵/۰
	$S.D.K - S$	۰۷۳/۰	۰۷۴/۰	۰۷۴/۰
۵۰	$A.P$	۶۲۸/۰	۶۳۲/۰	۶۳۷/۰
	$S.D.P$	۱۲۵/۰	۱۲۹/۰	۱۳۰/۰
	$A.K - S$	۶۹۹/۰	۷۰/۰	۶۹۴/۰
	$S.D.K - S$	۰۶۴/۰	۰۶۶/۰	۰۶۶/۰

جدول ۲ . مقادیر $K - S$ و Pـ مقدار برای آزمون‌های۱، ۲ و ۳ به ازای $\alpha = ۱/۲$

n	آماره‌ها	آزمون ۱	آزمون ۲	آزمون ۳
۱۵	$A.P$	۸۰۲/۰	۰/۷۹	۷۹/۰
	$S.D.P$	۱۷۰/۰	۱۷۵/۰	۱۷۵/۰
	$A.K - S$	۶۳۸/۰	۶۴/۰	۶۲/۰
	$S.D.K - S$	۰۹۰/۰	۰۹۳/۰	۰۹۳/۰
۲۵	$A.P$	۷۸۴/۰	۷۹/۰	۷۹/۰
	$S.D.P$	۱۵۵/۰	۱۵۵/۰	۱۵۵/۰
	$A.K - S$	۶۳۲/۰	۶۲۸/۰	۶۳/۰
	$S.D.K - S$	۰۸۰/۰	۰۸۰/۰	۰۸۱/۰
۴۰	$A.P$	۷۸۰/۰	۰/۷۸۵	۷۸/۰
	$S.D.P$	۱۳۷/۰	۱۳۹/۰	۱۴۰/۰
	$A.K - S$	۶۲۴/۰	۰۶۲۱/۰	۶۲/۰
	$S.D.K - S$	۰۷۱/۰	۰۷۲/۰	۰۷۲/۰
۵۰	$A.P$	۷۷۳/۰	۷۸۴/۰	۷۸۴/۰
	$S.D.P$	۱۲۸/۰	۱۲۵/۰	۱۲۵/۰
	$A.K - S$	۶۲۵/۰	۶۱۹/۰	۶۲۰/۰
	$S.D.K - S$	۰۶۵/۰	۰۶۴/۰	۰۶۴/۰

جدول ۳. مقادیر $K-S$ و P- مقدار برای آزمون‌های۱، ۲ و ۳ به ازای $\alpha = ۲/۵$

n	آماره‌ها	آزمون ۱	آزمون ۲	آزمون ۳
۱۵	$A.P$	۸۲۸/۰	۰/۸۲	۸۲۲/۰
	$S.D.P$	۱۶۵/۰	۱۶۰/۰	۱۶۳/۰
	$A.K-S$	۶۲۴/۰	۶۲۷/۰	۶۲۸/۰
	$S.D.K-S$	۰۸۸/۰	۰۸۵/۰	۰۸۶/۰
۲۵	$A.P$	۸۲۸/۰	۸۲۸/۰	۸۲۷/۰
	$S.D.P$	۱۴۲/۰	۱۴۳/۰	۱۴۳/۰
	$A.K-S$	۶۰۹/۰	۶۰۹/۰	۶۰۹/۰
	$S.D.K-S$	۰۷۴/۰	۰۷۴/۰	۰۷۴/۰
۴۰	$A.P$	۸۲۸/۰	۰/۸۲۸	۸۳۰/۰
	$S.D.P$	۱۴۲/۰	۱۳۱/۰	۱۲۸/۰
	$A.K-S$	۶۰۹/۰	۶۰۹/۰	۵۹۸/۰
	$S.D.K-S$	۰۷۴/۰	۰۷۴/۰	۰۶۷/۰
۵۰	$A.P$	۸۳۸/۰	۸۳۴/۰	۸۳۲/۰
	$S.D.P$	۱۱۶/۰	۱۱۶/۰	۱۱۷/۰
	$A.K-S$	۵۹۱/۰	۵۹۴۰/۰	۵۹۴/۰
	$S.D.K-S$	۰۶۰/۰	۰۶۰/۰	۰۶۰/۰

۴ بحث و نتیجه گیری

از آنجا که تابع توزیع گاما دارای فرم بسته نیست، تولید نمونه تصادفی از آن چندان ساده نیست. در این مقاله روش تولید نمونه تصادفی گاما با استفاده از توزیع نمایی تعمیم‌یافته مورد بررسی قرار گرفت. با توجه به نتایج به دست آمده، به ازای $۰ < \alpha < ۲/۵$ می‌توانیم از توزیع نمایی تعمیم یافته برای تولید نمونه تصادفی از توزیع گاما استفاده کنیم.

مراجع

[1] Ahrens, J.H. , Dieter, U. (1974). Computer method for sampling from gamma, beta, Poisson and binomial distribution, *Computing*, **12**, 223-246.

[2] Ahrens, J.H , Dieter, U. (1982). Generating gamma variates by a modified rejection technique, *Communications of the ACM*, **25**, 4754

[3] Atkinson, A.C. (1977). An easily programmed algorithm for generating gamma random variables, *Applied Statistics*, **26**, 232-234.

[4] Bain, L.J. , Engelhardt, M. (1991). *Statistical Analysis of Reliability and Life-Testing Models*, 2nd. Edition, Marcel and Dekker, New York.

[5] Cheng, R. C.H. (1977) The generation of gamma variables with non- integral shape parameter, *Applied Statistics*, **26**, 71-75.

[6] Cheng, R. C.H., Feast, G.M. (1979). Some simple gamma variate generators, *Applied Statistics*, **28**, 290-295.

[7] Cheng, R. C.H., Feast, G.M. (1980). Gamma variate generators with increased shape parameter range, *Communications of the ACM*, **23**, 389-394.

[8] Devroye, L. (1982) A simple algorithm for generating random variates with a log-concave density, *Computing*, **33**, 247-257.

[9] Fishman, G.S. (1976). Sampling from the gamma distribution on computer, *Communications of the ACM*, **19**, 407-409.

[10] Greenwood, A.J. (1974). A fast generator for gamma distributed random variables, *COMPSTAT*, 19-27.

[11] Gupta, R. D. and Kundu, D. (1999). Generalized Exponential Distributions, *Australian and New Zealand Journal of Statistics*, **41(2),** 173-188.

[12] Gupta, R. D. and Kundu, D. (2001). Exponentiated Exponential family: an alternative to gamma and Weibull, *Biomatrical Journal*, **43,** 117-130.

[13] Gupta, R. D. and Kundu, D. (2003). Closeness of gamma and generalized exponential distributions, *communications in statistics-theory and methods*, **32,** 4, 705-721.

[14] Hosking, J. R. M. (1990). L-Moments: Analysis and estimation of distribution using linear combinations of order statistics, *Journal of Royal Statistical Society, Ser. B*, **52(1),** 105-124

[15] Marsaglia, G. (1977). The squeeze method for generating gamma variates, *Computers and Mathematics with Applications*, **3,** 321-325.

[16] Mudholkar, G.S. Srivastava, D.K., Freimes, M.(1995). The exponentiated Weibull family: a reanalysis of the Bus-Motor-failur data *Technometrics* , **37,** 436-445.

[17] Tadikamalla, P.R. (1978). Computer generation of gamma random variables ,*Communications of the ACM*, **21,** 419-422.